УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЯЗКО- И ПОРИСТО-УПРУГИХ ТЕЛ

Л. А. Игумнов, А. В. Аменицкий, А. А. Белов,
С. Ю. Литвинчук, А. Н. Петров

Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород
E-mail: igumnov@mech.unn.ru

Представлены результаты математического и дискретного моделирования линейных задач динамики вязко- и пористо-упругих трехмерных тел. Используются методы и подходы, основанные на формулировке граничных интегральных уравнений, решаемых с помощью граничных элементов. В качестве вязкоупругой модели использована модель стандартного вязкоупругого тела. Для описания свойств пористо-упругого материала применяется полная модель Био с четырьмя базовыми функциями. Проводится сравнение примеров численных решений задач с известными результатами решений.

Ключевые слова: метод граничных интегральных уравнений, вязкоупругость, пористо-упругие тела, обращение преобразования Лапласа.

Введение. При проведении неразрушающего контроля, диагностики и расчетов на прочность технических объектов, сейсморазведки, мониторинга приповерхностных зон земной среды и т. д. требуется разработка эффективных средств, методов и моделей. Эти модели и методы используются при исследовании распространения волн в телах из вязко- и пористо-упругих материалов при вибрационных и ударных нагружениях.

Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) и метод граничных элементов (МГЭ) являются универсальными численно-аналитическими методами решения трехмерных волновых начально-краевых задач теории вязкоупругости с сопряженными полями. Преимущество этих методов является наиболее существенным в случае бесконечных и полубесконечных тел и сред. В настоящее время сформировались два основных направления развития метода ГИУ и МГЭ, применяемых при исследовании волновых задач: использование интегрального преобразования и построение шаговых процедур.

В данной работе рассматриваются начально-краевые задачи динамики вязкоупругих и пористо-упругих тел, которые решаются с использованием гранично-элементной модели и интегрального преобразования Лапласа по времени. Обратное преобразование Лапласа строится численно методом Дурбина.

1. Математическая постановка задачи. Рассматривается кусочно-однородное тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, в котором введена декартова система координат $Ox_1x_2x_3$. Границу тела Ω обозначим через S, границы однородных тел Ω_k $(k = 1, \dots, K)$ — через S_k. Предполагается, что тела Ω_k являются изотропными вязкоупру-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12-08-00984-а, 12-01-00698-а, 13-08-00658-а, 13-08-97091_р_поволжье_а).

гими [1–3] или изотропными пористо-упругими [4–7] телами. Для параметров материала каждого однородного тела Ω_k введем следующие обозначения: ρ^k — плотность материала; $K^k(t)$, $G^k(t)$ — функции свойств материала; K^k, G^k — константы упругих свойств материала. Динамическое состояние каждого тела Ω_k описывается системой дифференциальных уравнений в перемещениях

$$L(\partial, s)v^k = 0, \qquad v^k = (u^k, p^k),$$

где в случае вязкоупругого тела

$$L(\partial, s) = \begin{bmatrix} G^k(t) * \nabla^2 + \Big(K^k(t) + \dfrac{1}{3}\,G^k(t)\Big) * \partial_i\,\partial_j - s^2\rho^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

в случае пористо-упругого тела

$$L(\partial, s) = \begin{bmatrix} G^k\nabla^2 + \Big(K^k + \dfrac{1}{3}\,G^k\Big)\,\partial_i\,\partial_j - s^2(\rho^k - \beta^k\rho_f^k) & -(\alpha^k - \beta^k)\partial_i \\ -s(\alpha^k - \beta^k)\,\partial_j & \dfrac{\beta^k}{s\rho_f^k}\,\nabla^2 - \dfrac{(\varphi^k)^2 s}{R} \end{bmatrix},$$

$v^k(x, s)$ — вектор изображений обобщенных перемещений точки; $\beta^k = k\rho_f^k\varphi^{k2}s^2/[\varphi^{k2}s + s^2k(\rho_a^k + \varphi^k\rho_f^k)]$; φ^k — пористость; k — проницаемость; α^k — эффективный коэффициент напряжений; ρ^k, ρ_a^k, ρ_f^k — плотности пористого скелета, присоединенной массы и жидкой среды.

