

**ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПУЧКОВ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ***И. М. Блейвас, В. П. Ильин, В. М. Свейников**(Новосибирск)*

Рассматриваются алгоритмы решения нестационарных задач электроники, которые сводятся к расчету электромагнитных полей и численному интегрированию уравнений движения заряженных частиц. Предполагается, что в каждый момент времени распределение потенциала описывается уравнением Пуассона. Расчет полей проводится разностными методами. Для моделирования пространственного заряда описывается модифицированный метод «больших частиц».

Приводится описание компилирующей системы КСИ — БЭСМ как средства автоматизации процесса решения данных задач. Даны примеры решения задач.

1. При создании различных электровакуумных приборов, ускорителей заряженных частиц и других электрофизических установок существенными являются вопросы формирования интенсивных потоков с заданными свойствами в сложных электромагнитных полях (см., например, [1] и цитируемую там литературу).

В последние годы наметился существенный прогресс в разработке алгоритмов расчета электромагнитных полей, удовлетворяющих уравнениям Лапласа или Пуассона, в вычислении траекторий заряженных частиц с учетом пространственного заряда, а также в создании программ для расчета на ЭВМ сложных электронно-оптических систем [2-16].

При этом вычисления сводятся к решению самосогласованной задачи, включающей в себя расчет полей, проводимый чаще всего разностными методами (применяется и метод интегральных уравнений [11, 12]), а также численное интегрирование уравнений движения заряженных частиц в электромагнитном поле.

Для моделирования пространственного заряда используется метод «больших частиц» (см. [7, 14]), который для стационарных задач сводится к более экономичному алгоритму «трубок тока», или «нитей», детальное описание которого, например, дано в [2-8, 15, 16].

Эффективность расчетов практических задач сильно зависит от степени автоматизации процесса решения, включающего в себя подготовку исходной информации, выбор экономичных алгоритмов и вывод результатов в удобной для обработки форме. Некоторые из этих вопросов рассматривались в [6, 8-10].

В [16] дано описание компилирующей системы КСИ — БЭСМ для решения широкого круга статических задач электронной оптики: расчет пучков частиц различных зарядов и масс ведется в двумерных или трехмерных областях практически произвольной формы, в том числе при наличии сред с различными диэлектрическими свойствами, допускается учет энергетического и углового распределения частиц, вторичной эмиссии, учитываются внешнее неоднородное магнитное поле, релятивистские эффекты и т. п. Такая общая постановка включает в себя различные физико-технические приложения, например расчеты изоляционных конструкций, ускорителей частиц, электронных ламп и пушек, электронно-оптических преобразователей, приборов СВЧ электроники и т. д.

Данная работа содержит описание алгоритмов решения соответствующих нестационарных задач и средств автоматизации их расчетов в составе компилирующей системы КСИ — БЭСМ.

2. При решении нестационарных задач сделаем следующие допущения: а) частота и амплитуда переменных напряжений на электродах не зависят от пространственного заряда частиц, б) токи смещения пренебрежимо малы по сравнению с токами проводимости, в) «собственное» магнитное поле, создаваемое пучком частиц, пренебрежимо мало.

В этом случае потенциал электрического поля φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$(2.1) \quad \Delta\varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$$

где ρ — плотность объемного заряда, t — время, а \mathbf{r} — радиус-вектор точки.

Движение отдельной частицы с массой M_i и зарядом Z_i описывается уравнением (рассматривается нерелятивистский случай)

$$(2.2) \quad \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{Z_i}{M_i} \left(-\nabla\varphi(\mathbf{r}_i, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i, t)] \right)$$

где \mathbf{r}_i — координата частицы, $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$, c — скорость света, а \mathbf{B} — индукция «внешнего» магнитного поля. В начальный момент времени все элементарные частицы одного заряда и массы, находящиеся в объеме $\Delta\mathbf{r}$ и имеющие скорость в интервале Δv , объединяются в одну группу, или «большую» частицу. Ее движение описывается уравнением вида (2.2), где \mathbf{r}_i — координата центра масс, а \mathbf{v}_i — средняя скорость всех элементарных частиц из одной группы.

Если расчетную область G разбить на подобласти G_p с границами S_p и проинтегрировать (2.1) по каждой из G_p , то после применения формул Грина получим для всех p

$$(2.3) \quad \int_{S_p} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} dS = -4\pi \int_{G_p} \rho d\mathbf{r} = -4\pi q_p$$

В дальнейшем построение численных методов будем проводить не для уравнения (2.1), а для эквивалентной ему системы (2.3).

