Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 4

ВЛИЯНИЕ ЧИСЕЛ ПЕКЛЕ СРЕДЫ НА ТЕПЛООБМЕН В ПУЧКАХ ВОЛОКОН

УДК 536.25

В. И. Елисеев, Ю. П. Совит

Днепропетровский государственный университет,
320625 Днепропетровск

Формование синтетических нитей проводится как в газовых (формование из расплава, сухое формование), так и в жидких средах (мокрое формование и смешанное). Широкий разброс физических параметров сред, в которых движутся пучки формующихся волокон, делает актуальным вопрос о влиянии этих параметров на интенсивность тепло- и массообмена.

Для одиночного волокна эта задача может быть решена численно при задании соответствующих граничных условий. С помощью численных и приближенных методов в рамках теории пограничного слоя проведен обширный анализ (см., например, [1, 2]) влияния теплофизических параметров среды (числа Прандтля Pr) на теплообмен обтекаемых поверхностей, в результате чего выявлены некоторые закономерности и соотношения. Для пучков только при определенных схемах компоновки волокон также возможна четкая постановка задачи в рамках модели Навье — Стокса или пограничного слоя. Однако в общем случае движения формующегося пучка нет простых правильных геометрических схем расположения волокон. В связи с этим для описания процессов переноса в таких системах используется более общее представление — модель фильтрационного течения в пористом теле. Такой подход для численного моделирования теплообмена в формующихся пучках развивается авторами в ряде работ (в частности, в [3, 4], где сформулированы основные уравнения, граничные условия и приведены результаты численного анализа конкретных вариантов).

Важной особенностью модели фильтрационного течения является неопределенность величин динамического, теплового и массообменного взаимодействия потока с нитью (элементом дисперсной среды). Для аналитического нахождения этих параметров течения в механике гетерогенных сред широко применяется метод ячеек [5, 6]. Согласно этому методу, решение определенной задачи проводится в области, окружающей элемент, с граничными условиями на внутренней поверхности, продиктованными физическими условиями, и некоторым набором условий на внешней границе ячейки, используемых разными авторами в соответствии со своими предположениями. В [3, 4] для замыкания задачи динамики и теплообмена предложены интегральные условия, дающие возможность связать параметры взаимодействия с локальными фильтрационными параметрами течения.

В данной работе устанавливаются условия справедливости ранее полученных зависимостей, дается приближенный метод расчета и находятся параметры теплообмена при различных числах Пекле Pe.

1. Теплообмен в ячейке. Для нахождения теплового потока на поверхности движущейся в пучке нити выпишем уравнения пограничного слоя в осесимметричной системе координат x, r:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{dp}{\rho dx}+\nu\frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad \frac{\partial(ru)}{\partial x}+\frac{\partial(rv)}{\partial r}=0,$$
$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\lambda\frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right). \tag{1.1}$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости, соответствующие осям x, r; p — давление; ρ — плотность; T — температура; c_p — коэффициент теплоемкости; ν — кинематический коэффициент вязкости; λ — коэффициент теплопроводности. Замыкающими условиями для этой системы служат граничные условия на поверхности нити

$$u(r_{\text{н}})=U_{\text{н}},\quad T(r_{\text{н}})=T_{\text{н}} \tag{1.2}$$

($U_{\text{н}}$, $T_{\text{н}}$ — скорость и температура нити) и интегральные условия

$$2\pi\int\limits_{r_{\text{н}}}^{r_\Delta} ru\,dr=\pi r_\Delta^2u_{\text{ф}}=\pi(r_\Delta^2-r_{\text{н}}^2)U_{\text{ср}},\quad 2\pi\int\limits_{r_{\text{н}}}^{r_\Delta} ruT\,dr=\pi r_\Delta^2u_{\text{ф}}T_{\text{ф}}=\pi(r_\Delta^2-r_{\text{н}}^2)U_{\text{ср}}T_{\text{ср}}, \tag{1.3}$$

где $r_{\text{н}}$ — радиус нити; r_Δ — внешний радиус ячейки; $u_{\text{ф}}$ — фильтрационная скорость среды в ячейке; $T_{\text{ф}}$ — фильтрационная температура среды; $U_{\text{ср}}$ — средняя скорость газа по ячейке; $T_{\text{ср}}$ — средняя калориметрическая температура.