При использовании интегрального преобразования Лапласа для функции $v^k(x, t)$ предполагалось, что она и ее производные по времени удовлетворяют нулевым начальным условиям.

Конкретный вид функций $G(t)$ и $K(t)$ определяется моделью вязкоупругого материала. В данной работе принимаются определяющие соотношения следующего вида:

$$\sigma_{ij} = 2G(t) * \varepsilon_{ij} = 2\int_0^t G(t - \tau)\,d\varepsilon_{ij}(t), \qquad i \neq j,$$

$$G(t) = G(\infty) + (G(0) - G(\infty))\,\mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

Здесь $G(t)$ — функция памяти материала для модели стандартного вязкоупругого тела; γ — величина, обратная характерным временам релаксации. Кроме того, предполагается, что отношение значения модуля на бесконечности к значению модуля в начальный момент определяется параметром $w = G(\infty)/G(0)$.

Рассматриваются следующие типы граничных условий для тел Ω_k:

$$v_l^k(x, s) = f_l^k(x, s), \qquad x \in S^u \cap S_k, \quad l = \overline{1, 4},$$

$$\tilde{t}_l^k(x, s) = g_l^k(x, s), \qquad x \in S^\sigma \cap S_k,$$

$$v_l^k(x, s) = v_l^s(x, s), \qquad \tilde{t}_l^k(x, s) = -\tilde{t}_l^s(x, s), \qquad x \in S'_{ks}.$$

Здесь S^u, S^σ — участки границы S тела Ω, на которых заданы соответственно перемещения и поверхностные силы; S'_{ks} — граница области контакта тел Ω_k и Ω_s; функции $f_l^k(x, s)$, $g_l^k(x, s)$ — заданные функции координат и параметра преобразования Лапласа.

Для однородного тела интегральное представление имеет вид

$$v(x, s) = \int_S \Gamma^0(x, y, s)\tilde{t}(y, s)\,d_yS - \int_S \Gamma^1(x, y, s)v(y, s)\,d_yS,$$

где в случае вязкоупругого тела

$$\Gamma^0_{ij} \equiv U_{ij}, \qquad \Gamma^1_{ij} \equiv T_{ij}, \qquad i,j = \overline{1,3},$$

в случае пористо-упругого тела

$$\Gamma^0_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{U}^s_{ij} & -\tilde{P}^s_j \\ \tilde{U}^f_i & -\tilde{P}^f \end{bmatrix}, \qquad \Gamma^1_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{T}^s_{ij} & -\tilde{Q}^s_j \\ \tilde{T}^f_i & -\tilde{Q}^f \end{bmatrix},$$

Γ^0, Γ^1 — компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений исходных уравнений соответственно. Выражения для компонент приведены в [4, 5, 8, 9].

Таким образом, система ГИУ имеет вид [4, 5, 8, 9]

$$Cv(x,s) = \int_S \Gamma^0(x,y,s)\bar{t}(y,s)\,d_yS - \int_S \Gamma^1(x,y,s)v(y,s)\,d_xS, \qquad C \equiv \begin{bmatrix} c_{ij} & 0 \\ u & c \end{bmatrix}.$$

Для численного обращения использован алгоритм Дурбина [10, 11]

$$F_k = \operatorname{Re}[\bar{f}(\omega_0 + i\omega_k)], \qquad G_k = \operatorname{Im}[\bar{f}(\omega_0 + i\omega_k)], \qquad \Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k,$$

$$f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F_k + F_{k+1})\,\Delta_k}{2\pi},$$

$$f(t) \approx \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{\pi t^2} \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{F_{k+1} - F_k}{\Delta_k}\,(\cos(\omega_{k+1}t) - \cos(\omega_k t)) - \frac{G_{k+1} - G_k}{\Delta_k}\,(\sin(\omega_{k+1}t) - \sin(\omega_k t))\Big].$$

На основе регуляризованного ГИУ строится дискретный аналог, детальное описание которого приведено в [9, 10, 12]. Особенностью гранично-элементной схемы является согласованная модель поэлементной аппроксимации границы и граничных функций. В этой модели для описания границ используются биквадратичные формы, граничные функции первого рода являются билинейными, граничные функции второго рода постоянны.