При этом

$$(2.4) \quad q_p = \sum_i q_{ip}$$

где q_{ip} — величина заряда i -й большой частицы, относящаяся к объему G_p (суммирование ведется по всем частицам).

Для потенциалов рассматриваются граничные условия следующих видов:

$$(2.5) \quad \varphi|_{\Gamma_1} = g(\mathbf{r}, t)$$

$$(2.6) \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0$$

$$(2.7) \quad \lambda_+ \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\Gamma_3^+} = \lambda_- \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\Gamma_3^-}$$

Здесь Γ_1 — часть границы Γ с заданными значениями потенциала (как правило, поверхности металлических электродов), Γ_2 — поверхности или линии симметрии, Γ_3 — границы раздела сред с различными диэлектрическими постоянными.

При наличии эмиттирующих граничных поверхностей помимо начальных данных для больших частиц, находящихся в момент $t = 0$ в расчетной области

$$(2.8) \quad \mathbf{r}_i|_{t=0} = \mathbf{r}_{i0}, \quad \mathbf{V}_i|_{t=0} = \mathbf{V}_{i0}$$

необходимо задавать также начальные координаты, скорости и величины зарядов больших частиц, входящих в область в последующие временные интервалы. Если на эмиттере плотность тока есть $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$, то с элементарной площадки ΔS_k через интервал времени Δt будем «запускать» частицы с зарядом

$$(2.9) \quad q_k = \frac{i}{|\Delta \mathbf{V}|} \int_{\Delta S_k} \int_{\Delta \mathbf{V}} \int_{\Delta t} \mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) dt d\mathbf{V} dS$$

где \mathbf{V} — скорость влетающих элементарных частиц из соответствующего интервала $\Delta \mathbf{V}$. Плотность тока \mathbf{j} предполагается заданной функцией $\mathbf{r}, \mathbf{V}, t$. К отдельному типу относятся задачи с ограничением тока пространственным зарядом, когда при нулевых начальных скоростях частиц плотность тока на эмиттере с потенциалом $\varphi = 0$ определяется выражением

$$(2.10) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = c_1 \varphi^{3/2}(\mathbf{r} + d\mathbf{n}, t) d^{-2}$$

где c_1 — известная константа, а d — настолько малая величина, что на расстоянии d от эмиттера эквипотенциальные линии можно считать «почти» параллельными его поверхности, и на этом промежутке решение предполагается удовлетворяющим закону «трех вторых» (2.10).

В рассмотрение включены задачи со вторичной эмиссией, когда на некоторых поверхностях задается плотность тока как функция величины тока и скорости падающих «первичных» частиц, а также свойств материала электрода.

Рассмотрим решение нестационарной задачи. Для начального момента времени находим распределение потенциала со значениями плотности и граничными условиями при $t = T_0 = 0$. Затем в поле $\varphi(\mathbf{r}, 0)$, $\mathbf{V}(\mathbf{r}, 0)$ рассчитываем траектории частиц до момента $T_1 > T_0$ и вносимый ими объемный заряд. Далее при найденном распределении зарядов и граничных условиях в момент $t = T_1$ вычисляется $\varphi(\mathbf{r}, T_1)$, рассчитываются траектории частиц до момента T_2 и т. д. Процесс продолжается до заданного значения $t = T$. Во время расчета очередного интервала $\Delta T_v = T_{v+1} - T_v$ в качестве начальных данных берутся параметры всех частиц, рассчитанных ранее на $t = T_v$, а также тех, которые в этот момент входят в расчетную область. Если частица вылетает за границу области, то она исключается из дальнейшего рассмотрения. Погрешность такого представления нестационарного процесса есть величина порядка $o(\Delta T)$. Если ΔT_v велико относительно характерного времени изменения параметров задачи, то на каждом шаге T можно проводить итерации по объемному заряду, повторяя несколько раз расчет траекторий и поля.

