

В. М. Александров, А. А. Шматкова

НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА, ЛЕЖАЩЕГО НА ГИДРАВЛИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ, ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Дан вывод интегродифференциального уравнения изгиба балки (пластинки), находящейся в условиях нелинейной неустойчившейся ползучести. Исследована задача о неустойчившейся ползучести изгиба ледяного покрова, лежащего на гидравлическом основании и нагруженного сосредоточенным усилием. Исследование проводилось в рамках плоской постановки. Для описания длительных воздействий на лед использована известная модель Глена [1]. Приведен численный пример.

1. Рассмотрим неустойчившуюся ползучесть балки, испытывающей изгиб под действием заданной постоянной нагрузки. Пусть изгиб происходит выпуклостью вниз. Направим ось x вдоль оси балки, ось z — вертикально вниз. Относительное удлинение e некоторого волокна балки складывается из упругого удлинения e_1 и деформации ползучести e_2 :

$$(1.1) \quad e = e_1 + e_2,$$

причем упругое удлинение $e_1 = \sigma(t)/E$ ($\sigma(t)$ — нормальное напряжение, E — модуль упругости). Примем степенную зависимость деформации ползучести от $\sigma(t)$, а именно

$$e_2 = \int_0^t B(t-\tau) \sigma^m(\tau) d\tau.$$

Здесь m — показатель ползучести, безразмерная постоянная, для льда $m > 1$; $B(t-\tau)$ — ядро ползучести, имеющее размерность $(\text{кг}/\text{м}^2)^{-m} \cdot \text{с}^{-1}$. Это положительная убывающая функция времени, отсчитываемого от момента начала ползучести, асимптотически стремящаяся к предельному значению $B_\infty = \text{const}$. Учитывая экспериментально полученный для льда вид кривой $B(t-\tau)$ [1], полагаем, что

$$(1.2) \quad B(t-\tau) = B_\infty + B_0 \exp[-\mu(t-\tau)].$$

Так как в зависимости от знака z будет находиться и знак e , а следовательно, и знак σ , представим (1.1) с учетом всего сказанного в виде

$$(1.3) \quad e = \sigma(t)/E + \int_0^t B(t-\tau) |\sigma(\tau)|^{m-1} \sigma(\tau) d\tau.$$

Относительное удлинение волокна балки, расположенного на расстоянии z от нейтральной оси, по гипотезе плоских сечений $e = z/\rho$ (ρ — радиус кривизны нейтрального слоя). В случае малого прогиба можно с достаточной точностью полагать $e = z d^2 v / dx^2$. Учитывая это, запишем соотношение (1.3) в форме

$$(1.4) \quad z \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t B(t-\tau) |\sigma|^{m-1} \sigma d\tau.$$

Пусть Ω — площадь поперечного сечения балки. Тогда в некотором сечении балки изгибающий момент $M = \int_\Omega z \sigma d\Omega$. Умножая (1.4) на $z d\Omega$ и выполняя интегрирование по площади поперечного сечения, находим

$$(1.5) \quad I \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{E} + \int_0^t B(t-\tau) \int_\Omega |\sigma|^{m-1} \sigma z d\Omega d\tau,$$

где $I = \int_{\Omega} z^2 d\Omega$ — момент инерции поперечного сечения. Поскольку σ и z всегда одного знака, то внутренний интеграл в соотношении (1.5) можно записать так:

$$(1.6) \quad \int_{\Omega} |\sigma|^m |z| d\Omega.$$

Пусть $m^{-1} + n^{-1} = 1$, тогда в силу неравенства Гельдера

$$\int_{\Omega} |z| |\sigma| d\Omega \leq \left[\int_{\Omega} (|z|^{1/m} |\sigma|)^m d\Omega \right]^{1/m} \left(\int_{\Omega} |z| d\Omega \right)^{1/n} = C_1 \left(\int_{\Omega} |z| |\sigma|^m d\Omega \right)^{1/m},$$

$$C_1^{-m} M^m \leq \int_{\Omega} |\sigma|^m |z| d\Omega.$$

Таким образом, получена оценка интеграла (1.6) снизу. Чтобы получить оценку сверху, воспользуемся неравенством Фавара [2]

$$\frac{1}{\omega} \int_{\omega} f^p d\omega \leq \frac{2p}{p+1} \left(\frac{1}{\omega} \int_{\omega} f d\omega \right)^p$$