2. Результаты численных расчетов. Рассмотрим одномерную задачу о действии силы на торец призматического тела (рис. 1). Принимаются следующие значения параметров материала [8]: $E = 1{,}44 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\nu = 0$, $\rho = 2458$ кг/м^3, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $\varphi = 0{,}19$, $R = 4{,}7 \cdot 10^8$ Н/м^2, $\alpha = 0{,}86$, $k = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м^4/(Н $\cdot$ с). Пусть длина пористо-упругого тела $l = l_1 + l_2 = 10$ м. Граничные условия задачи о действии силы $t_3 = -1$ Н/м^2 в изображениях по Лапласу имеют вид $u_3(0) = 0$, $q(0) = 0$, $\sigma_3(l) = -1/s$, $p(l) = 0$. На рис. 2 показано продольное смещение торца призматического тела при воздействии силы.

Особенностью волнового процесса в двухкомпонентной среде является возникновение медленной продольной волны. На примере задачи о консоли, решаемой методом граничных

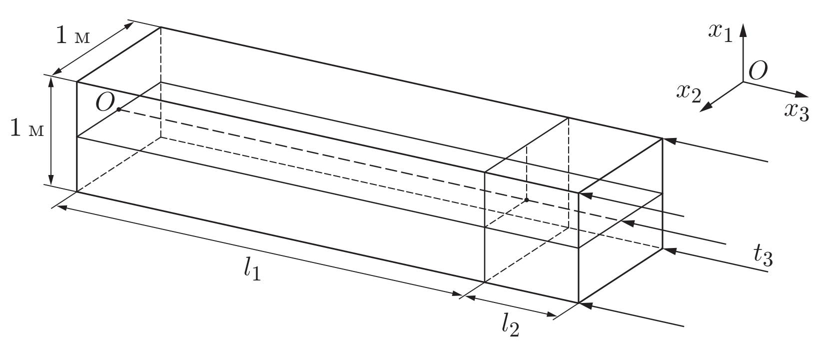

Рис. 1. Схема одномерной задачи о действии силы на торец призматического тела

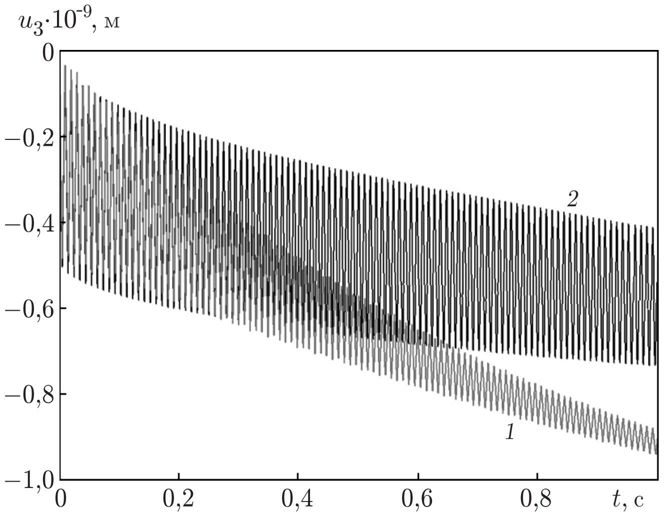

Рис. 2. Продольное смещение торца призматического тела при воздействии силы: *1* — решение для модели стандартного вязкоупругого тела; *2* — решение для полной модели Био

элементов в трехмерной постановке, исследуем волновой процесс в случае четко выраженной волны Био [13].