В силу того что положенные в основу рассмотрения теплообмена уравнения осесимметричного пограничного слоя (1.1) являются двумерными и не имеют точных аналитических решений при произвольных $U_{\text{н}}$ и $T_{\text{н}}$, необходимо найти приближенные решения или свести (1.1) к одномерным дифференциальным уравнениям, вписывающимся в контекст полной задачи о теплообмене движущегося пучка нитей. Для получения простых аналитических выражений в [3, 4] был использован метод последовательных приближений, при этом в качестве нулевого приближения принималось решение укороченных уравнений системы (1.1) с отброшенными левыми частями:

$$u=U_{\text{н}}+\frac{1}{4}\frac{dp}{\mu dx}(r^2-r_{\text{н}}^2)+\left[U_\Delta-U_{\text{н}}-\frac{1}{4}\frac{dp}{\mu dx}(r_\Delta^2-r_{\text{н}}^2)\right]\frac{\ln(r/r_{\text{н}})}{\ln(r_\Delta/r_{\text{н}})},$$
$$T=T_{\text{н}}+(T_\Delta-T_{\text{н}})\frac{\ln(r/r_{\text{н}})}{\ln(r_\Delta/r_{\text{н}})} \tag{1.4}$$

(U_Δ и T_Δ находятся из соотношений (1.3)).

Метод последовательных приближений довольно прост и дает аналитические выражения при рассмотрении ряда задач, что делает его удобным для получения приближенных решений и оценок. Он нашел свое применение в теории пограничного слоя (одной из первых работ является [7]) и может с успехом использоваться при постоянных теплофизических параметрах (достоинства и недостатки метода обсуждаются в [8, 9]). В нашем случае он позволяет органично получить систему формпараметров, аналогичных вводимым в многопараметрическом методе [10], и выявить, таким образом, степень неравновесности течения. Согласно многопараметрическому методу, течение и теплообмен в пограничном слое характеризуются бесконечной системой формпараметров, которые определяют в общем случае степень неравновесности течения, поэтому чем они меньше по абсолютной величине, тем процесс ближе к стабилизированному.

Выражения (1.4), строго говоря, являются решениями стабилизированного течения.

Изменение $U_н$, $T_н$, а также $U_{ср}$ и $T_{ср}$ вдоль оси x в них учитывается параметрически, но это не дает возможности учесть влияние продольных градиентов скоростей и температур, создающих неравновесность в потоках. Следующее приближение может восполнить этот недостаток. Однако найденные авторами данной работы решения показали неэффективность их использования вследствие невысокой точности при $\mathrm{Pe} \gg 1$ и значительной громоздкости аналитических выражений. Ввиду этого предлагается метод, позволяющий получить простое аналитическое решение, сочетающее в себе нулевое и первое приближения. Идея его близка к идее работы [11], где производная от температуры по продольной координате заменяется постоянной величиной. В данном случае для получения аналитического решения заменим $u(\partial T/\partial x)$ средними значениями $U_{ср}(dT_{ср}/dx)$, тогда решение уравнения

$$\lambda \frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \rho c_p U_{ср}\frac{dT_{ср}}{dx}$$

имеет вид

$$T = \frac{\mathrm{Pe}}{4}(n^2 - n_*^2)\frac{dT_{ср}}{d\xi} + T_н + \left[T_\Delta - T_н - \frac{\mathrm{Pe}}{4}(1 - n_*^2)\frac{dT_{ср}}{d\xi}\right]\frac{\zeta}{\zeta_*}, \qquad (1.5)$$

где $\xi = x/r_\Delta$; $n = r/r_\Delta$; $n_* = r_н/r_\Delta$; $\zeta = \ln(n/n_*)$; $\zeta_* = \ln(1/n_*)$; $\mathrm{Pe} = \mathrm{RePr}$; $\mathrm{Re} = r_\Delta U_{ср}/\nu$; $\mathrm{Pr} = \rho c_p \nu/\lambda$. Из (1.5) после определения T_Δ из второго условия (1.3) получим тепловой поток на поверхности нити $q_н$.