Расчет поля потенциалов проводим разностными методами на прямоугольной (в трехмерном случае — параллелепипедаоидальной) сетке с кусочно-постоянными шагами. Уравнение Пуассона с граничными условиями (2.5) — (2.7) аппроксимируется пятиточечными (семиточечными для трехмерных задач) разностными уравнениями, подробно описанными в [16, 17] и имеющими в общем случае погрешность решения $o(h)$ (h — максимальный шаг сетки). Если в области отсутствуют внутренние границы, т. е. среда однородная, а условия Неймана заданы только на границах, параллельных координатным линиям, то ошибка есть $o(h^2)$. Разностные

уравнения Пуассона эквивалентны аппроксимации уравнений (2.3), причем в качестве G_k берется ячейка разностной сетки. В примере на фиг. 1 это область

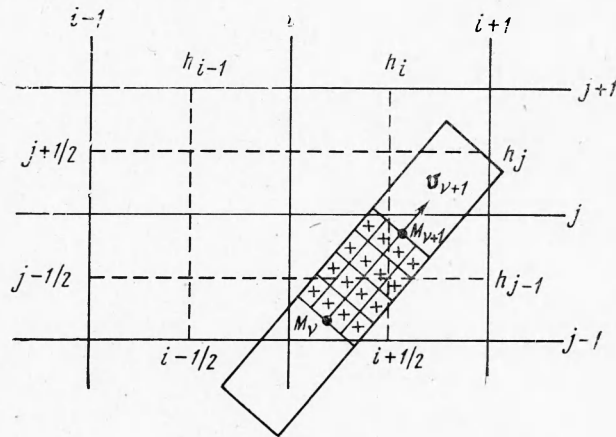
$$\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \leq x \leq \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad \frac{1}{2}(y_j + y_{j-1}) \leq y \leq \frac{1}{2}(y_j + y_{j+1})$$

причем уравнение имеет вид

$$(2.11) \quad (\Delta U)_{ij} = \frac{h_j + h_{j-1}}{2h_{i-1}} U_{i-1j} + \frac{h_i + h_{i-1}}{2h_{j-1}} U_{ij-1} + \frac{h_j + h_{j-1}}{2h_i} U_{i+1j} + \\ + \frac{h_i + h_{i-1}}{2h_j} U_{ij+1} - \left(\frac{1}{h_i + h_{i-1}} + \frac{1}{h_j h_{j-1}} \right) \times \\ \times \frac{(h_j + h_{j-1})(h_i + h_{i-1})}{4} U_{ij} = -f_{ij} = -4\pi q_{ij}$$

Решение разностных уравнений проводим каким-либо итерационным методом, который можно представить в форме универсального алгоритма

$$(2.12) \quad U^{n+1} = U^n + H_n (\Delta U^n - f)$$



Фиг. 1

Матрица H_n определяет конкретный алгоритм и, например, для явного метода Писмана — Ракфорда имеет вид

$$(2.13) \quad H_n = \frac{2}{\tau} (E - \tau \Lambda_2)^{-1} (E - \tau \Lambda_1)^{-1}$$

где τ — итерационный параметр, а Λ_1, Λ_2 — нижняя и верхняя треугольные матрицы, $\Lambda_1 + \Lambda_2 = \Lambda$. Подробнее о применяемых итерационных методах см. в [16, 17].

Наиболее эффективным алгоритмом решения разностных уравнений, по-видимому, является метод с использованием последовательности сеток (см. [17] и цитируемые там работы), реализованный в КСИ — БЭСМ для двумерных задач с произвольной формой границы и краевых условий.

Численное интегрирование уравнений движения проводим, как и в [14], по устойчивой схеме с погрешностью второго порядка. В используемом алгоритме вычисление правой части на каждом шаге проводится один раз, а не два, как в [14]

$$(2.14) \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \beta \Delta t_n \left\{ -\nabla \varphi \left(\mathbf{r}_n + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{v}_n \right) + \left[\frac{\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n}{2c} \mathbf{B} \left(\mathbf{r}_n + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{v}_n \right) \right] \right\}$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t_n \frac{\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n}{2}$$

Здесь индексы i для краткости опущены, $\beta = Z/M$, Δt_n — шаг интегрирования ($\Delta t_n \ll \Delta T_n$). Градиенты потенциала вычисляются по результатам численного решения уравнения Пуассона в узлах сетки. Функция $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ предполагается заданной. Отдельный случай составляет класс задач, когда значения магнитной индукции задаются на оси или плоскости симметрии, а в остальных точках области рассчитываются по формулам аналитического продолжения.

