УДК 533.72

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КЕЙЗА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОМ СКОЛЬЖЕНИИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ВДОЛЬ ТВЕРДОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Н. Попов

Поморский государственный университет, 163006 Архангельск

Построено аналитическое решение полупространственной краевой задачи для неоднородного кинетического уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме оператора эллипсоидально-статистической модели в задаче о тепловом скольжении разреженного газа вдоль твердой цилиндрической поверхности. Для случаев продольного и поперечного обтекания прямого кругового цилиндра в линейном по числу Кнудсена приближении получены поправки к коэффициенту теплового скольжения, учитывающие кривизну межфазной поверхности. Проведено сравнение с известными данными.

Введение. В настоящее время применение метода элементарных решений (метода Кейза) [1] для решения однородных модельных кинетических уравнений является достаточно традиционным. Тем не менее известно лишь несколько работ, в которых этот метод используется для решения неоднородных кинетических уравнений. Так, в [2] из решения в слое Кнудсена неоднородного линеаризованного кинетического уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме оператора модели Бхатнагара — Гросса — Крука определена скорость скольжения разреженного газа вдоль твердой сферической поверхности. При этом в линейном по числу Кнудсена приближении получены точные аналитические в замкнутой форме выражения для поправок к коэффициентам теплового и изотермического скольжений, учитывающие искривление межфазной поверхности. Однако в силу сложности окончательных выражений численный анализ полученных результатов не проводился. В [3] с использованием кинетического уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме оператора модели Бхатнагара — Гросса — Крука построено решение задачи о тепловом скольжении второго порядка. В силу указанных выше причин численный анализ полученных результатов также не проводился. В [4] метод Кейза применялся для решения неоднородного линеаризованного кинетического уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме оператора эллипсоидально-статистической модели в задаче о тепловом скольжении разреженного газа вдоль твердой сферической поверхности. Значение коэффициента β_R, учитывающего зависимость коэффициента теплового скольжения от радиуса кривизны межфазной поверхности, найдено путем численного анализа полученных аналитических выражений.

В настоящей работе с использованием метода Кейза решается задача о тепловом скольжении разреженного газа вдоль поверхности прямого кругового цилиндра. В отличие от [4] ряд интегралов, входящих в выражение для коэффициента β_R, вычислен аналитически, и окончательный результат выражается через интегралы Лоялки [5]. Полученные в работе результаты необходимы для вычисления скорости термофореза цилиндрических аэрозольных частиц [6].

1. Поперечное обтекание цилиндра. Вывод основных уравнений. Рассмотрим твердую цилиндрическую поверхность, обтекаемую потоком неоднородного по температуре разреженного газа при малых отклонениях от равновесного состояния. Течение газового потока будем описывать уравнением Больцмана с линеаризованным оператором столкновений в форме оператора эллипсоидально-статистической модели [7, 8]. В цилиндрической системе координат, ось Oz которой совпадает с осью цилиндра, уравнение для рассматриваемой модели записывается в виде

$$C_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + f(\rho, \varphi, \boldsymbol{C}) + \frac{1}{\rho}\Big(C_\varphi^2 \frac{\partial f}{\partial C_\rho} - C_\rho C_\varphi \frac{\partial f}{\partial C_\varphi} + C_\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}\Big) =$$
$$= f^0(\boldsymbol{C})\bigg(1 + \beta^{-3/2} \iiint K(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}') f(\rho, \varphi, \boldsymbol{C}')\, d\boldsymbol{C}'\bigg).$$

Здесь $f(\rho, \varphi, \boldsymbol{C})$ — функция распределения молекул газа по координатам и скоростям; $f^0(\boldsymbol{C}) = (\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$ — абсолютный максвеллиан; $\beta = m/(2k_{\rm B}T)$; $\rho(3\mu_g/(2p))\beta^{-1/2}$ — расстояние, отсчитываемое от оси цилиндра; ρ — безразмерная координата; $\beta^{-1/2}C_i$ — компоненты собственной скорости молекул газа; μ_g — динамическая вязкость газа; p — статическое давление; $k_{\rm B}$ — постоянная Больцмана; m — масса частиц газа; $K(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}') = 1 + 2\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' + 2(C^2 - 3/2)(C'^2 - 3/2)/3 - 2C_iC_j(C_i'C_j' - \delta_{ij}\boldsymbol{C}'^2/3)$.