Для проверки точности выписанного решения рассмотрим модельную задачу о теплообмене в бесконечном кольцевом канале при стабилизированном движении жидкости с профилем скорости

$$u = U_{ср}A\left[n^2 - n_*^2 - (1 - n_*^2)\frac{\zeta}{\zeta_*}\right], \quad A = \left[(1 - n_*^2) - \frac{2\zeta_* - (1 - n_*^2)}{\zeta_*}\right]^{-1},$$

удовлетворяющим нулевым условиям на внешней и внутренней стенке. Граничные условия для температуры зададим простыми выражениями

$$T(1) = 0, \quad T(n_*) = 1 + \exp(æ\xi), \qquad (1.6)$$

которые дают возможность сравнительно просто найти точное решение. Оно может быть численно получено, если положить $T = T_n + T_æ \exp(æ\xi)$, где $T_n = 1 - \zeta_*^{-1}\zeta$, а $T_æ$ удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$\frac{d^2T_æ}{dn^2} + \frac{dT_æ}{ndn} = æ\mathrm{Pe}A\left[n^2 - n_*^2 - (1 - n_*^2)\frac{\zeta}{\zeta_*}\right]T_æ, \quad T_æ(n_*) = 1, \quad T_æ(1) = 0.$$

Сравнение результатов точного и приближенного решений, приведенных в табл. 1 ($æ = 1$) и 2 ($æ = -1$), показывает, что при $\mathrm{Pe} = 1$ совпадение величин $q_T = \partial T/\partial n_{n=n_*}$ (точное решение) и $q_p = \partial T/\partial n_{n=n_*}$ (приближенное) как для $æ = 1$, так и для $æ = -1$ довольно хорошее. При $\mathrm{Pe} = 10$ совпадение также удовлетворительное, при $\mathrm{Pe} = 100$ для $æ = 1$ отличие уже становится существенным. Однако необходимо отметить, что в модельной задаче продольные градиенты температуры, для которых проводится сравнение, имеют сомножитель от $\exp(-2)$ до $\exp(2)$, в то время как в реальных условиях на участке с наиболее интенсивным охлаждением он меньше 0,01. Это указывает на возможность использования найденного приближенного решения для расчетов теплообмена нитей в движущихся пучках.

Таблица 1

ξ	Pe	q_T	q_p
	1	−24,85	−24,77
−2	10	−25,62	−25,14
	100	−27,06	−25,38
	1	−44,87	−44,31
0	10	−50,57	−47,05
	100	−61,25	−48,79
	1	−192,8	−188,7
2	10	−234,9	−208,9
	100	−313,8	−221,8

Таблица 2

ξ	Pe	q_T	q_p
	1	−167,6	−172,7
−2	10	−278,1	−280,6
	100	−262,8	−255,5
	1	−24,39	−24,48
2	10	−26,41	−26,46
	100	−26,13	−26,00

2. Некоторые результаты аналитического и численного анализа. Рассмотрим ряд простых задач, имеющих как теоретическое, так и практическое значение. Будем считать пучок достаточно толстым, т. е. таким, что в соответствии с решениями [12] непосредственное влияние граничных условий на границе пучка экранируется и течение можно принять гидродинамически стабилизированным. В этом случае теплообмен в центральной зоне пучка можно считать процессом, проходящим в бесконечных пучках, вследствие чего уравнение теплообмена, полученное в [3, 4], может быть упрощено и записано в виде

$$\varepsilon \mathrm{Pe}\,\frac{dT_\text{ф}}{d\xi} = 2n_*\Big[a(T_\text{н} - T_\text{ф}) + b\mathrm{Pe}\,\frac{dT_\text{ф}}{d\xi}\Big], \tag{2.1}$$