Рассмотрим подробнее алгоритм расчета объемных зарядов. Пусть с площадки ΔS эмиттирующей поверхности из некоторой ее «серединной» точки M_0 в момент T_0 вылетает со скоростью \mathbf{v}_0 элементарная частица и за время $\Delta T_1 = T_1 - T_0$ долетает до точки M_1 со скоростью \mathbf{v}_1 . Считаем, что в момент T_1 заряд всех частиц из скоростной группы со средней начальной скоростью \mathbf{v}_0 , вылетевших за время ΔT_1 , находится в прямом цилиндре с объемом $\Delta S M_0 M_1$. Величина этого заряда равна $\Delta T_1 I$, где I — средняя за время ΔT_1 величина тока, проходящего за единицу времени через площадку ΔS (если известна «парциальная» плотность тока $j(M_0, \mathbf{v}_0, T_0)$, соответствующая элементарным частицам в группе со средней скоростью \mathbf{v}_0 , то можно положить $I = j(M_0, \mathbf{v}_0, T_0) \Delta S$). Заряд $\Delta T_1 I$ распределяем по ячейкам G_k разностной сетки, пересекающим объем $\Delta S M_0 M_1$. В предположении, что величина j в нем постоянна. Для этого делим основание цилиндра ΔS на N_1 равных площадок, а отрезок $M_0 M_1$ — на N_2 таких интервалов, которые в предположении постоянного ускорения $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) / \Delta T_1$ частица пролетает за равные промежутки времени $\Delta T_1 / N_2$. Таким образом получаем $N_1 N_2$ объемов, содержащих равные заряды $\Delta T_1 I / N_1 N_2$, каждый из которых относим к той разностной ячейке, в которой лежит соответствующий центр объема. Аналогично поступаем и далее. Например, в момент T_2 рассматриваемый ранее заряд $\Delta T_1 I$ распределяем по объему цилиндра с центрами оснований M_2 и M_{01} , где M_2 и M_{01} — положение в момент T_2 частиц, вышедших при $t = T_1$ соответственно из точек M_1 и M_0 .

Если в начальный момент времени в расчетной области уже находятся объемные заряды, то большие частицы задаются как прямые цилиндры с образующими, параллельными соответствующим средним скоростям элементарных частиц. На фиг. 1 для двумерного случая схематически изображено разбиение зарядов между сечениями с точками M_n и M_{n+1} .

Если задача стационарная, т. е. граничные и начальные условия не зависят от времени, то описанный процесс может рассматриваться как проведение последовательных приближений к решению. В частности, тогда можно положить $\Delta T = \infty$, т. е. траектории всех частиц рассчитывать до вылета их из области и заряд считать распределенным по токовым трубкам («нитям»), формы которых описываются траекториями соответствующих частиц. Для стационарных задач актуальным является выбор метода итераций по объемному заряду (см., например, [16]).

3. Рассмотрим некоторые особенности компилирующей системы КСИ — БЭСМ для расчета нестационарных пучков. Основными частями КСИ — БЭСМ являются: языковые средства для описания исходной информации и алгоритмов, библиотека программ (модулей систем) и управляющий комплекс.

Эффективным средством автоматизации постановки исходных данных является язык ПГ описания двумерных краевых задач [18], позволяющий оперативно и в наглядной форме задавать конфигурацию многоэлектродных приборов. Транслятор с языка ПГ, включенный в состав КСИ — БЭСМ, проводит контроль правильности входной информации с указанием имеющихся ошибок.

Библиотека модулей КСИ — БЭСМ содержит набор программ, написанных в машинных кодах БЭСМ-6, и каталог с информацией о расположении и входных параметрах всех модулей. В библиотеке имеется развернутый набор программ алгоритмического и сервисного характера. Алгоритмические модули могут отличаться по своим функциям, по виду применяемого метода, а также зависеть от типа конкретной задачи. Например, в библиотеке имеется набор различных итерационных алгоритмов для решения разностных уравнений Пуассона (поточечная и блочная верхняя релаксация, продольно-поперечные прогонки, попеременно-треугольные методы и др.), отличающихся требованиями к памяти и скорости сходимости для разных задач. В виде самостоятельных модулей оформлены их варианты для двумерных и трехмерных случаев, а также в зависимости от наличия или отсутствия объемных зарядов (т. е. уравнение Лапласа или Пуассона). Аналогично для другой трудоемкой части задачи — расчета траекторий — алгоритмы численного интегрирования уравнений движения частиц реализованы отдельными модулями в зависимости от размерности задачи, наличия магнитного поля, релятивистских эффектов и т. д.