Рассмотрим составную консоль длиной $l = l_1 + l_2 = 9$ м (см. рис. 1). Определим поровые давление и поток в точке $x_3 = l_2 = 1{,}5$ м. На плоскости $x_3 = 0$ граничные условия имеют вид $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, неизвестными являются компоненты усилия t_1, t_2, t_3. На плоскости $x_3 = l$ граничные условия имеют вид $t_1 = 0$, $t_3 = 0$, $t_2 = 1$ Н/м^2, неизвестными являются компоненты смещения u_1, u_2, u_3. На боковой поверхности граничные условия имеют вид $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0$, неизвестными являются величины u_1, u_2, u_3. При получении решения выбирались приведенные частоты $\omega \in [0, 0{,}6]$ с шагом $\Delta\omega = 0{,}005$ и $\omega \in [0{,}6, 300{,}0]$ с шагом $\Delta\omega = 0{,}05$. Параметр Дурбина равен $\omega_0 = 0{,}3$. На рис. 3 представлены зависимости поровых давления и потока от времени в точке $x_3 = l_2 = 1{,}5$ м. Кривые, соответствующие аналитическому решению и численному решению, полученному с использованием граничных элементов, совпадают. Аналитические и численные решения получены при одних и тех же приведенных частотах. Построение аналитического и гранично-элементного решений при большем числе частот позволит устранить малоамплитудные колебания на рис. 3.

Анализ кривой давлений, представленной на рис. 3,*а*, позволяет сделать вывод, что в пористо-упругом теле возбуждается медленно движущаяся продольная волна: при увеличении значения параметра проницаемости амплитуда отклика давлений уменьшается до некоторого ненулевого значения, при этом амплитуда порового потока увеличивается. Аналогичное явление обнаружено в работах [13, 14] в результате построения аналитического решения для пористо-упругого одномерного стержня.

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $t_3(t) = t^0(H(t) - H(t - 0{,}0085))$, $t^0 = 1$ Н/м^2 на деформируемый параллелепипед с размерами $2 \times 2 \times 1$ м, расположенный на границе деформируемого полупространства. Расчеты проводились для различных гранично-элементных сеток. Параметры материалов следующие: параллелепипед — $E = 3 \cdot 10^8$ Н/м^2, $\nu = 0{,}2$, $\rho = 2000$ кг/м^3, полупространство — $E = 1{,}38 \cdot 10^8$ Н/м^2, $\nu = 0{,}35$, $\rho = 1966$ кг/м^3; координаты исследуемой точки: $(2{,}33; 2{,}33; 0)$. В качестве начала координат выбран центр контактной грани параллелепипеда. На рис. 4 приведены результаты расчетов, полученные с использованием 960 граничных элементов.