где ε — порозность пучка; $a = (1 - n_*^2)u_\text{ф}/(2n_*U_a)$; второе слагаемое в скобках является добавкой, связанной с градиентом фильтрационной температуры;

$$b = \frac{1}{4n_*}\left(\frac{U_b}{U_a} - 2n_*^2\right); \quad U_a = \frac{1}{4}\,\frac{r_\Delta^2 dp}{\mu dx}\,i_1 + U_\text{н} i_2 + \zeta_*^{-1}U_c i_3;$$

$$U_b = \frac{1}{4}\,\frac{r_\Delta^2 dp}{\mu dx}\,i_4 + U_\text{н} i_5 + \zeta_*^{-1}U_c i_1; \quad U_c = \frac{2\zeta_*(1-n_*^2)}{2\zeta_* - 1 + n_*^2}\left(u_\text{ф} - U_\text{н} - \frac{1}{4}\,\frac{r_\Delta^2 dp}{\mu dx}(1 - n_*^2)\right);$$

$$i_1 = 0{,}25[(1 - 2n_*^2)\zeta_* - 0{,}25(1 - 3n_*^2)(1 - n_*^2)];$$

$$i_2 = 0{,}5[\zeta_* - 0{,}5(1 - n_*^2)]; \quad i_3 = 0{,}5[\zeta_*^2 - \zeta_* + 0{,}5(1 - n_*^2)];$$

$$i_4 = 0{,}166[(1 - n_*^6) - 3n_*^2(1 - n_*^4) - 3n_*^4(1 - n_*^2)]; \quad i_5 = 0{,}25(1 - n_*^2)^2.$$

Рассмотрим три случая: 1) стержни имеют постоянную температуру; 2) теплообмен с постоянным тепловыделением с поверхностей стержней; 3) сопряженный теплообмен.

В первом случае уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$\mathrm{Pe}(\varepsilon - 2n_*b)\,\frac{d(T_\text{ф} - T_\text{н})}{d\xi} = -2n_*a(T_\text{ф} - T_\text{н}),$$

тогда его решение имеет простое выражение

$$T_\text{ф} - T_\text{н} = B\exp(-\chi\xi), \quad \chi = \frac{2n_*a}{\mathrm{Pe}(\varepsilon - 2n_*b)}, \tag{2.2}$$

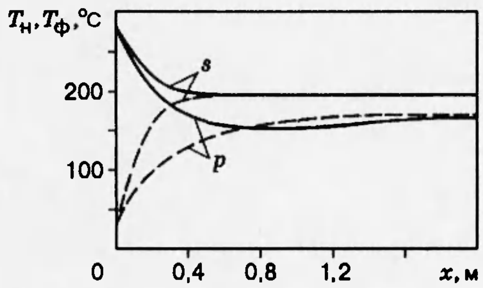

Рис. 1

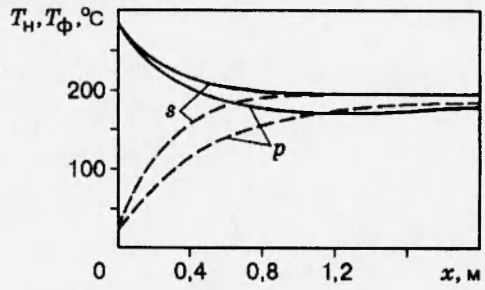

Рис. 2

откуда следует, что число Нуссельта

$$\mathrm{Nu}_{\text{н}} = \frac{n_*}{T_{\text{ф}} - T_{\text{н}}} \frac{\partial T}{\partial n_{n=n_*}} = \frac{\varepsilon n_* a}{\varepsilon - 2n_* b} \tag{2.3}$$

не зависит от числа Пекле среды.