Сервисная часть библиотеки помимо контроля исходной информации обеспечивает вывод результатов в наглядной форме (значения потенциалов, напряженностей, токов и т. д., эквипотенциальные линии и траектории, в том числе с выводом на график).

Организация работы компилирующей системы обеспечивается с помощью языка модульного программирования КСИ [19], который содержит операторы обращения к модулям, обмена информацией с внешними устройствами ЭВМ, формирования библиотеки и архива, а также операторы арифметических действий, передачи управления и т. д. Программа на языке КСИ для решения конкретной задачи преобразуется компилятором в управляющую программу, которая затем непосредственно осуществляет расчет.

Средства КСИ — БЭСМ позволяют проводить вычисления поэтапно с записью в архив промежуточных результатов, а также расчеты серии вариантов задач.

Библиотека КСИ — БЭСМ со своим каталогом, транслятор ПГ, программа-компилятор и архив системы размещаются на одной магнитной ленте. Каждый отдельный модуль системы использует только оперативную память БЭСМ-6, а обращение к магнитным барабанам и лентам в случае надобности делается при смене модулей или по окончании счета.

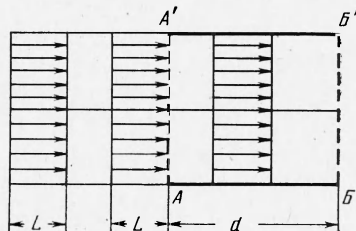
Разностные алгоритмы допускают решения уравнения Пуассона на прямоугольной сетке с кусочно-постоянными шагами и количеством узлов до 10 000 в двумерном и 7000 в трехмерном случаях. Для двумерного случая независимо от типа краевой задачи возможно использование последовательности нескольких вспомогательных, более редких сеток.

В расчетной области может быть задано различное количество эмиттирующих поверхностей, в том числе испускающих «вторичные» частицы. Частицы могут быть разбиты на произвольное число энергетических или угловых групп по задаваемому пользователем распределению. Значения координат и скоростей частиц при решении нестационарной задачи хранятся или в оперативной памяти, или на магнитном барабане. Максималь-

но допустимое число частиц, находящихся в расчетной области, ~ 7500 в двумерном случае и 5000 в трехмерном случае.

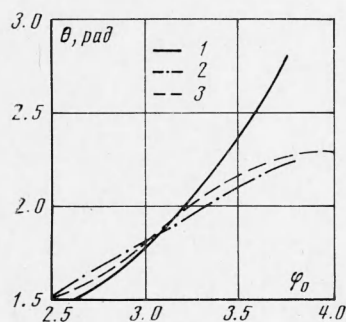
4. Приведем примеры расчета нестационарных пучков в электромагнитных полях.

Решалась задача о взаимодействии сгруппированного электронного потока с высокочастотным полем плоского диода в режиме больших амплитуд. Схематическое изображение исследуемого зазора и пучков частиц приведено на фиг. 2. Задача заключается в расчете движения монохроматического пучка длиной L , влетающего в зазор с равномерной плотностью через прозрачную для электронов плоскость AA' с потенциалом U_0 . На выходной плоскости BB' зазора задается переменное ускоряющее напряжение $\varphi = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, где φ_0 — начальная фаза сгустка в зазоре $\omega = 2\pi\nu_0/5L$, ν_0 — скорость электронов на входе в зазор. На плоскостях AB и $A'B'$ задается условие $\partial\varphi/\partial n = 0$. Расчеты проводились при значении первенства сгустка $p = I/U_0^{3/2} \approx 5 \cdot 10^{-6} a/b^{3/2}$ (I — ток пучка), начальной фазе $\varphi_0 = 150^\circ$ и статистическом угле полета $\theta_0 = \omega d/v_0 = \pi/2$, где d — ширина зазора.

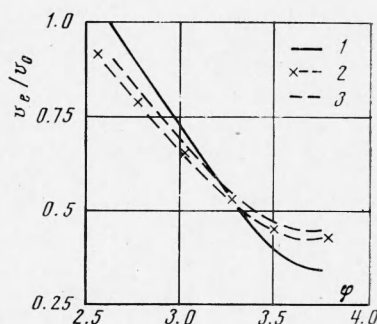


Фиг. 2

Сгусток моделировался двадцатью «большими» частицами, впускаемыми в зазор через равные интервалы $\Delta T = L/20\nu_0$. Поле рассчитывалось в узлах равномерной сетки с числом интервалов по ширине зазора $l = 40$. Расчеты велись до момента времени $T = 100 \Delta T$.