($p > 1$; f — неотрицательная непрерывная вогнутая функция, не равная тождественно нулю на ω). Заметим, что

$$\int_{\Omega} |\sigma|^m |z| d\Omega = \int_{\Omega_1} |\sigma|^m d\Omega_1,$$

где $m > 1$, $|\sigma|$ — вогнутая функция. Тогда

$$\int_{\Omega_1} |\sigma|^m d\Omega_1 \leq \frac{2m}{(m+1) \Omega_1^{m-1}} \left(\int_{\Omega_1} |\sigma| d\Omega_1 \right)^m,$$

или

$$\int_{\Omega} |\sigma|^m |z| d\Omega \leq \frac{2m}{(m+1) \Omega_1^{m-1}} \left(\int_{\Omega} |\sigma| |z| d\Omega \right)^m = C_2^{-m} M^m.$$

Следовательно,

$$C_1^{-m} M^m \leq \int_{\Omega} |\sigma|^m |z| d\Omega \leq C_2^{-m} M^m.$$

Вычислим постоянные C_1 и C_2 , считая, что балка прямоугольного профиля шириной 1, высотой h :

$$C_1^{-m} = (2/h)^{2(m-1)}, \quad C_2^{-m} = 2mC_1^{-m}/(m+1).$$

Введем

$$C^* = (C_1^{-m} + C_2^{-m})/2 = (1 + 3m) C_1^{-m}/2(m+1),$$

тогда нетрудно установить, что, например, при изменении $m = (1 \div 13)$ отношение $C^*/C_1^{-m} = (1 \div 1,43)$, а $C^*/C_2^{-m} = (1 \div 0,77)$. Итак, приближенно можно положить, что

$$(1.7) \quad \int_{\Omega} |\sigma|^m |z| d\Omega \simeq C^* M^m.$$

Учитывая (1.7), преобразуем соотношение (1.5) к виду

$$(1.8) \quad I \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M}{E} + C^* \int_0^t B(t-\tau) M^m d\tau.$$

Пусть $q(x)$ — интенсивность распределенной нагрузки, $Q(x)$ — пере-
резывающая сила в некотором сечении балки. Тогда $q(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$,

согласно теореме Журавского — Шведлера, связаны известными соотношениями. На основании чего запишем

$$(1.9) \quad d^2M/dx^2 = -q, \quad dM/dx = Q.$$

Относительно $q(x)$ отметим, что это — приходящееся на единицу длины давление, передаваемое от балки основанию. Предположим, что $q(x)$ в любой точке пропорционально прогибу балки. Обозначая через k коэффициент пропорциональности (коэффициент постели основания Винклера), первую формулу в (1.9) перепишем как

$$(1.10) \quad d^2M/dx^2 = -kv.$$

Продифференцируем это соотношение дважды, тогда

$$(1.11) \quad d^2v/dx^2 = (-1/k)d^4M/dx^4.$$

Соотношение (1.8) с учетом (1.11) приобретает вид

$$(1.12) \quad \frac{d^4M}{dx^4} + \frac{k}{EI}M + \frac{kC^*}{I} \int_0^t B(t-\tau) M^m(x, \tau) d\tau = 0.$$

Таким образом, получено приближенное интегродифференциальное уравнение для изгибающего момента в случае неустановившейся ползучести балки, лежащей на однородном основании. Следует указать, что уравнение (1.12) имеет место также для бесконечной пластинки, находящейся в условиях цилиндрического изгиба, надо только заменить EI на D — изгибную жесткость.

2. Рассмотрим случай изгиба балки толщины h , лежащей на гидравлическом основании, которое будем моделировать винклеровским основанием. Пусть плотность жидкости $\rho^* = \text{const}$, тогда $k = \rho^*g$, где g — ускорение силы тяжести. Изгиб осуществляется сосредоточенной силой G . Считаем, что для описания материала балки может быть использован закон (1.3). Тогда задача об изгибе сводится к интегродифференциальному уравнению (1.12). Запишем граничные условия задачи: затухание на бесконечности прогиба и его первой производной

$$(2.1) \quad v(\pm\infty) = 0;$$

$$(2.2) \quad v'(\pm\infty) = 0.$$

Изогнутая ось балки в точке $x = 0$ должна иметь горизонтальную касательную

$$(2.3) \quad (v')_{x=0} = 0.$$

Поперечная сила для правой части балки при $x = 0$

$$(2.4) \quad (M')_{x=0} = -G/2.$$

Начальное условие: при $t = 0$ имеем классическое упругомгновенное решение. Вследствие симметрии достаточно рассмотреть лишь часть балки справа от приложенной силы. Введем приведенное время

$$(2.5) \quad \zeta = 1 - e^{-\mu t}, \quad \zeta \in [0, 1), \quad \vartheta = 1 - e^{-\mu \tau}, \quad \vartheta \in [0, 1),$$

