УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ДЕФОРМИРУЕМОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

С. Ю. Литвинчук, А. А. Белов, И. П. Марков,
А. А. Ипатов, А. Н. Петров

Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия
E-mails: litvinchuk@mech.unn.ru, belov_a2@mech.unn.ru, teanku@gmail.com, sansan.com@inbox.ru, pinys_aristata@inbox.ru

Рассматриваются однородные и двухслойные полупространства из анизотропного упругого, изотропного вязкоупругого или пороупругого материала. В качестве модели вязкоупругого материала используются модели Кельвина — Фойгта и модель с ядром Абеля, пороупругий материал исследуется в рамках модели сжимаемого материала Био. Также рассматривается случай, когда полупространство содержит полость. С помощью метода граничных элементов исследуется распространение поверхностных волн. При численном решении используется метод коллокаций для регуляризованного гранично-интегрального уравнения.

Ключевые слова: трехмерные задачи, полупространство, слой, метод граничных элементов, вязкоупругость, пороупругость, анизотропия, обращение преобразования Лапласа.

DOI: 10.15372/PMTF20150615

Введение. Метод граничных элементов позволяет получить высокоточные результаты для достаточно сложных математических моделей. Данный метод наиболее эффективен при решении задач для бесконечных и полубесконечных тел. В настоящее время сформировались два основных направления развития метода граничных элементов, применяемого при исследовании волновых задач: интегральное преобразование и построение шаговых процедур.

Первые граничные интегральные формулировки с использованием преобразования Лапласа для задач динамики упругих тел приведены в [1–3]. Обзор работ, в которых метод граничных элементов используется для решения задач упругодинамического деформирования, содержится в [4, 5].

Ни одна из традиционных пошаговых формулировок метода граничных элементов не может быть обобщена на вязкоупругий и пороупругий случаи, так как для этого требуется знание вязкоупругих фундаментальных решений для общего случая. Только для асимптотической, максвелловской моделей, модели Кельвина — Фойгта, модифицированных моделей Кельвина — Фойгта и модели стандартного вязкоупругого тела можно получить

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-19-01096).

фундаментальные и сингулярные решения [6–8], а значит, возможно применение метода граничных элементов [6, 7, 9, 10]. Пошаговую формулировку метода граничных элементов можно построить не на основе сплайн-аппроксимации интеграла Вольтерры, а на основе метода квадратур сверток [11–14]. Существуют принципиально другие подходы для решения динамических задач: метод граничных элементов с двукратным применением теоремы взаимности [15] и метод с использованием линейных регулярных гранично-интегральных уравнений [16–20]. К эффективным высокоточным методам решения интегральных уравнений относятся метод факторизации, метод фиктивного поглощения [21–24] и др.

Численно-аналитические исследования пороупругих тел основаны на математической теории Био пороупругой среды. Одни из первых исследований двумерной задачи о возмущении пороупругого полупространства выполнены в [25, 26]. Волны в слоистом полупространстве исследовались в [27, 28]. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных изучению колебаний в пористых средах с применением метода нормальных мод, лучевого метода, метода контурных интегралов. Использование метода гранично-интегральных уравнений и метода граничных элементов позволяет решать задачи динамики пороупругих тел [29–31].

При использовании метода граничных элементов для анизотропных материалов возникают трудности при выводе и реализации фундаментальных решений [32]. В работах [33, 34] данная проблема решается с помощью интегрального преобразования Радона. Представления авторов [33, 34] позволяют эффективно решать задачи численными методами [32].

В настоящей работе с использованием гранично-элементной модели (интегрального преобразования Лапласа и шаговых процедур) решаются начально-краевые задачи динамики вязкоупругих и пороупругих изотропных, а также анизотропных упругих полупространств. Полученные результаты сравниваются с данными других авторов.

1. Математическая постановка задачи. Рассмотрим однородное $\Omega = \{-\infty < x_1, x_2 < +\infty,\ 0 < x_3 < +\infty\}$ и двухслойное $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$: $\Omega_1 = \{-\infty < x_1, x_2 < +\infty;\ 0 \leqslant x_3 \leqslant h\}$, $\Omega_2 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty;\ h \leqslant x_3 < +\infty\}$ полупространства, в которых введена декартова система координат $Ox_1x_2x_3$ с точкой O на лицевой плоскости $S = \{-\infty < x_1, x_2 < +\infty\}$. Границу слоя $\{-\infty < x_1, x_2 < +\infty,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant h\}$ обозначим через S_1, а границу полупространства $\{-\infty < x_1, x_2 < +\infty,\ h \leqslant x_3 < +\infty\}$, на котором располагается однородный слой, — через S_2, причем $S_1 = S \cup S_2$. Будем полагать, что для описания поведения материала в областях Ω_l используются анизотропные вязкоупругие или пороупругие модели. Для параметров изотропного материала полупространства Ω_l введем следующие обозначения: ρ^l — плотность материала, $K^l(t)$, $G^l(t)$ — функции свойств материала, K^l, G^l — константы упругих свойств материала. Динамическое состояние полупространства Ω_l описывается системой дифференциальных уравнений в обобщенных перемещениях

$$L(\partial_t, \partial)v^l = 0, \quad v^l = (u^l, p^l),$$

где u^l — вектор перемещений; p^l — пороговое давление.