В качестве граничного условия на стенке принимается условие диффузного отражения.

Предположим, что градиент температуры вдали от поверхности цилиндра перпендикулярен его оси. Линеаризуем функцию распределения, описывающую состояние газа, относительно локально-равновесной функции распределения в приближении Чепмена — Энскога [9], т. е. представим ее в виде

$$f(\rho, \varphi, \boldsymbol{C}) = f^0(\boldsymbol{C})[1 + Y(\rho, \varphi, \boldsymbol{C})].$$

Разложим функцию $Y(\rho, \varphi, \boldsymbol{C})$, учитывающую отклонение функции распределения газовых молекул по скоростям и координатам в слое Кнудсена от функции распределения в объеме газа, в ряд по малому параметру $1/R$:

$$Y(\rho, \varphi, \boldsymbol{C}) = Y^{(1)}(\rho, \varphi, \boldsymbol{C}) + R^{-1} Y^{(2)}(\rho, \varphi, \boldsymbol{C}) + \ldots . \qquad (1.1)$$

Используя это разложение, получим систему одномерных интегродифференциальных уравнений

$$C_\rho \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \rho} + Y^{(1)}(\rho, \varphi, \boldsymbol{C}) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C'^2)\, K(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}') Y^{(1)}(\rho, \varphi, \boldsymbol{C}')\, d\boldsymbol{C}'; \qquad (1.2)$$

$$C_\rho \frac{\partial Y^{(2)}}{\partial \rho} + Y^{(2)}(\rho, \varphi, \boldsymbol{C}) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C'^2)\, K(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}') Y^{(2)}(\rho, \varphi, \boldsymbol{C}')\, d\boldsymbol{C}' -$$
$$- C_\varphi^2 \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_\rho} + C_\rho C_\varphi \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_\varphi} - C_\varphi \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \varphi} \qquad (1.3)$$

с граничными условиями

$$Y^{(1)}(R, \varphi, \boldsymbol{C}) = -2C_\varphi U_\varphi^{(1)}\big|_S + C_\varphi(C^2 - 5/2)k, \qquad C_\rho > 0,$$
$$Y^{(2)}(R, \varphi, \boldsymbol{C}) = -2C_\varphi U_\varphi^{(2)}\big|_S, \qquad C_\rho > 0,$$
$$Y^{(1)}(\infty, \varphi, \boldsymbol{C}) = 0, \qquad Y^{(2)}(\infty, \varphi, \boldsymbol{C}) = 0,$$

из которых находим выражение для двух первых членов разложения (1.1). Здесь $3R\mu_g\beta^{-1/2}/(2p)$ — радиус цилиндра; S — поверхность цилиндра; $k = \dfrac{1}{T_S} \dfrac{\partial T}{R\, \partial \varphi}\Big|_S$;

$\beta^{-1/2}U_i$ — компоненты среднемассовой скорости потока. Уравнение (1.2) описывает процессы, происходящие на границе твердой плоской поверхности, а уравнение (1.3) позволяет учесть влияние кривизны межфазной поверхности.

Решение (1.2) ищем в виде разложения по двум ортогональным многочленам

$$Y^{(1)}(\rho,\varphi,\boldsymbol{C}) = C_\varphi Y_1^{(1)}(\rho,\varphi,C_\rho) + C_\varphi(C_\varphi^2 + C_z^2 - 2)Y_2^{(1)}(\rho,\varphi,C_\rho). \tag{1.4}$$

Заметим, что под ортогональностью в (1.4) понимается скалярное произведение

$$(f,g) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\rho,\varphi,\boldsymbol{C})g(\rho,\varphi,\boldsymbol{C})\exp(-C^2)\,d^3\boldsymbol{C}.$$

Решение (1.3) ищем в виде

$$Y^{(2)}(\rho,\varphi,\boldsymbol{C}) = C_\varphi Y_1^{(2)}(\rho,\varphi,C_\rho). \tag{1.5}$$