где параметр μ тот же, что и в соотношении (1.2), и определяется экспериментально. Учитывая (1.2) и (2.5), преобразуем (1.12):

$$(2.6) \quad \frac{d^4M}{dx^4} + \frac{k}{EI}M + \frac{kC^*}{I\mu} \left[B_\infty \int_0^\zeta \frac{M^m}{1-\vartheta} d\vartheta + B_0(1-\zeta) \int_0^\zeta \frac{M^m}{(1-\vartheta)^2} d\vartheta \right] = 0.$$

Решение уравнения (2.6) будем искать в виде ряда

$$(2.7) \quad M(x, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} M_i(x) \zeta^i.$$

Рассмотрим шесть членов разложения (2.7). Подставляя (2.7) в (2.6), совершая ряд преобразований и в итоге приравнявая выражения при одинаковых степенях ζ^i , приходим к следующей системе уравнений:

$$(2.8) \quad M_0^{IV} + J_1 M_0 = 0;$$

$$(2.9) \quad M_i^{IV} + J_1 M_i = -(J_2 F_i + J_3 T_i), \quad i = 1, \dots, 5.$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} J_1 &= k/EI, & J_2 &= kC^* B_\infty / I\mu, & J_3 &= kC^* B_0 / I\mu, \\ F_1 &= f_0, & T_1 &= f_0, \\ F_2 &= (1/2)(f_0 + f_1), & T_2 &= (1/2)f_1, \\ F_3 &= (1/3)(f_0 + f_1 + f_2), & T_3 &= (1/6)(f_1 + 2f_2), \\ F_4 &= (1/4)(f_0 + f_1 + f_2 + f_3), & T_4 &= (1/12)(f_1 + 2f_2 + 3f_3), \\ F_5 &= (1/5)(f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4), & T_5 &= (1/20)(f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} f_0 &= M_0^m, & f_1 &= M_0^m m (M_1/M_0), \\ f_2 &= M_0^m [m (M_2/M_0) + (1/2) m (m-1) (M_1/M_0)^2], \\ f_3 &= M_0^m [m (M_3/M_0) + m (m-1) (M_1/M_0) (M_2/M_0) + \\ &+ (1/6) m (m-1) (m-2) (M_1/M_0)^3], \\ f_4 &= M_0^m [m (M_4/M_0) + (1/2) m (m-1) (M_2/M_0)^2 + (1/2) m (m-1) (m-2) \times \\ &\times (M_1/M_0)^2 (M_2/M_0) + (1/24) m (m-1) (m-2) (m-3) (M_1/M_0)^4]. \end{aligned}$$

а) Нулевое приближение. При $t = 0$ получаем классическое упруго-мгновенное решение

$$(2.10) \quad \begin{aligned} M_0 &= (G/4\beta) e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x), \\ v_0 &= (-G\beta/2k) e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), & v_0' &= (G\beta^2/k) e^{-\beta x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

б) Первое приближение. Возьмем два члена разложения (2.7), тогда необходимо рассмотреть уравнения (2.8) и (2.9) при $i = 1$. Решение уравнения (2.8) найдено и представлено в форме (2.10). С учетом введенных обозначений и результатов нулевого приближения уравнение (2.9) при $i = 1$ возможно записать в виде

$$(2.11) \quad \begin{aligned} M_1^{IV} + J_1 M_1 &= J_4 e^{-\beta m x} \cos^m (\pi/4 + \beta x) \\ (J_4 &= (-kC^*/I\mu) (G/2^{3/2}\beta)^m (B_0 + B_\infty)). \end{aligned}$$

Решение однородного уравнения (2.11) таково:

$$(2.12) \quad M_1^* = e^{\beta x} (A_1 \cos \beta x + B_1 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + D_1 \sin \beta x).$$