В изображениях по Лапласу систему дифференциальных уравнений можно записать следующим образом:

$$L(s, \partial)\boldsymbol{v}^l = 0$$

($\boldsymbol{v}^l(x, s)$ — вектор изображений обобщенных перемещений точки). Для изотропного случая имеем

$$L(s,\partial) = \begin{bmatrix} G^l\partial_p\partial_p + (K^l + G^l/3)\partial_i\partial_j - s^2(\rho^l - \beta^l\rho^l_f) & -\chi(\alpha^l - \beta^l)\partial_i \\ -\chi s(\alpha^l - \beta^l)\partial_j & \chi(\beta^l(s\rho^l_f)^{-1}\partial_l\partial_l - (\varphi^k)^2 sR^{-1}) \end{bmatrix},$$

где ∂_p — оператор дифференцирования по координате x_p, $p = \overline{1,3}$; $\beta^l = \dfrac{k\rho_f^l(\varphi^l)^2 s^2}{(\varphi^l)^2 s + s^2 k(\rho_a^l + \varphi^l \rho_f^l)}$; φ^l — пористость; k — проницаемость; α^l — эффективный коэффициент напряжений; $R = \dfrac{(\varphi^l)^2 K_f^l (K_s^l)^2}{K_f^l(K_s^l - K^l) + \varphi^l K_s^l (K_s^l - K_f^l)}$; K_s^l — объемный модуль зерен скелета; K_f^l — объемный модуль наполнителя; ρ^l, ρ_a^l, ρ_f^l — плотности скелета, присоединенной массы и жидкой среды соответственно; $\chi = 0$ для вязкоупругого случая, $\chi = 1$ для пороупругого случая. Для анизотропного случая имеем [35]

$$L(s,\partial) = \begin{bmatrix} \tilde{Q}^l(\partial) - s^2(\rho^l I - \gamma\rho_f^{l2}(m^l)^{-1}) & -\chi(b^l(\partial))^{\mathrm{T}} \\ \chi s b^l(\partial) & -\chi s(\varkappa^l(\partial) - (M^l)^{-1}) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}_{ik}^l(\partial) = (C_{ijkn}^l - \chi(M^l)^{-1} M_{ij}^l M_{kl}^l)\partial_j\partial_n, \qquad b_i^l(\partial) = -[(M^l)^{-1}M_{ij}^l + \rho_f^l(m^l)_{ij}^{-1}]\partial_j,$$

$$\varkappa^l(\partial) = (m^l)_{ij}^{-1}\partial_i\partial_j,$$

где коэффициенты M^l — модуль Био; $M_{ij}^l = M_{ji}^l$ — компоненты тензора Био, описывающие взаимодействие скелета и наполнителя; $m_{ij}^l(s) = m_{ji}^l(s)$ — линейные вязкодинамические операторы, ассоциированные с подвижностью порового наполнителя и проницаемостью; C_{ijkn}^l — матрица параметров упругого скелета.

При использовании интегрального преобразования Лапласа полагается, что функция $\boldsymbol{v}^l(x,t)$ и ее производные по времени удовлетворяют нулевым начальным условиям.

Для описания вязкоупругих свойств применяются определяющие соотношения

$$\sigma_{ij} = 2G^l(t) * \varepsilon_{ij} = 2\int\limits_0^t G^l(t-\tau)\,d\varepsilon_{ij}(\tau),$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,J^l(t) * \sigma_{ij} = \frac{1}{2}\int\limits_0^t J^l(t-\tau)\,d\sigma_{ij}(\tau), \qquad i \ne j.$$

Вид функций G^l, J^l определяется моделью вязкоупругого материала. Для модели Кельвина — Фойгта имеем

$$J(t) = J(0)(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}),$$

для модели со слабосингулярным ядром Абеля —

$$\frac{dG(t)}{dt} = at^{-\delta},$$

где β — величина, обратная характерному времени ползучести; $0 < \delta < 1$.