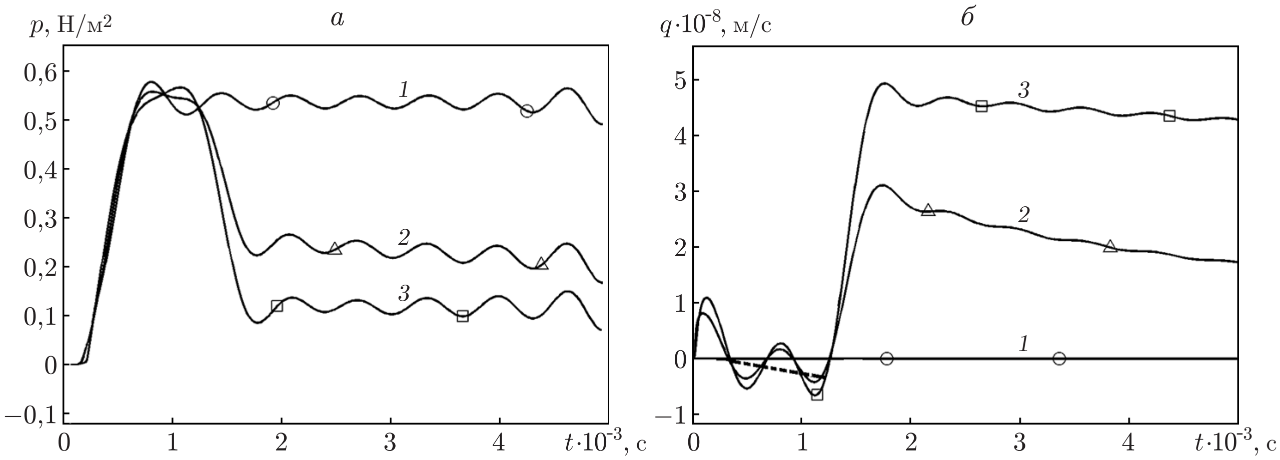

Рис. 3. Зависимости давления (a) и потока ($б$) от времени в задаче о составной консоли в точке $x_3 = l_2 = 1{,}5$ м:
1 — $k = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$, *2* — $k = 1{,}9 \cdot 10^{-7}$, *3* — $k = 1{,}9 \cdot 10^{-6}$

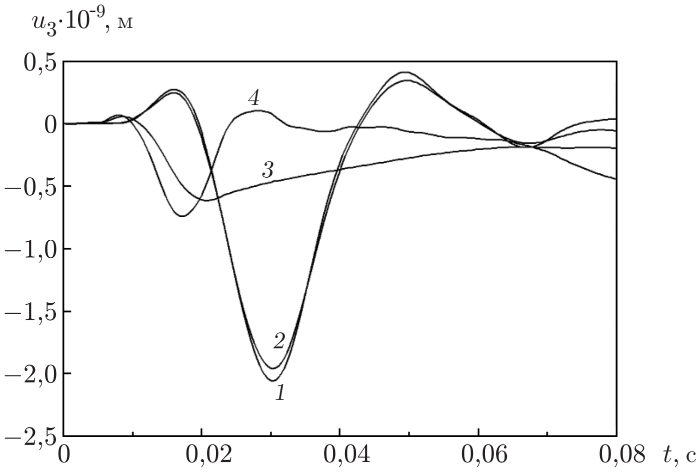

Рис. 4. Зависимость перемещения в направлении координаты x_3 от времени:
1 — решение для упругого тела, *2–4* — решения для стандартного вязкоупругого тела (2 — $\gamma = 100$, 3 — $\gamma = 1$, 4 — $\gamma = 0{,}01$)

Рассмотрим задачу о действии на участке площадью 1 м^2 той же вертикальной силы $t_3(t) = t^0 H(t)$, $t^0 = -1000$ Н/м^2 на поверхность однородного пористо-упругого полупространства. На дневной поверхности полупространства, являющейся свободной и проницаемой, заданы поровое давление $p = 0$ и поверхностные силы $t_i(t) = 0$ ($i = \overline{1,3}$). Расчеты проводились с использованием гранично-элементных сеток с различной степенью дискретизации: 512, 1008, 1536, 2160 элементов.

В качестве пористо-упругого материала выберем водонасыщенный песок с параметрами $K = 2{,}1 \cdot 10^8$ Н/м^2, $G = 9{,}8 \cdot 10^7$ Н/м^2, $\rho = 1884$ кг/м^3, $\varphi = 0{,}48$, $K_s = 1{,}1 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $K_f = 3{,}3 \cdot 10^9$ Н/м^2, $k = 3{,}55 \cdot 10^{-9}$ м^4/(Н $\cdot$ с) [8].

Исследуем влияние коэффициента проницаемости на динамические отклики перемещений скелета и порового потока в точке дневной поверхности полупространства, расположенной на расстоянии 15 м от точки, в которой приложено усилие. На рис. 5 представлена зависимость перемещения от времени в указанной точке.