Методом вариации постоянных найдем частное решение неоднородного уравнения (2.11). Производные искомых функций определяются из соответствующей системы уравнений, вид которой не приводим из-за ее громоздкости. Чтобы получить сами функции A_1, B_1, C_1, D_1 , необходимо рассмотреть интегралы четырех видов:

$$\begin{aligned} &\int \exp [-\beta(m+1)x] \cos \beta x \cos^m (\pi/4 + \beta x) dx = \\ &= -[\sqrt{2}\beta(m+1)]^{-1} \exp [-\beta(m+1)x] \cos^{m+1} (\pi/4 + \beta x), \\ &\int \exp [-\beta(m-1)x] \cos \beta x \cos^m (\pi/4 + \beta x) dx = \\ &= -(\sqrt{2}\beta m)^{-1} \exp [-\beta(m-1)x] \cos^{m+1} (\pi/4 + \beta x) - \\ &- m^{-1} \int \exp [-\beta(m-1)x] \sin \beta x \cos^m (\pi/4 + \beta x) dx, \\ &\int \exp [-\beta(m+1)x] \sin \beta x \cos^m (\pi/4 + \beta x) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\sqrt{2}\beta)^{-1} \exp [(m+1)\pi/4] [(m+1)^{-1} \exp [-(m+1)y] \cos^{m+1}y + \\
&\quad + 2 \int (\exp (-y) \cos y)^{m+1} dy], \\
&\quad \int \exp [-\beta(m-1)x] \sin \beta x \cos^m(\pi/4 + \beta x) dx = \\
&= -(\sqrt{2}\beta)^{-1} \exp [(m-1)\pi/4] [(m+1)^{-1} \exp [-(m-1)y] \cos^{m+1}y + \\
&\quad + 2m(m+1)^{-1} \int \exp [-(m-1)y] \cos^{m+1}y dy].
\end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $y = \pi/4 + \beta x$. Воспользуемся рекуррентной формулой [3], тогда

$$\begin{aligned}
&\int \exp [-(m-1)y] \cos^{m+1}y dy = [2(m^2+1)]^{-1} \{ \exp [-(m-1)y] \cos^m y \times \\
&\times [-(m-1) \cos y + (m+1) \sin y] + m(m+1) \int \exp (-y) \cos y \}^{m-1} dy.
\end{aligned}$$

Таким образом, все интегралы сводятся к вычислению одного единственного интеграла вида $\int \exp (-y) \cos y \}^\gamma dy$, где $\gamma = \{(m+1), (m-1); m > 1\}$. Учитывая все сказанное, общее решение уравнения (2.11) запишем как

$$\begin{aligned}
(2.13) \quad M_1 = M_1^* + J_5 \{ e^{-my} \cos^{m+2}y + (m+1) e^y \sin y \int (e^{-y} \cos y)^{m+1} dy + \\
+ e^{-y} (m \cos y + \sin y) \int e^{-(m-1)y} \cos^{m+1}y dy \} \quad (J_5 = J_4 \exp (\pi m/4) \times \\
\times [4\beta^4 (m+1)]^{-1}).
\end{aligned}$$

Воспользовавшись связью (1.10), найдем

$$\begin{aligned}
(2.14) \quad v_1 = -k^{-1} d^2 M_1 / dx^2 = -2\beta^2 k^{-1} \{ \exp (\beta x) (B_1 \cos \beta x - \\
- A_1 \sin \beta x) + \exp (-\beta x) (C_1 \sin \beta x - D_1 \cos \beta x) \} - 2J_5 \beta^2 k^{-1} \times \\
\times \{ \exp (-my) \cos^{m+2}y + (m+1) \exp (y) \cos y \int \exp (-y) \cos y \}^{m+1} dy + \\
+ \exp (-y) (m \sin y - \cos y) \int \exp [-(m-1)y] \cos^{m+1}y dy \}.
\end{aligned}$$

Нетрудно записать соотношение для производной от v_1 :

$$\begin{aligned}
(2.15) \quad v_1' = -2\beta^3 k^{-1} \{ \exp (\beta x) [(B_1 - A_1) \cos \beta x - (A_1 + B_1) \sin \beta x] + \\
+ \exp (-\beta x) [(D_1 + C_1) \cos \beta x - (C_1 - D_1) \sin \beta x] \} - 2J_5 \beta^3 k^{-1} \times \\
\times \{ -2 \exp (-my) \cos^{m+1}y \sin y + (m+1) \exp (y) (\cos y - \sin y) \times \\
\times \int \exp (-y) \cos y \}^{m+1} dy + \exp (-y) [(m+1) \cos y - (m-1) \sin y] \times \\
\times \int \exp [-(m-1)y] \cos^{m+1}y dy \}.
\end{aligned}$$