Обозначим $\mu = C_\rho$. Тогда, подставляя разложения (1.4) и (1.5) в (1.3), умножая полученное соотношение на $C_\varphi \exp(-C_\varphi^2 - C_z^2)$ и интегрируя по C_φ и C_z от $-\infty$ до $+\infty$, для функции $Y_1^{(2)}(\rho,\varphi,\mu)$ получим уравнение

$$\mu\,\frac{\partial Y_1^{(2)}}{\partial\rho} + Y_1^{(2)}(\rho,\varphi,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_1^{(2)}(\rho,\varphi,\mu')\exp(-\mu'^2)\,d\mu' -$$

$$-\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu' Y_1^{(2)}(\rho,\varphi,\mu')\exp(-\mu'^2)\,d\mu' + \mu Y_1^{(1)}(\rho,\varphi,\mu) -$$

$$-\frac{3}{2}\,\frac{\partial Y_1^{(1)}}{\partial\mu} + 3\mu Y_2^{(1)}(\rho,\varphi,\mu) - \frac{3}{2}\,\frac{\partial Y_2^{(1)}}{\partial\mu} \tag{1.6}$$

с граничными условиями

$$Y_1^{(2)}(R,\varphi,\mu) = -2U_\varphi^{(2)}\big|_S, \quad \mu > 0, \qquad Y_1^{(2)}(\infty,\varphi,\mu) = 0. \tag{1.7}$$

Здесь $Y_1^{(1)}(\rho,\varphi,\mu)$, $Y_2^{(1)}(\rho,\varphi,\mu)$ — функции распределения из задачи о тепловом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности [8]:

$$Y_1^{(1)}(\rho,\varphi,\mu) = \int\limits_0^\infty a(\eta,\varphi)\,F(\eta,\mu)\exp\Big(-\frac{x}{\eta}\Big)\,d\eta, \qquad x = \rho - R; \tag{1.8}$$

$$Y_2^{(1)}(\rho,\varphi,\mu) = k\int\limits_0^\infty \exp\Big(-\frac{x}{\eta}\Big)\delta(\eta-\mu)\,d\eta, \tag{1.9}$$

$$F(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta P\,\frac{1}{\eta-\mu} + \exp(\eta^2)\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu), \quad \lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,z\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\mu^2)}{\mu - z}\,d\mu;$$

$$a(\eta,\varphi) = \eta(\eta - Q_1)\exp(-\eta^2)X(-\eta)k/(2|\lambda^+(\eta)|^2), \quad \lambda^\pm(\eta) = \lambda(\eta) \pm \sqrt{\pi}\,i\eta\exp(-\eta^2),$$

$$X(z) = \frac{1}{z}\,\exp\bigg(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\theta(\tau)-\pi}{\tau - z}\,d\tau\bigg), \quad \theta(\tau) - \pi = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau\exp(-\tau^2)}, \tag{1.10}$$

$\lambda(z)$ — дисперсионная функция Черчиньяни; Px^{-1} — распределение в смысле главного значения интеграла при интегрировании x^{-1}; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; $\theta(\tau)$ — однозначная регулярная ветвь аргумента функции $\lambda^+(\tau)$, удовлетворяющая условию $\theta(0) = 0$.

Таким образом, задача свелась к решению уравнения (1.6) с граничными условиями (1.7).

2. Учет влияния кривизны поверхности на коэффициент теплового скольжения. Решение (1.6) ищем в виде

$$Y_1^{(2)}(\rho, \varphi, \mu) = \int\limits_0^\infty \psi(\eta, \varphi, \mu) \exp\Big(-\frac{x}{\eta}\Big)\, d\eta. \tag{2.1}$$

Подставляя (1.8), (1.9), (2.1) в (1.6), получаем неоднородное характеристическое уравнение

$$\Big(1 - \frac{\mu}{\eta}\Big)\psi(\eta, \varphi, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\eta, \varphi, \mu') \exp(-\mu'^2)\, d\mu' - \\ - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \mu \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu' \psi(\eta, \varphi, \mu') \exp(-\mu'^2)\, d\mu' + Z(\eta, \varphi, \mu); \tag{2.2}$$

$$Z(\eta, \varphi, \mu) = \mu a(\eta, \varphi)\, F(\eta, \mu) - \frac{3}{2}\, a(\eta, \varphi)\, \frac{\partial F}{\partial \mu} + 3\mu k \delta(\eta - \mu) - \frac{3k}{2}\, \frac{\partial}{\partial \mu} \delta(\eta - \mu). \tag{2.3}$$