Фиг. 3

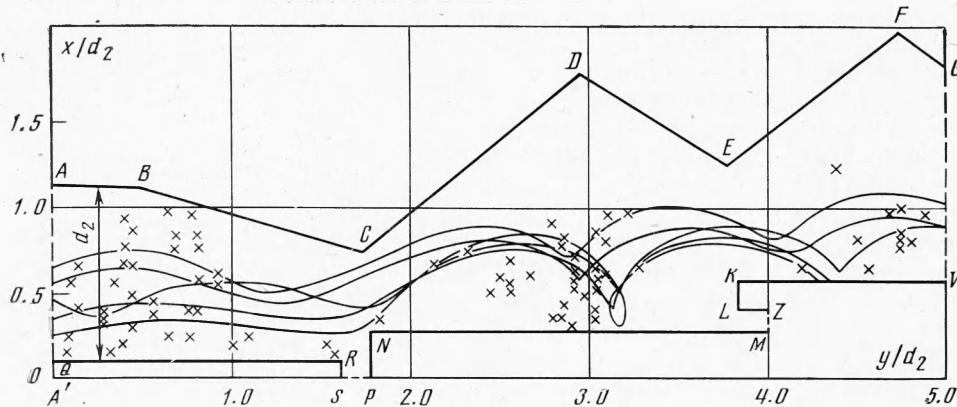


Фиг. 4

На фиг. 3 и 4 показаны соответственно кривые зависимости угла пролета $\theta = \omega(T_l - T_0)$ и отношение v_l/v_0 от угла влета электронов $\varphi + \omega T_0 + \varphi_0$ при величине амплитуды СВЧ колебаний $\xi = U_m/U_0 = 1.0$, где T_0 — время влета электронов в систему со скоростью v_0 ; T_l , v_l — соответственно время и скорость на выходе из системы. Результаты расчетов, полученные с помощью КСИ — БЭСМ в кинематическом приближении (кривые 2 на фиг. 3, 4), практически совпали с соответствующими теоретическими данными (кривые 3 на фиг. 3 и 4), приведенными в [20]. Кривые с номером 1 на фиг. 3 и 4 соответствуют расчету с учетом объемного заряда. Как видно из графиков, пространственный заряд приводит к ускорению электронов передней части сгустка и торможению электронов конца сгустка (их угол пролета увеличивается).

Проводилось исследование процесса формирования электронного потока в электронно-оптической системе (ЭОС) с торможением.

Геометрия системы и потенциалы на ее электродах показаны на фиг. 5. На поверхностях, обозначенных пунктирными линиями, задано условие $\partial\varphi/\partial n = 0$, на ломанной $ABCDEF G$ — $\varphi = U_a$, на $VKLZ$ — $\varphi = U_{k2}$, на MNP — $\varphi = U_{k1}$, на SPQ — $\varphi = U_{xk}$. Магнитное поле H_0 однородное и направлено перпендикулярно плоскости чертежа.



Фиг. 5

Через входную плоскость системы AA' периодически вводились идентичные электронные сгустки, представленные в виде совокупности больших частиц. Частицы каждого сгустка вводились в исследуемую область через одинаковые промежутки времени $\Delta T = T_0 / N$, где T_0 — время пролета одного сгустка через AA' . Начальные значения координат и скоростей частиц в плоскости AA' , а также величины их зарядов в каждый момент времени задавались по результатам расчетов предыдущей части ЭОС. Вычисления проводились для следующих значений параметров:

$$U_a / H_0^2 d_2^2 = 0.39 \text{ в/э} \cdot \text{см}^3, \quad U_{xk} = -0.075 U_a, \quad U_{k1} = 0 \\ U_{k2} = 0.15 U_a, \quad N = 24$$

Расчетная область покрывалась прямоугольной конечно-разностной сеткой с общим числом узловых точек ~ 2000 . На фиг. 5 приведены траектории электронов, влетающих в область в момент времени $T = 14 \Delta T$, вычисленные в кинематическом приближении. На той же фигуре показана картина распределения больших частиц, обозначенных крестиками, в момент времени $70 \Delta T$. Учет пространственного заряда сгустка приводит к тому, что часть частиц в пределах первой секции ЭОС оседает на холодный катод.