Для полупространств Ω_l примем следующие граничные условия:

$$v_p^l(x,s) = f_p^l(x,s), \qquad x \in S^u \cap S_l, \quad p = \overline{1,4},$$

$$\tilde{t}_p^l(x,s) = g_p^l(x,s), \qquad x \in S^\sigma \cap S_l,$$

$$v_p^l(x,s) = v_p^l(x,s), \qquad \tilde{t}_p^l(x,s) = -\tilde{t}_p^l(x,s), \qquad x \in S'_{ls}.$$

Здесь S_l^u, S_l^σ — участки границы S_l полупространства Ω_l, на которых заданы соответственно перемещения и поверхностные силы; S'_{ls} — граница области контакта полупространств Ω_l и Ω_s; $f_p^l(x,s)$, $g_p^l(x,s)$ — заданные функции координат и параметра преобразования Лапласа.

Для однородного тела запишем интегральное представление

$$v(x,s)=\int\limits_S \Gamma^0(x,y,s)\tilde{t}(y,s)\,d_yS-\int\limits_S \Gamma^1(x,y,s)v(y,s)\,d_yS,$$

где Γ^0, Γ^1 — компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений, имеющие следующий вид:

— в случае вязкоупругого тела

$$\Gamma^0_{ij}\equiv U_{ij},\qquad \Gamma^1_{ij}\equiv T_{ij},\qquad i=\overline{1,3},\quad j=\overline{1,3};$$

— в случае пороупругого тела

$$\Gamma^0_{ij}\equiv\begin{bmatrix}\tilde{U}^s_{ij} & -\tilde{P}^s_j\\ \tilde{U}^f_i & -\tilde{P}^f\end{bmatrix},\qquad \Gamma^1_{ij}\equiv\begin{bmatrix}\tilde{T}^s_{ij} & -\tilde{Q}^s_j\\ \tilde{T}^f_i & -\tilde{Q}^f\end{bmatrix}.$$

Выражения для компонент приведены в [36, 37].

Таким образом, система гранично-интегральных уравнений принимает вид [36, 37]

$$Cv(x,s)=\int\limits_S \Gamma^0(x,y,s)\bar{t}(y,s)\,d_yS-\int\limits_S \Gamma^1(x,y,s)v(y,s)\,d_xS,\qquad C\equiv\begin{bmatrix}c_{ij} & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}.$$

Для численного обращения преобразования Лапласа используем алгоритм Дурбина [38]

$$F_k=\mathrm{Re}\,[\bar{f}(\omega_0+i\omega_k)],\qquad G_k=\mathrm{Im}\,[\bar{f}(\omega_0+i\omega_k)],$$

$$\Delta_k=\omega_{k+1}-\omega_k,\qquad f(0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(F_k+F_{k+1})\Delta_k}{2\pi},$$

$$f(t)\approx\frac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{\pi t^2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{F_{k+1}-F_k}{\Delta_k}\left(\cos\left(\omega_{k+1}t\right)-\cos\left(\omega_k t\right)\right)-\frac{G_{k+1}-G_k}{\Delta_k}\left(\sin\left(\omega_{k+1}t\right)-\sin\left(\omega_k t\right)\right)\Big).$$

При построении шаговой схемы используется метод квадратур сверток. Аппроксимация интеграла свертки

$$y(t)=f(t)*g(t)=\int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

имеет вид

$$y(n\Delta t)=\sum_{k=0}^{n}\omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t),\qquad n=0,1,\ldots,N,$$

$$\omega_n(\Delta t)=\frac{r^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\bar{f}\Big(\frac{\gamma(r\,\mathrm{e}^{2\pi il/L})}{\Delta t}\Big)\,\mathrm{e}^{-2\pi inl/L}.$$

На основе регуляризованного гранично-интегрального уравнения строится его дискретный аналог, детальное описание которого приведено в [31].

2. Результаты численных расчетов. Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы на поверхность составного пороупругого полупространства (рис. 1). Дневная поверхность полупространства является свободной и проницаемой: поровое давление $p=0$, поверхностные силы равны $t_i(t)=0$ $(i=\overline{1,3})$, за исключением участка $abcd$ площадью 1 м^2,