Умножая (2.2) на $\exp(-\mu^2)$ и интегрируя по μ от $-\infty$ до ∞, находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu \psi(\eta, \varphi, \mu) \exp(-\mu^2)\, d\mu = -\eta \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(\eta, \varphi, \mu) \exp(-\mu^2)\, d\mu.$$

Учитывая, что значение последнего интеграла равно нулю [4], запишем (2.2) в виде

$$(\eta - \mu)\psi(\eta, \varphi, \mu) = \eta m(\eta, \varphi)/\sqrt{\pi} + \eta Z(\eta, \varphi, \mu); \tag{2.4}$$

$$m(\eta, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\eta, \varphi, \mu) \exp(-\mu^2)\, d\mu. \tag{2.5}$$

Общее решение уравнения (2.4) в пространстве обобщенных функций имеет вид [10]

$$\psi(\eta, \varphi, \mu) = \eta P/(\eta - \mu)(m(\eta, \varphi)/\sqrt{\pi} + Z(\eta, \varphi, \mu)) + g(\eta, \varphi)\delta(\eta - \mu). \tag{2.6}$$

Явный вид функции $g(\eta, \varphi)$ находим, подставляя (2.6) в (2.5):

$$g(\eta, \varphi) = \bigg(m(\eta, \varphi)\lambda(\eta) - \eta \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\, \frac{1}{\eta - \mu}\, Z(\eta, \varphi, \mu) \exp(-\mu^2)\, d\mu\bigg) \exp(\eta^2).$$

В [4] показано, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\, \frac{1}{\eta - \mu}\, \mu F(\eta, \mu) \exp(-\mu^2)\, d\mu = -1, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\, \frac{1}{\eta - \mu} \big(F(\eta, \mu)\big)'_\mu \exp(-\mu^2)\, d\mu = -1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\,\frac{1}{\eta-\mu}\,\mu\delta(\eta-\mu)\exp{(-\mu^2)}\,d\mu = 2\exp{(-\eta^2)}\Big(\eta^2-\frac{1}{2}\Big),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\,\frac{1}{\eta-\mu}\big(\delta(\eta-\mu)\big)'_{\mu}\exp{(-\mu^2)}\,d\mu = 2\exp{(-\eta^2)}\Big(\eta^2-\frac{1}{2}\Big).$$

Отсюда с учетом (2.3) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\,\frac{1}{\eta-\mu}\,Z(\eta,\varphi,\mu)\exp{(-\mu^2)}\,d\mu = \frac{1}{2}\,a(\eta,\varphi)+3k\exp{(-\eta^2)}\Big(\eta^2-\frac{1}{2}\Big).$$

Таким образом,

$$\psi(\eta,\varphi,\mu) = \eta P/(\eta-\mu)[m(\eta,\varphi)/\sqrt{\pi}+Z(\eta,\varphi,\mu)]+ \\ +[m(\eta,\varphi)\exp{(\eta^2)}\lambda(\eta)-\eta a(\eta,\varphi)\exp{(\eta^2)}/2-3k\eta(\eta^2-1/2)]\delta(\eta-\mu). \quad (2.7)$$

Решение (2.1) автоматически удовлетворяет граничному условию (1.7) на бесконечности. Подставляя (2.7) в (2.1), с учетом граничного условия (1.7) на поверхности цилиндра получим сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Коши [11]

$$-2U_{\varphi}^{(2)}\big|_S = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta m(\eta,\varphi)}{\eta-\mu}\,d\eta+\int\limits_0^{\infty}\eta Z(\eta,\varphi,\mu)\,\frac{d\eta}{\eta-\mu}+ \\ +m(\mu,\varphi)\exp{(\mu^2)}\lambda(\mu)-\mu a(\mu,\varphi)\exp{(\mu^2)}/2-3k\mu(\mu^2-1/2), \quad \mu>0. \quad (2.8)$$

