

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН
НАПРЯЖЕНИЯ ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ
В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

И. Т. Селезов

(Киев)

Исследуется влияние постоянного осевого магнитного поля на распространение магнитоупругих волн сжатия от полости, внутри которой — магнитоакустическая среда, а на стенке задан скачок поверхностной силы. В работе [1] рассматривается задача в случае, когда в полости — вакуум, а вне полости — идеальный проводник. Влияние магнитного поля не исследуется.

Здесь рассматриваются две задачи: для слабой и идеальной проводимостей. Уравнения линеаризуются и преобразуются по Лапласу. Построены приближенные асимптотические решения, справедливые в окрестности фронтов волн. Решения исследованы аналитически и численно.

1. Если принять, что для магнитоупругой среды выполняются условия упругой изотропности, геометрической и упругой линейности, изотропности диэлектрической и магнитной проницаемостей, то система уравнений магнитоупругости записывается в виде

$$G\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + G)\text{grad div } \mathbf{u} = \rho_c \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \rho_e \mathbf{E} - \mathbf{F} \quad (1.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho_e \quad (1.2)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right), \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.3)$$

При аналогичных предположениях уравнения магнитоакустической среды имеют следующий вид:

$$-\text{grad } p = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{j}^a \times \mathbf{B}^a - \rho_e^a \mathbf{E}^a - \mathbf{F}^a \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad p = p(\rho) \quad (1.5)$$

Система (1.4), (1.5) дополняется также уравнениями, аналогичными (1.2), (1.3).

Граничные условия на поверхности раздела двух сред, вытекающие из законов сохранения

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = v_n, \quad (\sigma_{ik} + T_{ik}) n^i = (\sigma_{ik}^a + T_{ik}^a) n^i + Q_k \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}^a) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}^a) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}^a) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}^a) = 0 \quad (1.7)$$

Здесь

$$\sigma_{ik} = c_{ijkl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right), \quad T_{ik} = \epsilon E_i E_k + \mu H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

В дальнейшем принимаем, что в каждой из сред отсутствуют массовые силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}^a = 0$ и свободные электрические заряды $\rho_e = \rho_e^a = 0$. В магнитоупругой среде будем пренебрегать также токами смещения $\partial D / \partial t = 0$, а магнитоакустическую среду будем считать непроводящей $\sigma^a = 0$ и удовлетворяющей условию изэнтропичности. Магнитное поле представим в виде суммы невозмущенной и возмущенной составляющих $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$, причем $|\mathbf{h}| \ll |\mathbf{H}_0|$, что позволяет линеаризовать все уравнения.

С учетом указанных предположений после некоторых преобразований получаем из уравнений (1.1) — (1.3) для магнитоупругой среды

$$G \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + G) \text{grad div } \mathbf{u} = \rho_c \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mu (\text{rot } \mathbf{h}) \times \mathbf{H}_0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \mathbf{h} + \text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \right), \quad \text{div } \mathbf{h} = 0 \quad (1.9)$$

и из уравнений (1.4) и (1.5) для магнитоакустической среды

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left\{ \begin{matrix} \mathbf{h}^a \\ \mathbf{e}^a \end{matrix} \right\} = 0 \quad (1.10)$$

$$\text{rot } \mathbf{h}^a = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}^a}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{e}^a = -\mu \frac{\partial \mathbf{h}^a}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = -\text{grad } \varphi, \quad p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.11)$$

В случае слабой проводимости все величины можно разложить по малому магнитному числу Рейнольдса R_m и сохранить в уравнениях члены первого порядка малости [2]. В таком приближении индуцированные магнитные поля оказываются величинами более высокого порядка малости [3]. В этом случае последний член в уравнении (1.8) и первое уравнение (1.9) принимают вид

$$-\mu \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \right) \times \mathbf{H}_0, \quad \text{rot } \mathbf{h} = \frac{\mu \sigma}{R_m} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \quad (1.12)$$

В случае идеальной проводимости последний член в уравнении (1.8), уравнение (1.9) и первое уравнение (1.3) приводятся к виду

$$-\mu [\text{rot rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0)] \times \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{h} = \text{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0), \quad \mathbf{e} = -\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \quad (1.13)$$

2. Рассмотрим в цилиндрической системе координат r, θ, z магнитоупругую среду с цилиндрической полостью радиуса a , заполненной магнитоакустической средой, при действии невозмущенного магнитного поля $(0, 0, B_{0z})$ и действии на стенку полости нагрузки $Q_r = -q_0 s(t)$, где $s(t)$ — функция Хевисайда.