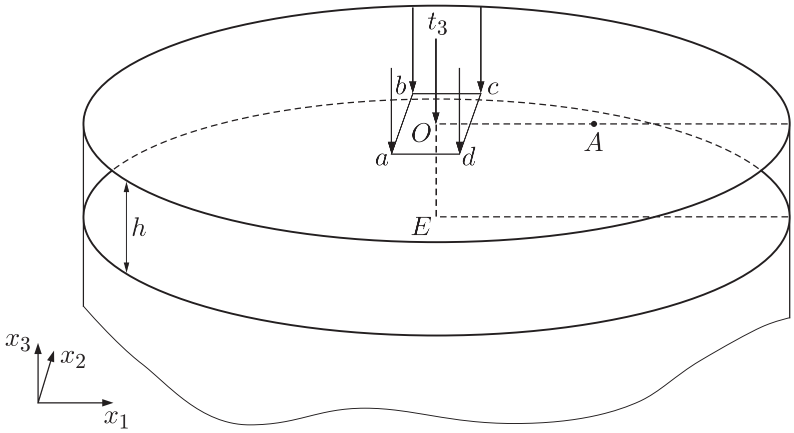

Рис. 1. Схема задачи для составного полупространства

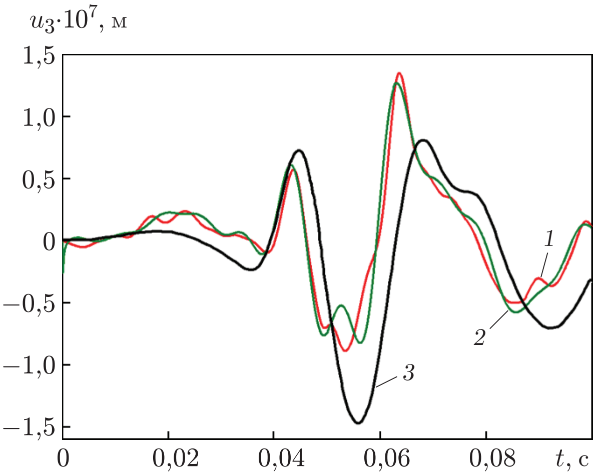

Рис. 2. Зависимость вертикальных перемещений в точке A от времени для двухслойного полупространства (верхний слой толщиной 5 м — песок, нижний — скальная порода), полученная с использованием различных методов:
1 — шаговый метод, *2* — метод Дурбина ($\alpha = 5$), *3* — гранично-элементное решение [27]

на котором $t_3(t) = t^0 H(t)$, $t^0 = -1000$ Н/м^2. Исследовалось перемещение тела в точке A, находящейся на расстоянии $L = 10$ м от источника силы. Гранично-элементная сетка состоит из 1536 элементов на дневной поверхности и 1536 элементов в области контакта.

Пусть слой песка с параметрами $K = 2{,}1 \cdot 10^8$ Н/м^2, $G = 9{,}8 \cdot 10^7$ Н/м^2, $\rho = 1884$ кг/м^3, $\varphi = 0{,}48$, $K_s = 1{,}1 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $K_f = 3{,}3 \cdot 10^9$ Н/м^2, $k = 3{,}55 \cdot 10^{-9}$ м^4/(Н · с) [27] расположен поверх скального полупространства с параметрами $K = 8 \cdot 10^9$ Н/м^2, $G = 6 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho = 2458$ кг/м^3, $\varphi = 0{,}19$, $K_s = 3{,}6 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $K_f = 3{,}3 \cdot 10^9$ Н/м^2, $k = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м^4/(Н · с). На рис. 2 показаны вертикальные перемещения в точке A, полученные с использованием различных методов при толщине верхнего слоя $h = 5$ м. Видно, что в момент времени $t \approx 0{,}006$ с в точку A приходит волна сжатия, при $t = 0{,}04$ с существенное влияние на перемещения оказывает волна Рэлея, при $t > 0{,}06$ с в точку A приходит отраженная от скального полупространства волна сжатия.

Рассмотрим задачу о действии нагрузки на дневную поверхность двухслойного полупространства (анизотропный слой на изотропном полупространстве). На участке, име-

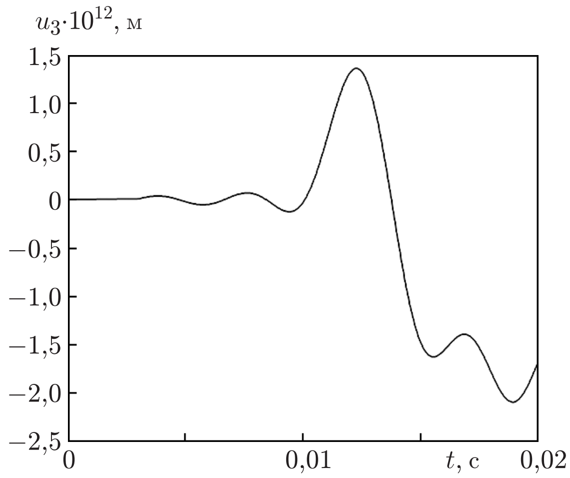

Рис. 3. Зависимость вертикальных перемещений в точке $A(23, 0, 0)$ от времени для двухслойного полупространства (верхний слой толщиной $h = 10$ м — анизотропный, нижний — изотропный)

ющем форму круга с единичным радиусом дневной поверхности и центром в точке O (см. рис. 1), задана нормальная нагрузка в виде функции Хевисайда $t_3 = \tilde{t}_3 H(t)$, $\tilde{t}_3 = 1$ Н/м^2. Изотропное основание имеет параметры $\lambda = 9 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\mu = 6 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho = 2300$ кг/м^3 [39], анизотропный слой — плотность $\rho = 2216$ кг/м^3, толщину $h = 10$ м и тензор упругих модулей [40]:

$$C = \begin{bmatrix} 17,77 & 3,78 & 3,76 & 0,24 & \text{-0,28} & 0,03 \\ & 19,45 & 4,13 & \text{-0,41} & 0,07 & 1,13 \\ & & 21,79 & \text{-0,12} & 0,01 & 0,38 \\ & & & 8,30 & 0,66 & 0,06 \\ & \text{symm.} & & & 7,62 & 0,52 \\ & & & & & 7,77 \end{bmatrix} \text{ Н/м}^2.$$