В [4] показано, что

$$\int\limits_0^{\infty}\eta P\,\frac{1}{\eta-\mu}\,a(\eta,\varphi)\,F(\eta,\mu)\,d\eta = \big(\mu\,Y_1^{(1)}(R,\varphi,\mu)\big)'_{\mu},$$

$$\int\limits_0^{\infty}\eta P\,\frac{1}{\eta-\mu}\,\big(a(\eta,\varphi)F(\eta,\mu)\big)'_{\mu}\,d\eta = \frac{1}{2}\big(\mu Y_1^{(1)}(R,\varphi,\mu)\big)''_{\mu\mu},$$

$$\int\limits_0^{\infty}\eta P\,\frac{1}{\eta-\mu}\,\delta(\eta-\mu)\,d\eta = 1, \qquad \int\limits_0^{\infty}\eta P\,\frac{1}{\eta-\mu}\,\big(\delta(\eta-\mu)\big)'_{\mu}\,d\eta = 0.$$

Тогда, учитывая, что $Y_1^{(1)}(R,\varphi,\eta)=(\eta^2+Q_2)k$ [8], находим

$$\int\limits_0^{\infty}\eta Z(\eta,\varphi,\mu)\,\frac{d\eta}{\eta-\mu} = \Big(3\mu^3+Q_2\mu-\frac{3}{2}\,\mu\Big)k.$$

Здесь Q_n — интегралы Лоялки [5]:

$$Q_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{n+1}\exp{(-t^2)}\,dt}{X(-t)}.$$

С учетом полученных результатов (2.8) запишем в виде

$$f(\mu,\varphi) = m(\mu,\varphi)\exp(\mu^2)\lambda(\mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\eta m(\eta,\varphi)}{\eta-\mu}\,d\eta, \qquad \mu > 0; \tag{2.9}$$

$$f(\mu,\varphi) = -2U_\varphi^{(2)}\big|_S - Q_2\mu + a(\eta,\varphi)\exp(\eta^2)/2. \tag{2.10}$$

Введем вспомогательную функцию

$$M(z,\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{\eta m(\eta,\varphi)}{\eta - z}\,d\eta.$$

С учетом граничных значений функций $M(z,\varphi)$ и $\lambda(z)$ на нижнем и верхнем берегах разрезов ($[0,\infty)$ и $(-\infty,+\infty)$ соответственно) (2.9) сводится к полупространственной краевой задаче Римана [11]

$$M^+(\mu,\varphi)\lambda^+(\mu) - M^-(\mu,\varphi)\lambda^-(\mu) = \mu f(\mu,\varphi)\exp(-\mu^2), \quad \mu > 0. \tag{2.11}$$

Коэффициент краевой задачи (2.11) совпадает с коэффициентом краевой задачи о скольжении газа вдоль твердой плоской поверхности [8]. С учетом этого (2.11) сводится к задаче о скачке [11]

$$M^+(\mu,\varphi)X^+(\mu) - M^-(\mu,\varphi)X^-(\mu) = \mu f(\mu,\varphi)\exp(-\mu^2)X^-(\mu)/\lambda^-(\mu), \qquad \mu > 0,$$

которая имеет исчезающее на бесконечности решение при выполнении условия [8]

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{f(t,\varphi)}{X(-t)}\,t\exp(-t^2)\,dt = 0. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.10) в (2.12), с учетом (1.10) находим

$$U_\varphi^{(2)}\big|_S = \frac{k}{2}\Big(Q_1Q_2 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{t^2(t-Q_1)}{|\lambda^+(t)|^2}\exp(-t^2)\,dt\Big).$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{t^2(t-Q_1)}{|\lambda^+(t)|^2}\exp(-t^2)\,dt = -3Q_3 - Q_1Q_2, \tag{2.13}$$