Во втором случае при постоянном тепловыделении имеем уравнения

$$\rho c_p u_{\text{ф}} \frac{dT_{\text{ф}}}{d\xi} = 2n_* q_{\text{н}}, \qquad q_{\text{н}} = \frac{\lambda}{r_\Delta} \Big[a(T_{\text{н}} - T_{\text{ф}}) + b\mathrm{Pe}\, \frac{dT_{\text{ф}}}{d\xi}\Big] = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

с простыми решениями

$$T_{\text{ф}} = 2\,\frac{n_* q_{\text{н}}}{\rho c_p u_{\text{ф}}}\,\xi, \quad T_{\text{ф}} - T_{\text{н}} = -\frac{r_\Delta}{\varepsilon \lambda a}\, q_{\text{н}}(\varepsilon - 2n_* b).$$

Из них следует $\mathrm{Nu}_{\text{н}} = \varepsilon n_* a/(\varepsilon - 2n_* b)$, т. е. число Нуссельта полностью совпадает с выражением (2.3).

В третьем случае к уравнению (2.1) добавим уравнение теплообмена для нити, которое запишем в виде

$$\mathrm{Pe}_{\text{н}} \frac{dT_{\text{н}}}{d\xi} = 2\,\frac{\lambda}{\lambda_{\text{н}}} \Big[a(T_{\text{н}} - T_{\text{ф}}) + b\mathrm{Pe}\,\frac{dT_{\text{ф}}}{d\xi}\Big], \tag{2.5}$$

где $\mathrm{Pe}_{\text{н}} = \rho_{\text{н}} c_{p\text{н}} r_{\text{н}} U_{\text{н}}/\lambda_{\text{н}}$; $\rho_{\text{н}}$ — плотность материала; $c_{p\text{н}}$ — коэффициент теплоемкости материала; $\lambda_{\text{н}}$ — коэффициент теплопроводности в волокне. После несложных преобразований (2.1) и (2.5) можно свести к уравнению

$$\mathrm{Pe}(\varepsilon - 2bS_*)\,\frac{d(T_{\text{ф}} - T_{\text{н}})}{d\xi} = 2aS_*(T_{\text{ф}} - T_{\text{н}}) \quad \Big(S_* = n_* + \frac{n_*(\varepsilon - 2n_* b)\,\mathrm{Pe}}{\mathrm{Pe}_{\text{н}} + 2(\lambda/\lambda_{\text{н}})n_* b\mathrm{Pe}}\,\frac{\lambda}{\lambda_{\text{н}}}\Big).$$

Используя решения типа (2.2), получим $\mathrm{Nu} = \varepsilon n_* a/(\varepsilon - 2S_* b)$. Это выражение по форме совпадает с формулой (2.3), но содержит числа Пекле для течения среды в межниточном пространстве и для движущейся нити.

Рассмотрим вопрос о влиянии числа Прандтля среды на теплообмен движущихся в трубе пучков нитей. На рис. 1–4 приведены результаты расчетов модельных задач соответственно для $\mathrm{Pr} = 0{,}5$; 1; 5; 10. В расчетах было принято: радиус трубы $R_{\text{тр}} = 0{,}1$ м, радиус пучка $R_{\text{п}} = 0{,}05$ м, радиус волокна $r_{\text{н}} = 0{,}125 \cdot 10^{-3}$ м, скорость нитей $U_{\text{н}} = 0{,}3$ м/с, количество волокон $N = 100$, начальная температура волокна $T_{\text{н}0} = 290$ °C, начальная температура газа $T_{\text{ф}0} = 20$ °C, температура стенки канала $T_w = 20$ °C, значение Pr изменялось только за счет коэффициента теплопроводности среды.