Определим перемещения u_3 в точке $A(23, 0, 0)$ (рис. 3). Результаты расчетов, проводившихся с использованием гранично-элементной сетки с 792 элементами, показывают, что приход волны Рэлея при $t \approx 0{,}0125$ с определяет начальную форму динамического отклика, а далее картина зависит от отраженных от полупространства волн. Вклад объемных волн незначителен.

Рассмотрим решение задачи о действии вертикальной поверхностной силы $t_3(t) = t_0(H(t) - H(t - 0{,}0085))$ на изотропное вязкоупругое полупространство (см. рис. 1) с параметрами материала $E = 1{,}38 \cdot 10^8$ Н/м^2, $\nu = 0{,}35$, $\rho = 1966$ кг/м^3 ($c_1 = 335{,}64$ м/с, $c_2 = 161{,}24$ м/с, $c_R = 150{,}5$ м/с) при $t_0 = 1$ Н/м^2. В качестве точки наблюдения выберем точку A с координатами $(2{,}3333; 2{,}3333; 0)$. Решение строится с использованием метода Дурбина. На рис. 4, 5 показано влияние вязкости на поведение функции перемещения. На рис. 4 приведены результаты численных расчетов с использованием модели Кельвина — Фойгта ($\lambda(\infty) = \lambda$, $\mu(\infty) = \mu$) при различных значениях параметра вязкости β. На рис. 5 приведены результаты численных расчетов с использованием модели со слабосингулярным ядром Абеля при $\delta = 0{,}95$ и различных значениях параметра a.

Результаты гранично-элементного решения показывают, что в случае нагрузки Хевисайда максимальное перемещение имеет место, когда волна Рэлея приходит в точку A. Результаты исследований влияния вязкости материала на поведение перемещений показывают, что при использовании модели Кельвина — Фойгта существенно меняется характер

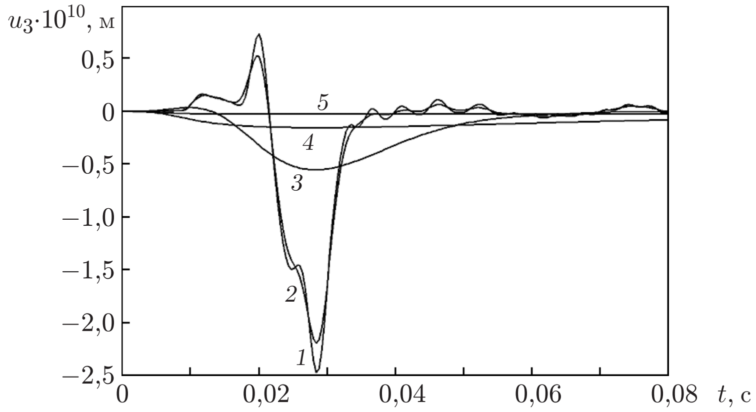

Рис. 4. Зависимость вертикальных перемещений в точке $A(2{,}3333; 2{,}3333; 0)$ от времени для изотропного вязкоупругого полупространства при различных значениях параметра вязкости:

1 — гранично-элементное решение для упругого случая ($\beta = 0$), *2–5* — модель Кельвина — Фойгта (*2* — $\beta = 100$; *3* — $\beta = 1$; *4* — $\beta = 0{,}1$; *5* — $\beta = 0{,}01$)

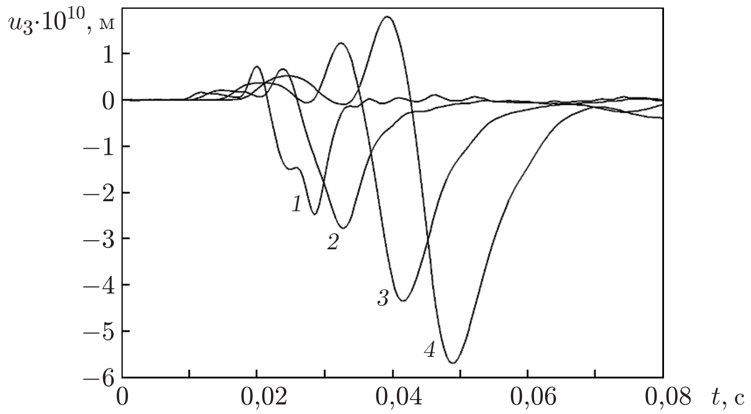

Рис. 5. Зависимость вертикальных перемещений в точке $A(2{,}3333; 2{,}3333; 0)$ от времени для изотропного вязкоупругого полупространства при $\delta = 0{,}95$ и различных значениях параметра a:

1 — гранично-элементное решение для упругого случая, *2–4* — модель Абеля (*2* — $a = 5$, *3* — $a = 10$, *4* — $a = 15$)

распространения поверхностных волн, однако имеются диапазоны характерных времен ползучести, в которых изменения проявляются лишь в уменьшении амплитуды отклика. При использовании модели со слабосингулярным ядром изменяются скорость распространения волны и амплитуда перемещений в точке A.