то $U_\varphi^{(2)}\big|_S = 3k(Q_3 + Q_1Q_2)/4$. Подставляя в полученное выражение значения входящих в него интегралов Лоялки [5] $Q_1 = -1{,}016\,19$, $Q_2 = -1{,}266\,63$, $Q_3 = -1{,}8207$, имеем $U_\varphi^{(2)}\big|_S = -0{,}400\,17k$. Отсюда с учетом (1.1) находим скорость теплового скольжения разреженного газа вдоль твердой цилиндрической поверхности

$$U_\varphi\big|_S = U_\varphi^{(1)}\big|_S + R^{-1}U_\varphi^{(2)}\big|_S = (0{,}383\,32 - 0{,}400\,17R^{-1})k. \tag{2.14}$$

Учитывая связь $\lambda = \nu(\pi\beta)^{1/2}$ между кинематической вязкостью газа ν и средней длиной свободного пробега частиц газа λ и используя принятый способ обезразмеривания физических величин, находим

$$\frac{1}{R} = \frac{3\mu_g}{2p\beta^{1/2}R^*} = \frac{3\nu\beta^{1/2}}{R^*} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\lambda}{R^*} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Kn}.$$

Переходя в (2.14) к размерным величинам, получаем

$$U_\varphi\big|_S = 1{,}149\,95\nu\,(1 - 1{,}7684\,\mathrm{Kn})\,\frac{1}{T_S}\,\frac{\partial T}{R^*\,\partial\varphi}\Big|_S.$$

Здесь R^* — размерный радиус цилиндра; $\mathrm{Kn} = \lambda/R^*$ — число Кнудсена.

Таким образом, в случае обтекания потоком разреженного газа твердой цилиндрической поверхности $\beta_{R\perp} = 1{,}7684$.

3. Продольное обтекание цилиндрической поверхности. Предположим, что градиент температуры вдали от поверхности цилиндра направлен вдоль его оси. Обозначим $k_1 = (1/T_S)\partial T/\partial z\big|_S$.

Решение (1.2), (1.3) ищем в виде

$$Y^{(1)}(\rho,\boldsymbol{C}) = C_z Y_1^{(1)}(\rho, C_\rho) + C_z(C_\varphi^2 + C_z^2 - 2)Y_2^{(1)}(\rho, C_\rho), \quad Y^{(2)}(\rho,\boldsymbol{C}) = C_z Y_1^{(2)}(\rho, C_\rho). \tag{3.1}$$

Подставляя разложения (3.1) в (1.3), умножая полученное соотношение на $C_z\exp(-C_\varphi^2 - C_z^2)$ и интегрируя по C_φ и C_z от $-\infty$ до $+\infty$, для функции $Y_1^{(2)}(\rho,\mu)$ получим уравнение

$$\mu\,\frac{\partial Y_1^{(2)}}{\partial\rho} + Y_1^{(2)}(\rho,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_1^{(2)}(\rho,\mu')\exp(-\mu'^2)\,d\mu' -$$

$$- \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu' Y_1^{(2)}(\rho,\mu')\,\exp(-\mu'^2)\,d\mu' - \frac{1}{2}\,\frac{\partial Y_1^{(1)}}{\partial\mu} + \mu Y_2^{(1)}(\rho,\mu) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial Y_2^{(1)}}{\partial\mu}$$

с граничными условиями

$$Y_1^{(2)}(R,\mu) = -2U_z^{(2)}\big|_S, \quad \mu > 0, \qquad Y_1^{(2)}(\infty,\mu) = 0.$$

Здесь

$$Y_1^{(1)}(\rho,\mu) = \int\limits_0^{\infty} a(\eta)\,F(\eta,\mu)\exp\Big(-\frac{x}{\eta}\Big)\,d\eta, \qquad x = \rho - R,$$

$$Y_2^{(1)}(\rho,\mu) = k_1\int\limits_0^{\infty}\exp\Big(-\frac{x}{\eta}\Big)\delta(\eta-\mu)\,d\eta,$$

$$a(\eta) = \eta(\eta - Q_1)\exp(-\eta^2)\,X(-\eta)k_1/(2|\lambda^+(\eta)|^2), \qquad Y_1^{(1)}(R,\mu) = (\mu^2 + Q_2)k_1.$$