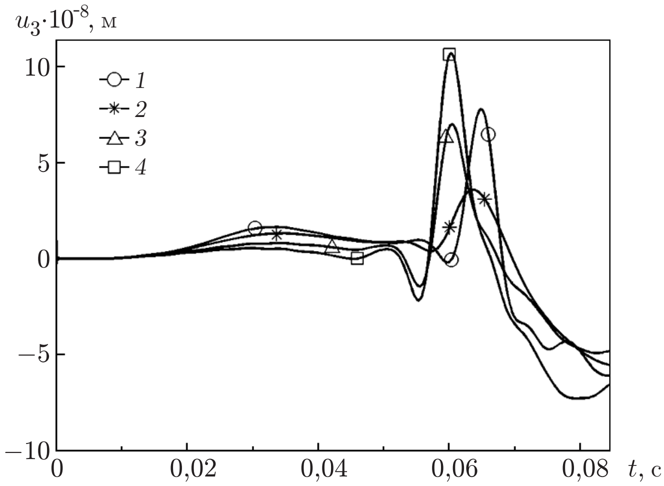

Рис. 5. Зависимость перемещения от времени в точке дневной поверхности, расположенной на расстоянии 15 м от точки, в которой приложено усилие: *1* — $k = 3{,}55 \cdot 10^{-9}$; *2* — $k = 3{,}55 \cdot 10^{-7}$; *3* — $k = 3{,}55 \cdot 10^{-6}$; *4* — $k = 3{,}55 \cdot 10^{-5}$

Результаты проведенного исследования свидетельствуют о том, что значение коэффициента проницаемости пористо-упругого материала, содержащегося в динамическом законе Дарси, существенно влияет не только на амплитуду поверхностной волны, но и на скорость ее распространения.

Заключение. С использованием гранично-элементного подхода рассмотрены волновые процессы в вязкоупругой и пористо-упругой призматических консолях и полупространствах, содержащих деформируемое вязкоупругое тело или пористо-упругий слой. Установлено, что вязкость и пористость оказывают существенное влияние на характер распределения волновых процессов. Показано, что модели вязкоупругого и пористоупругого тел могут давать одни и те же значения перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хуторянский Н. М.** О методе обобщенных запаздывающих потенциалов и интегральных уравнений в нестационарных динамических задачах теории упругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1978. С. 8–18.
2. **Локшин А. А.** Математическая теория распространения волн в средах с памятью / А. А. Локшин, Ю. В. Суворова. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1982.
3. **Белов А. А.** Гранично-элементный расчет динамики составных вязкоупругих тел // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2008. Вып. 70. С. 162–168.
4. **Аменицкий А. В., Игумнов Л. А., Карелин И. С.** Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2008. Вып. 70. С. 71–78.
5. **Аменицкий А. В., Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С.** Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2009. Вып. 71. С. 164–171.

6. **Аменицкий А. В.** Гранично-элементный расчет динамики однородных пороупругих тел // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2009. Вып. 71. С. 178–183.
7. **Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С., Литвинчук С. Ю.** Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости // Тр. Моск. авиац. ин-та. [Электрон. журн.]. 2010. № 40. Режим доступа: http://www.mai.ru/science/trudy/pubLished.php.
8. **Schanz M.** Wave propogation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001.
9. **Аменицкий А. В.** Развитие метода граничных элементов для численного моделирования динамики трехмерных однородных пороупругих тел: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2010.
10. **Баженов В. Г.** Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций: Учеб. пособие / В. Г. Баженов, А. А. Белов, Л. А. Игумнов. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2009.
11. **Durbin F.** Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // Computer J. 1974. V. 17, N 4. P. 371–376.
12. **Баженов В. Г.** Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В. Г. Баженов, Л. А. Игумнов. М.: Физматлит, 2008.
13. **Белов Л. А., Карелин И. С.** Частные решения динамической пороупругости в одномерной постановке // Пробл. прочности и пластичности. 2010. Вып. 72. С. 159–164.
14. **Schanz M., Antes H.** Waves in poroelastic half space: Boundary element analyses // Porous media: theory, experiments, and numerical applications. Berlin: Springer, 2002. P. 383–412.

Поступила в редакцию 6/VI 2013 г.