Используя граничные условия (2.1) и (2.2), получаем

$$A_1 = B_1 = 0.$$

Условие (2.3) дает возможность определить постоянную C_1 :

$$\begin{aligned}
(2.16) \quad C_1 = -D_1 + \sqrt{2} J_5 \{ (\sqrt{2})^{-(m+1)} \exp (-\pi m/4) - \exp (-\pi/4) \times \\
\times \int \exp [-(m-1)y] \cos^{m+1}y dy \}_{y=\pi/4}.
\end{aligned}$$

При помощи (2.4) найдем постоянную D_1 :

$$\begin{aligned}
(2.17) \quad D_1 = -G/(4\beta) + J_5 (\sqrt{2})^{-1} \{ (\sqrt{2})^{-(m+1)} \exp (-\pi m/4) - \\
- [(m+1) \exp (\pi/4) \int \exp (-y) \cos y \}^{m+1} dy - (m-1) \exp (-\pi/4) \times \\
\times \int \exp [-(m-1)y] \cos^{m+1}y dy \}_{y=\pi/4}.
\end{aligned}$$

Таким образом, аналитически получено первое приближение задачи

$$M = M_0 + \tilde{M}_1 \zeta, \quad v = v_0 + v_1 \zeta, \quad v' = v_0' + v_1' \zeta,$$

где M_0 , v_0 и v'_0 определяются соотношениями (2.10), M_1 — (2.12) и (2.13), v_1 — (2.14) и v'_1 — (2.15); ζ связано с t зависимостью (2.5); постоянные C_1 и D_1 даются формулами (2.16) и (2.17) соответственно.

в) Последующие приближения. Второе и далее (включая пятое) приближения задачи искались численно. Подробно записывались правые части уравнений (2.9) при $i = 2, \dots, 5$. Система основных уравнений и граничные условия преобразовывались к виду, удобному для программирования. Получилась стандартная система, возникающая при аппроксимации краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Для ее решения был использован метод исключения Гаусса, на основании которого записан алгоритм, носящий название алгоритма монотонной прогонки [4]. На языке ФОРТРАН составлена программа для ЭВМ, которая служит для вычисления интересующих нас значений M_i и v_i .

г) Предельные решения. Рассмотрим вопрос о том, как ведет себя решение уравнения (1.12) для изгибающего момента при $t \rightarrow \infty$.

1) Пусть в (1.2) постоянная $B_\infty = 0$, но $B_0 \neq 0$. Тогда можно допустить, что

$$(2.18) \quad M(x, t) \rightarrow M_\infty(x), \quad t \rightarrow \infty.$$

С учетом (2.18) из (1.12) имеем

$$M_\infty^{IV} + (k/EI)M_\infty + (kC^*B_0/I)M_\infty^m \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} d\tau = 0.$$

Вычисляя интеграл и устремляя затем t к бесконечности, определим, что функция $M_\infty(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(2.19) \quad M_\infty^{IV} + (k/EI)M_\infty + (kC^*B_0/I\mu)M_\infty^m = 0.$$

2) Пусть в (1.2) постоянная $B_0 = 0$, но $B_\infty \neq 0$. Продифференцируем уравнение (1.12) один раз по t :

$$(2.20) \quad \dot{M}^{IV} + (k/EI)\dot{M} + (kC^*B_\infty/I)M^m = 0.$$

Будем искать при $t \rightarrow \infty$ решение этого уравнения в форме

$$(2.21) \quad M(x, t) \sim M_\infty(x)t^{-(m-1)^{-1}}, \quad m > 1.$$

Подставляя (2.21) в (2.20), найдем, что в данном случае функция $M_\infty(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(2.22) \quad M_\infty^{IV} + (k/EI)M_\infty - (kC^*B_\infty/I)(m-1)M_\infty^m = 0.$$

Для решения уравнений (2.19) и (2.22) нужно их соответственно дополнить соотношением (1.10) и граничными условиями (2.1)–(2.4). Затем можно применить метод специальных ортонормированных полиномов, существо которого кратко изложено в [5].