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы на поверхность полупространства с полостью (см. рис. 1) — сферической или кубической. Пусть точка E — центр полости в полупространстве, на участок $abcd$ площадью $S = 1$ м^2 дневной поверхности полупространства при $t_0 = 1$ Н/м^2 действует вертикальная сила $t_3(t) = t_0 H(t)$. Гранично-элементная сетка строится с учетом двух плоскостей симметрии; 1/4 сетки содержит 864 элемента и 913 точек для полупространства, 150 элементов и 171 точку для полости. Рассматриваются два варианта задачи: 1) на глубине $h = 7{,}5$ м расположен центр сферической полости радиусом $r = 5$ м; 2) на глубине $h = 7{,}5$ м расположен центр кубиче-

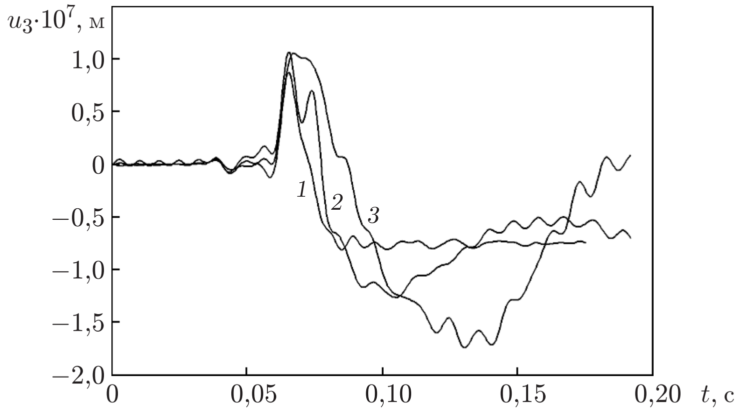

Рис. 6. Зависимость от времени вертикальных перемещений в точке A, расположенной на расстоянии $L = 15$ м от точки приложения силы, для полупространства без полости (*1*), со сферической (*2*) и кубической (*3*) полостями

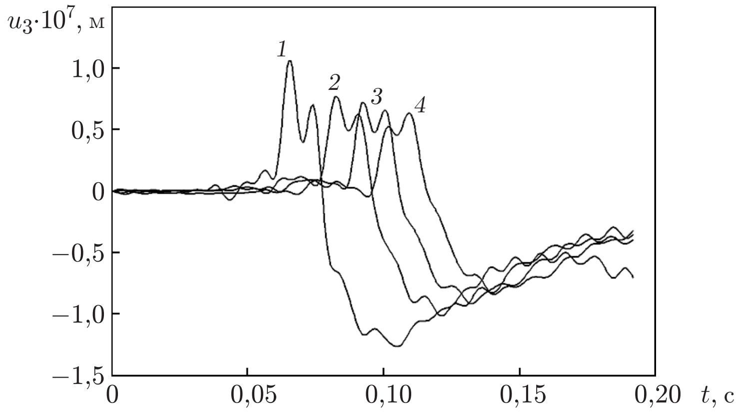

Рис. 7. Зависимость от времени вертикальных перемещений в точке A, расположенной на различных расстояниях от источника нагружения, для полупространства со сферической полостью:

1 — $L = 15$ м, *2* — $L = 19$ м, *3* — $L = 21{,}25$ м, *4* — $L = 23{,}5$ м

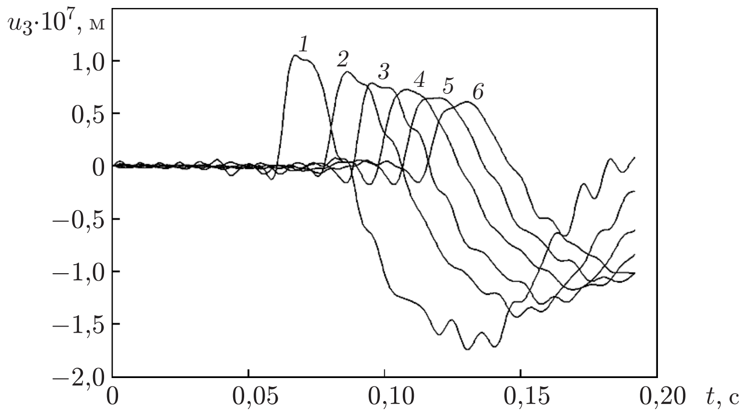

Рис. 8. Зависимость от времени вертикальных перемещений в точке A, расположенной на различных расстояниях от источника нагружения, для полупространства с кубической полостью:

1 — $L = 15$ м, *2* — $L = 19$ м, *3* — $L = 21{,}25$ м, *4* — $L = 23{,}5$ м, *5* — $L = 25{,}5$ м, *6* — $L = 27{,}5$ м ской полости с длиной ребра куба 10 м. Для материала выбраны следующие параметры: $E = 2{,}5 \cdot 10^8$ Н/м^2, $\nu = 0{,}298$, $\rho = 1884$ кг/м^3, $c_1 = 425$ м/с, $c_2 = 228$ м/с.

На рис. 6 показаны перемещения во времени на поверхности полупространства на расстоянии 15 м от точки приложения силы.

На рис. 7 показаны перемещения для полупространства со сферической полостью, расположенной на различных расстояниях от источника нагружения.

На рис. 8 показаны перемещения для полупространства с кубической полостью, расположенной на различных расстояниях от источника нагружения.

На рис. 7, 8 видно, что при наличии полости форма отклика меняется по сравнению со случаем полупространства без полости и зависит от формы полости: в случае сферической полости в момент прихода поверхностной волны имеется два всплеска, в случае кубической полости появляется интервал времени, на котором перемещения постоянны.

Заключение. С использованием гранично-элементного метода исследованы волновые процессы в упругом (изотропном и анизотропном), вязкоупругом и пороупругом полупространствах: однородных, двухслойных сплошных или ослабленных сферической либо кубической полостью. Установлено, что параметры вязкости и пористости оказывают существенное влияние на характер распределения волновых процессов. Показана зависимость поверхностных перемещений от расстояния до источника возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Cruse T. A., Rizzo F. J.** A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. Pt 1 // J. Math. Anal. Appl. 1968. N 22. P. 244–259.
2. **Cruse T. A., Rizzo F. J.** A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. Pt 2 // J. Math. Anal. Appl. 1968. N 22. P. 341–355.
3. **Mansur W. J., Brebbia C. A.** Transient elastodynamics using a time-stepping technique // Boundary elements. Berlin: Springer-Verlag, 1983. P. 677–698.
4. **Beskos D. E.** Boundary element methods in dynamic analysis // Appl. Mech. Rev. 1987. V. 40, N 1. P. 1–23.
5. **Beskos D. E.** Boundary element methods in dynamic analysis. Pt 2. 1986–1996 // Appl. Mech. Rev. 1997. V. 50, N 3. P. 149–197.
6. **Баженов В. Г.** Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В. Г. Баженов, Л. А. Игумнов. М.: Физматлит, 2008.
7. **Угодчиков А. Г.** Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А. Г. Угодчиков, Н. М. Хуторянский. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986.
8. **Gaul L., Schanz M.** BEM formulation in time domain for viscoelastic media based on analytical time integration // Proc. of the 14th Intern. conf. on boundary element methods, Sevilla (Spain), Nov. 3–6, 1992 / Ed. by C. A. Brebbia, J. Dominguez, F. Paris. Southampton: S. n., 1992. V. 2. P. 223–234.
9. **Игумнов Л. А., Хуторянский Н. М., Турилов В. В.** Разработка метода граничновременных элементов для решения трехмерных динамических задач теории упругости и вязкоупругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всерос. межвуз. сб. М.: Товарищество науч. изд. КМК, 1995. С. 186–201.
10. **Schanz M., Gaul L.** Implementation of viscoelastic behaviour in a time domain boundary element formulation // Appl. Mech. Rev. 1993. V. 46, N 11, pt 2. P. S41–S46.
11. **Schanz M., Antes H.** Application of “Operational quadrature methods” in time domain boundary element methods // Mechanica. 1997. V. 32, N 3. P. 179–186.