В рассматриваемом случае

$$Z(\eta,\mu) = -\frac{1}{2}\,a(\eta)\frac{\partial F}{\partial\mu} + \mu k_1\delta(\eta-\mu) - \frac{k_1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\,\delta(\eta-\mu),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\,\frac{1}{\eta-\mu}\,Z(\eta,\mu)\exp(-\mu^2)\,d\mu = \frac{1}{2}\,a(\eta) + k_1\exp(-\eta^2)\Big(\eta^2 - \frac{1}{2}\Big),$$

$$\int\limits_0^{\infty}\eta Z(\eta,\mu)\,\frac{d\eta}{\eta-\mu} = -\frac{1}{3}\,\mu k_1,$$

$$f(\mu) = -2U_z^{(2)}\big|_S + a(\mu)\exp(\mu^2)/2 + \mu^3 k_1,$$

$$U_z^{(2)}\big|_S = -\frac{k_1}{2}\Big(Q_3 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{t^2(t-Q_1)}{|\lambda^+(t)|^2}\exp(-t^2)\,dt\Big).$$

Отсюда с учетом (1.1) и (2.13) получим

$$U_z^{(2)}\big|_S = (Q_3 + Q_1Q_2)k_1/4, \qquad U_z\big|_S = U_z^{(1)}\big|_S + R^{-1}U_z^{(2)}\big|_S = (0{,}383\,32 - 0{,}133\,39R^{-1})k_1$$

или, переходя к размерным величинам:

$$U_z\big|_S = 1{,}149\,95\nu(1 - 0{,}589\,495\mathrm{Kn})\,\frac{1}{T_S}\,\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_S.$$

Таким образом, $\beta_{R\|} = 0{,}589\,495$.

Заключение. В работе из решения в слое Кнудсена кинетического уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме оператора эллипсоидально-статистической модели найдены скорости скольжения неоднородного по температуре разреженного газа вдоль твердой цилиндрической поверхности. Полученные в линейном по числу Кнудсена приближении зависимости коэффициентов теплового скольжения от радиуса кривизны имеют тот же вид, что и в [12]. В случае продольного обтекания цилиндрической поверхности полученные выражения для скорости теплового скольжения (3.2) совпадают с соответствующими выражениями в [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Латышев А. В.** Аналитические аспекты решения модельных уравнений // Теорет. и мат. физика. 1990. Т. 85, № 3. С. 428–442.
2. **Акимов Д. Н., Гайдуков М. Н.** Точное вычисление скорости скольжения простого газа вдоль сферической поверхности // Современные проблемы физики аэродисперсных систем / Моск. обл. пед. ин-т. М., 1991. Деп. в ВИНИТИ 21.11.91, № 4900–В91. С. 35–52.
3. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Аналитическое решение неоднородных кинетических уравнений в задаче теплового скольжения второго порядка // Мат. моделирование. 1992. Т. 4, № 4. С. 55–62.
4. **Гайдуков М. Н., Попов В. Н.** Точное решение кинетического уравнения в задаче о неизотермическом скольжении разреженного газа вблизи слабо искривленной поверхности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 165–173.
5. **Loyalka S. K.** The Q_n and F_n integrals for the BGK model // Transport Theory Statist. Phys. 1975. V. 4. P. 55–65.
6. **Яламов Ю. И., Сафиуллин Р. А.** К теории термофореза цилиндрической аэрозольной частицы в умеренно разреженном газе // Теплофизика высоких температур. 1994. Т. 32, № 2. С. 271–275.
7. **Holway L. H.** New statistical models in kinetic theory: method of constructions // Phys. Fluids. 1966. V. 3, N 3. P. 1658–1673.
8. **Cercignani C., Tironi G.** Some application of a linearized kinetic model with correct Prandtl number // Nuovo Cimento. Ser. B. 1966. V. 43, N 1. P. 64–68.
9. **Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

10. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
11. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
12. **Sone Y., Aoki K.** Forces on a spherical particle in a slightly rarefied gas // Proc. of the 10th Intern. symp. on rarefied gas dynamics, Aspen, July 19–23, 1976. N. Y.: Acad. Press, 1977. V. 51, pt 1. P. 417–430.

Поступила в редакцию 27/XI 2001 г.,
в окончательном варианте — 20/III 2002 г.