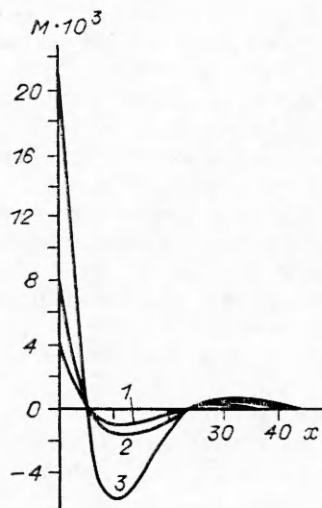
3) Пусть в (1.2) обе постоянные B_0 и B_∞ не равны нулю. Введем обозначения: $A = k/EI$, $B = kC^*B_\infty/I$, $C = kC^*B_0/I$ и перепишем уравнение (1.12) в форме

$$(2.23) \quad M^{IV} + AM + \int_0^t [B + Ce^{-\mu(t-\tau)}] M^m d\tau = 0.$$

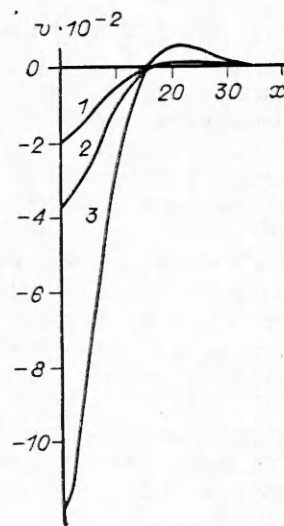
Далее, дифференцируя (2.23) один и два раза по t и исключая из полученных соотношений и уравнения (2.23) интегралы, придем к следующему дифференциальному уравнению:

$$(2.24) \quad \ddot{M}^{IV} + A\ddot{M} + (B+C)mM^{m-1}\dot{M} + \mu(\dot{M}^{IV} + A\dot{M} + BM^m) = 0.$$

Если теперь допустить, что при $t \rightarrow \infty$ для $M(x, t)$ имеет место соотношение (2.18), то из (2.24) найдем $M_\infty(x) \equiv 0$. Следовательно, нужно до-



Р и с. 1



Р и с. 2

пусть, что при $t \rightarrow \infty$ функция $M(x, t)$, являющаяся решением уравнения (2.24), стремится к нулю. Решение уравнения (2.24) при больших t можно, например, искать в виде ряда

$$(2.25) \quad M(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i(x) e^{-ivt},$$

если m — целое число (v — произвольная постоянная). Подставляя (2.25) в (2.24) и приравнявая члены при одинаковых степенях $\exp(-ivt)$, получим для определения функций $M_i(x)$ бесконечную систему последовательно решаемых линейных дифференциальных уравнений.

д) Пример. Для иллюстрации рассмотренной выше задачи приведем численный пример. Экспериментальные значения возьмем из [1]. В программу вводятся исходные данные: $t = (0 \div 15)$ с; $E = 4 \times 10^9$ кг/м \cdot с 2 ; $G = 2500$ кГ; ($B_0 = 84 \cdot 10^{-8}$, $B_{\infty} = 5,6 \cdot 10^{-8}$) (кг/м \cdot с 2) $^{-m}$ с $^{-1}$; $\mu = 3 \cdot 10^{-2}$ с $^{-1}$; $m = 1,72$; $h = 0,25$ м; $\rho^* = 10^3$ кг/м 3 ; $g = 9,81$ м/с 2 .

На рис. 1 и 2 приведены кривые приближений для изгибающего момента M и приближений для прогиба v в зависимости от изменения координаты x при фиксированном значении $t = 15$ с. Кривые 1 соответствуют нулевому приближению задачи (классическое упругомгновенное решение), 2 — первое приближение задачи. Эти кривые рассчитаны по формулам, полученным аналитическим путем (пункты а) и б)). Численно установлено, что для времени $t = 15$ с достаточно учесть пять приближений задачи (кривые 3). При увеличении времени следует удерживать больше членов разложения ряда (2.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова.— Л.: Гидрометеопздат, 1967.
2. Беккенбах Э. Ф., Беллман Р. Неравенства.— М.: Мир, 1965.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных.— М.: Наука, 1971.
4. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.
5. Александров В. М., Арутюнян Н. Х., Шматкова А. А. Ползучесть и прочность ледяного покрова при воздействии на него нагрузок и штампов // Электрофизические и физико-механические свойства льда.— Л.: Гидрометеопздат, 1989.

г. Москва

Поступила 31/X 1988 г.,
в окончательном варианте — 28/III 1989 г.