Вводя безразмерные параметры по формулам

$$\begin{aligned} (r^*, u_r^*) &= \frac{1}{a} (r, u_r), \quad t^* = \frac{c_e}{a} t, \quad (v^*, c^*) = \frac{1}{c_e} (v, c) \\ (\sigma_{ik}^*, q_0^*) &= \frac{\mu}{\lambda + 2G} (\sigma_{ik}, q_0), \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi}{c_e a}, \quad h_i^* = \frac{h_i}{H_{0z}} \\ e_i^* &= \frac{e_i}{\mu H_{0z} c_e}, \quad R_m = \mu \sigma c_e a, \quad P_H = \frac{\mu H_{0z}^2}{\lambda + 2G} \end{aligned}$$

и опуская звездочки, получаем из уравнений (1.10) и (1.14) в области $0 < r < a$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_z^a = 0 \quad (2.1)$$

$$-\frac{\partial h_z^a}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial e_\theta^a}{\partial t}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r e_\theta^a = -\frac{\partial h_z^a}{\partial t} \quad (2.2)$$

Из уравнений (1.8), (1.9), (1.12) и (1.13) в области $a \leq r \leq \infty$ получаем в случае слабой проводимости

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right) u_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + R_m P_H \frac{\partial}{\partial t}\right) u_r, \quad \frac{\partial h_z}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial t} \quad (2.3)$$

в случае идеальной проводимости

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right) u_r = \frac{1}{1+P_H} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad h_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \ddot{u}_r, \quad e_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial t} \quad (2.4)$$

Из условий (1.6) и (1.7) определяем линеаризованные граничные условия на поверхности $r = 1$ (приведены все условия, кроме тождественно удовлетворяющихся). В случае слабой проводимости

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{\lambda + 2G} u_r = \\ & = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = q_0 s(t) + \frac{1}{2} P_H \left(1 - \frac{\mu^a}{\mu}\right) + P_H \left(R_m h_z - \frac{\mu^a}{\mu} h_z^a\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial t}, \quad R_m h_z = h_z^a \quad (2.6)$$

В случае идеальной проводимости последний член в уравнении (2.5) и второе уравнение (2.6) заменяются следующими:

$$P_H \left(h_z - \frac{\mu^a}{\mu} h_z^a\right), \quad e_\theta = e_\theta^a \quad (2.7)$$

Кроме того, искомые функции должны удовлетворять условиям излучения и ограниченности при $r \rightarrow \infty$.

Начальные условия принимаются нулевые.

Отметим, что первые уравнения в (2.3) и (2.4), в которые входят члены, учитывающие влияние магнитного поля, являются независимыми, т. е. системы уравнений в каждом из рассматриваемых приближений частично распались. Но в граничных условиях (2.5) — (2.7) связь между упругим и электромагнитным полями остается.

В дальнейшем будем рассматривать немагнитиваемые среды $\mu = \mu^a$, тогда граничные условия упрощаются. В случае слабой проводимости, как видно из условий (2.5) и (2.6), связь между полями исчезает и в граничных условиях, т. е. можно независимо определить поле упругих перемещений, а затем электромагнитное поле. Аналогичное упрощение имеет место и в магнитной гидродинамике [2]. В случае идеальной проводимости при $\mu = \mu^a$, как видно из формул (2.7), связь между полями в граничных условиях остается.

3. Уравнения (2.1) — (2.7) преобразуются по Лапласу

$$F(r, \kappa) = \int_0^{\infty} f(r, t) \exp(-\kappa t) dt$$

Решения в пространстве изображений, удовлетворяющие граничным и начальным условиям, записываются в случае слабой проводимости

$$\Phi = q_0 c_0 \frac{I_0(\kappa r / c_0)}{\kappa \Delta I_1(\kappa / c_0)} \quad (0 < r < a) \quad (3.1)$$

$$U_r = -q_0 \frac{K_1(\Omega r)}{\kappa \Delta K_1(\Omega)}, \quad \Sigma_{rr} = -\frac{q_0}{\kappa \Delta K_1(\Omega)} \left[\Omega K_1'(\Omega r) + \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \frac{1}{r} K_1(\Omega r) \right] \quad (a \leq r \leq \infty) \quad (3.2)$$

Здесь $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя, $K_1(z)$ — функция Макдональда

$$\Omega = \sqrt{\kappa^2 + R_m P_H \kappa}, \quad \Delta = \frac{\lambda}{\lambda + 2G} + \Omega \frac{K_1'(\Omega)}{K_1(\Omega)} - \rho_0 c_0 \kappa \frac{I_0(\kappa / c_0)}{I_1(\kappa / c_0)} \quad (3.3)$$

В случае идеальной проводимости

$$\begin{aligned} & (0 < r < a) \quad (a \leq r \leq \infty) \\ \Phi &= -q_0 c_0 \frac{I_0(\kappa r / c_0)}{\kappa \Delta_1 I_1(\kappa / c_0)}, \quad U_r = q_0 \frac{K_1(\kappa_1)}{\kappa \Delta_1} K_1(\kappa_1 r) \\ H_z^a &= -\frac{q_0}{c_1} \frac{I_0(\kappa r / c_1)}{\Delta_1 I_1(\kappa / c_1)}, \quad H_z = \frac{q_0}{\sqrt{1 + P_n}} \frac{K_1(\kappa_1)}{\Delta_1} K_0(\kappa_1 r) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$E_\theta^a = q_0 \frac{I_1(\kappa r / c_1)}{\Delta_1 I_1(\kappa / c_1)}, \quad E_\theta = q_0 \frac{K_1(\kappa_1)}{\Delta_1} K_1(\kappa_1 r)$$