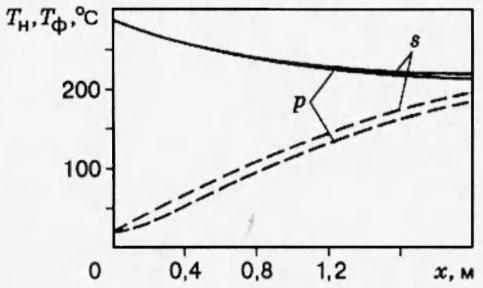

Рис. 3

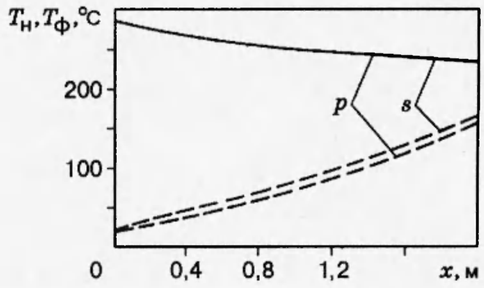

Рис. 4

Как следует из рисунков, интенсивность теплообмена с ростом Pr уменьшается, в результате чего температура нитей $T_н$ (сплошные кривые) при больших значениях Pr снижается медленнее, чем при низких значениях Pr.

Другим важным отличием является то, что при небольших Pr расхождение значений как температуры нитей в центре s и на поверхности пучка p, так и температуры среды (штриховые линии) в тех же точках довольно заметное. С увеличением Pr оно сужается и при Pr $= 10$ отличие составляет несколько градусов (на рис. 3, 4 кривые температуры нитей в центре и на границе пучка практически сливаются).

Таким образом, для данного варианта набора определяющих параметров уменьшение Pr приводит к большей неоднородности полей температуры среды и нитей в пучке. Неоднородность связана с влиянием стенки, температура которой значительно ниже, чем температура нитей. В результате этого при низких значениях Pr образуется более интенсивный теплоотвод из пучка, что приводит к большей неоднородности температурного поля внутри его. При этом интересно отметить, что температура газа в периферийных областях пучка (рис. 1, 2) становится даже больше температуры нитей. Вследствие чего, как хорошо видно из рис. 1 при Pr $= 0{,}5$, температура нитей на поверхности пучка после интенсивного охлаждения и пересечения кривой $T_{нs}$ с кривой $T_{фs}$ вновь начинает подниматься.

Несмотря на эти расхождения, значения Nu при таком широком разбросе чисел Прандтля меняются в более узком диапазоне.Так, в конце рассматриваемого участка при Pr $= 0{,}5$; 1 Nu $= 0{,}42$, а при Pr $= 5$; 10 Nu $= 0{,}51$. Отличие значений Nu в зависимости от места нахождения нити в пучке практически несущественно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
2. **Ерошенко В. М., Зайчик Л. И.** Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. М.: Наука, 1984.
3. **Елисеев В. И., Совит Ю. П.** Свободно-конвективный теплообмен в открытых системах вертикальных стержней // ПМТФ. 1990. № 5. С. 88–94.
4. **Елисеев В. И., Совит Ю. П.** Теплообмен смешанной конвекцией в движущихся пучках стержней // ИФЖ. 1991. Т. 61, № 2. С. 230–239.
5. **Хаппель Д., Бреннер Г.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.

6. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
7. **Швец М. Е.** О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя // ПММ. 1949. Т. 13, № 3. С. 257–266.
8. **Лойцянский Л. Г.** Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962.
9. **Дорфман А. Ш.** Теплообмен при обтекании неизотермических тел. М.: Машиностроение, 1982.
10. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
11. **Мигай В. К., Фирсова Э. В.** Теплообмен и гидравлическое сопротивление пучков труб. Л.: Наука, 1986.
12. **Елисеев В. И., Совит Ю. П.** Гидродинамика и теплообмен в трубе с пучком движущихся стержней // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-энерг. наук. 1992. № 1. С. 76–83.

Поступила в редакцию 7/XII 1994 г.,
в окончательном варианте — 31/V 1995 г.