Поступила 15 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Курштейн П. Т., Кайно Г. С., Уотерс У. Е. Формирование электронных пучков. М., «Мир», 1970.
2. Harker K. J. Electrode design for axially symmetric electron guns. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No. 5, pp. 1861—1863.
3. Vineman O., Kooyers G. Computer simulation of the electron mixing mechanism in ion propulsion. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 11, pp. 2525—2528.
4. Масленников М. В., Сигов Ю. С. Дискретная модель вещества в задаче об обтекании тел разреженной плазмой. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 5, стр. 1013—1015.

5. Ломнев С. П. Расчет и исследование электрофизических установок и электрофизических явлений на цифровых вычислительных машинах. М., ВЦ АН СССР, 1965.
6. Boers J. E. Digital computer analysis of axially symmetric electron guns. IEEE Trans. On electron devices, 1965, vol. ED — 12, No. 7.
7. Енальский В. А. О движении частиц в электромагнитном поле. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1966, т. 74, стр. 93—106.
8. Ильин В. П. О численном решении некоторых двумерных задач электронно-ионной оптики. Сб. «Численные методы расчета электронно-оптических систем». Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1967, тр. 58—74.
9. Kulsrud E. A. A programming system for electron optical simulation. RCA Rev., 1967, vol. 28, No. 2, pp. 351—365.
10. Куцевская Т. П., Местечкин Я. И., Шубин Л. В. Решение на ЭЦВМ задачи об электростатическом поле и траекториях заряженных частиц в аксиально-симметричных системах с учетом пространственного заряда. Труды конференций по электронной технике. Электронные пучки и электронно-оптические системы. М., Ин-т «Электроника», 1968.
11. Батуев Ю. И., Пензяков В. В. Расчет электронных пушек на электронных цифровых машинах. Труды конференций по электронной технике. Электронные пучки и электронно-оптические системы, вып. 1, стр. 43—50. М., Ин-т «Электроника», 1968.
12. Молоковский С. И., Трезубов В. Ф. Расчет траекторий интенсивных ленточных электронных потоков, фокусируемых электростатическими полями. Изв. вузов, Радиоэлектроника, 1969, т. 12, № 9, стр. 1063.
13. Канарева Н. П., Ривкин В. Я., Самокиш Б. А. Расчет электронно-оптических систем прожекторного типа. Оптико-механ. пром-сть, 1969, № 10, стр. 26—28.
14. Захаров А. В., Самарский А. А., Свешников А. Г. Применение метода больших частиц к расчету движения заряженного пучка в электромагнитном поле с учетом пространственного заряда пучка. В сб. «Вычислительные методы и программирование», т. 16. М., Изд. МГУ, 1971, стр. 225—243.
15. Волков Б. И., Ефимов В. В., Свешников А. Г., Семашко Н. Н. Расчет движения пучка заряженных частиц в электростатическом поле с учетом пространственного заряда. В сб. «Вычислительные методы и программирование», т. 16. М., Изд. МГУ, 1971, стр. 244—263.
16. Блейвас И. М., Голубцов Б. И., Ильин В. П., Попова Г. С., Свешников В. М. Комплекс программ для решения на БЭСМ-6 широкого класса задач статической электроники (компилирующая система КСИ — БЭСМ). Сб. «Методы расчета электронно-оптических систем», ч. 2. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973, стр. 3—20.
17. Ильин В. П. Разностные методы решения эллиптических уравнений. Новосибирск, Изд. Новосибирск. ун-та, 1970.
18. Ильин В. П., Поляков Г. Г. Язык описания краевых задач для двумерных областей. Сб. «Методы расчета электронно-оптических систем», ч. 2. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973, стр. 68—75.
19. Свешников В. М. Структура компилирующей системы КСИ — БЭСМ для решения задач электронной оптики. Сб. «Методы расчета электронно-оптических систем», ч. 2. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973, стр. 59—67.
20. Акментынш Я. Я., Блейвас И. М., Геккер И. Р. Интегральное распределение электронов по энергиям за выходным резонатором пролетного клистрона (статический угол пролета в зазоре отличен от нуля). Радиотехника и электроника, 1959, т. 4, вып. 12, стр. 2047.