12. **Hackbusch W., Kress W., Sauter S.** Sparse convolution quadrature for time domain boundary integral formulations of the wave equation by cutoff and panel-clustering // Lecture Notes Appl. Comput. Mech. 2007. V. 29. P. 113–134.
13. **Lubich C.** On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equation // Numer. Math. 1994. N 67. P. 365–389.
14. **Lubich C., Schneider R.** Time discretization of parabolic boundary integral equations // Numer. Math. 1992. N 63. P. 455–481.
15. **Nardini D., Brebbia C. A.** A new approach to free vibration analysis using boundary elements // Boundary element methods / Ed. by C. A. Brebbia. Berlin: Springer-Verlag, 1982. P. 312–326.
16. **Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.** Интегральный и дифференциальный методы факторизации в задачах для сплошных сред // Тез. докл. 9-го Всерос. съезда по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 18–22 авг. 2006 г. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2006. С. 12.
17. **Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.** Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // Докл. АН. 2006. Т. 410, № 2. С. 168–172.
18. **Ватульян А. О.** О граничных интегральных уравнениях I-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости // Докл. АН. 1993. Т. 333, № 3. С. 312–314.
19. **Ватульян А. О., Садчиков Е. В.** О неклассической формулировке граничных интегральных уравнений в задачах о колебаниях вязкоупругих анизотропных тел // Тр. 5-й Междунар. конф. "Современные проблемы механики сплошных сред", Ростов-на-Дону, 12–14 окт. 1999 г. Ростов н/Д: Изд-во Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк., 1999. С. 53–57.
20. **Игумнов Л. А.** Граничные интегральные уравнения трехмерных задач на плоских волнах // Докл. АН. 2006. Т. 409, № 5. С. 1–3.
21. **Бабешко В. А., Белянкова Т. И., Калинчук В. В.** Метод фиктивного поглощения в задачах теории упругости для неоднородного полупространства // Прикл. механика и математика. 2002. Т. 66, вып. 2. С. 276–284.
22. **Бабешко В. А., Калинчук В. В.** Метод фиктивного поглощения в связанных смешанных задачах теории упругости и математической физики для слоисто-неоднородного полупространства // Прикл. механика и математика. 2002. Т. 66, вып. 2. С. 285–292.
23. **Ворович Е. И., Зайцева И. А., Калинчук В. В.** Некоторые динамические связанные задачи для электроупругого слоя // Тр. 4-й Междунар. конф. "Современные проблемы механики сплошной среды", Ростов-на-Дону, 27–28 окт. 1998 г. Ростов н/Д: Изд-во Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк., 1999. Т. 1. С. 107–110.
24. **Калинчук В. В., Белянкова Т. И.** К проблеме исследования динамических смешанных задач электроупругости и термоупругости для слоисто-неоднородного полупространства // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 74–76.
25. **Halpern M. R., Christiano P.** Response of poroelastic halfspace to steady-state harmonic surface tractions // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 1986. N 10. P. 609–632.
26. **Paul S.** On the displacements produced in a porous elastic half-space by an impulsive line load (non-dissipative case) // Pure Appl. Geophys. 1976. V. 114, N 4. P. 605–614.
27. **Schanz M., Antes H.** Waves in poroelastic half space: Boundary element analyses // Porous media: theory, experiments, and numerical applications. Berlin: Springer, 2002. P. 383–412.
28. **Kausel E.** Discussion on "dynamic response of a multi-layered poroelastic medium" // Earthquake Engng Struct. Dynamics. 1996. V. 25, N 10. P. 1165–1167.
29. **Igumnov L. A., Litvinchuk S. Y., Petrov A. N., Belov A. A.** Boundary-element modeling of 3-D poroelastic half-space dynamics // Adv. Materials Res. 2014. V. 1040. P. 881–885.

30. **Игумнов Л. А., Аменицкий А. В., Белов А. А. и др.** Численно-аналитическое исследование динамики вязко- и пористо-упругих тел // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 1. С. 108–114.
31. **Карелин И. С.** Моделирование динамики пороупругих составных тел методом граничных элементов с использованием параллельных вычислений // Вестн. Нижегор. гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского. Сер. Механика. 2011. № 4. С. 1518–1519.
32. **Igumnov L. A., Markov I. P., Rataushko Y. Y.** Modeling the dynamics of 3-D elastic anisotropic solids using boundary element method // Adv. Mater. Res. 2014. V. 1040. P. 633–637.
33. **Wang C. Y., Achenbach J. D.** Elastodynamic fundamental solution for anisotropic solids // Geophys. J. Intern. 1994. V. 118. P. 384–392.
34. **Wang C. Y., Achenbach J. D.** Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 449. P. 441–458.
35. **Norris A.** Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids // Proc. Roy. Soc. London. A. 1994. V. 447. P. 175–188.
36. **Аменицкий А. В., Игумнов Л. А., Карелин И. С.** Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2008. Вып. 70. С. 71–78.
37. **Аменицкий А. В., Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С.** Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2009. Вып. 71. С. 164–171.
38. **Durbin F.** Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // Computer J. 1974. V. 17, N 4. P. 371–376.
39. **Kumar Vishwakarma S., Gupta S.** Rayleigh wave propagation: A case wise study in a layer over a half space under the effect of rigid boundary // Arch. Civil. Mech. Engng. 2014. V. 14. P. 181–189.
40. **Rasolofosaon P., Zinszner B.** Comparison between permeability anisotropy and elasticity anisotropy of reservoir rocks // Geophysics. 2002. V. 67, N 1. P. 230–240.

Поступила в редакцию 8/VI 2015 г.,
в окончательном варианте — 9/IX 2015 г.