$$\Sigma_{rr} = -q_0 \frac{K_1(\kappa_1)}{\kappa \Delta_1} \left[\kappa_1 K_0(\kappa_1 r) + \frac{2G}{\lambda + 2G} \frac{1}{r} K_1(\kappa_1 r) \right] \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\kappa}{\sqrt{1 + P_n}}, \quad \Delta_1 = \frac{2G}{\lambda + 2G} + \kappa \sqrt{1 + P_n} \frac{K_0(\kappa_1)}{K_1(\kappa_1)} + \\ &+ \rho_0 c_0 \kappa \frac{I_0(\kappa / c_0)}{I_1(\kappa / c_0)} + P_n \frac{\kappa}{c_1} \frac{I_0(\kappa / c_1)}{I_1(\kappa / c_1)} \end{aligned}$$

Отметим, что в выражениях для Δ и Δ_1 , входящих в формулы (3.1) — (3.5), первый и второй члены характеризуют магнитоупругость, третий — акустику, четвертый — электромагнитное поле в акустической среде.

Построить точное обращение полученных решений с помощью интеграла Римана — Меллина весьма затруднительно. Поэтому ниже построены приближенные асимптотические решения, справедливые вблизи фронта магнитоупругой волны.

Цилиндрические функции, входящие в выражения (3.1) — (3.5), заменяются их асимптотическими представлениями при больших κ , в которых удерживаются два члена. Сохраняя в выражениях (3.1) — (3.5) все члены до порядка $1/\kappa$ включительно и производя оценки отброшенных членов, получаем приближенные значения изображений, по которым затем определяем оригиналы. Приведем окончательные выражения для радиальных напряжений σ_{rr} .

Для слабопроводящей среды

$$\text{при } t > (r-1) \geq 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{q_0} \approx - \frac{\exp[-1/2 R_m P_H (r-1)]}{(1 + \rho_0 c_0) \sqrt{r}} \{s[t - (r-1)] + (A_0 + A_1 r^{-1}) [t - (r-1)]\}$$

при $t < (r-1)$

$$\sigma_{rr}/q_0 = 0$$

Для идеальнопроводящей среды (3.7)

$$\frac{\sigma_{rr}}{q_0} \approx - \frac{1}{A \sqrt{r}} \left\{ \frac{-\lambda + 14G}{\lambda + 2G} \frac{1}{r} + \left(\frac{A}{B \sqrt{1 + P_H}} - \frac{-\lambda + 14G}{\lambda + 2G} \right) \exp \left[- \frac{A}{B} \left(t - \frac{r-1}{\sqrt{1 + P_H}} \right) \right] \right\}$$

$$\text{при } t > \frac{r-1}{\sqrt{1 + P_H}} \geq 0$$

$$\sigma_{rr}/q_0 = 0 \quad \text{при } t < \frac{r-1}{\sqrt{1 + P_H}}$$

Здесь

$$A_0 = \frac{3/8 c_0 - 1/2 \rho_0 c_0^2 - 7/8 + \lambda/(\lambda + 2G) + 1/2 R_m R_H}{1 + \rho_0 c_0} - \frac{3}{8} c_0, \quad A_1 = \frac{7}{8} - \frac{\lambda}{\lambda + 2G}$$

$$A = - \frac{1}{8} + \frac{2G}{\lambda + 2G} + \frac{1}{2} \rho_0 c_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\sqrt{1 + P_H}}{c_0} \right) + \frac{3}{8} P_H \left(1 + \frac{\sqrt{1 + P_H}}{c_1} \right)$$

$$B = \sqrt{1 + P_H} + \rho_0 c_0 + \frac{P_H}{c_1} \quad (3.8)$$

Решение (3.6) получено с асимптотической погрешностью $[t - (r-1)] \ll 3/8 \varepsilon$, где ε — заданная точность вычислений. Решение (3.7) справедливо в очень малой окрестности фронта волны. При $[t - (r-1)] \rightarrow 0$ в (3.6) и $[t - (r-1)] / \sqrt{1 + P_H} \rightarrow 0$ в (3.7) эти решения переходят в точные для фронтов волн.

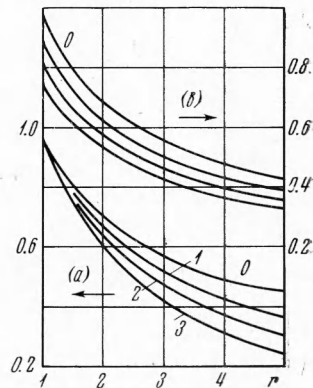
4. Исследуем влияние магнитного поля на σ_{rr} . В случае слабой проводимости из решения (3.6) видно, что при $r > 1$ с увеличением R_m и P_H величина $|\sigma_{rr}|$ убывает по экспоненциальному закону. За фронтом волны имеет место некоторое увеличение напряжений, что следует из (3.8): величина A_0 возрастает с увеличением $R_m P_H$.

В случае идеальной проводимости оценим прежде всего влияние электромагнитного поля магнитоакустической среды. В выражения (3.8) для A и B входят члены $\sqrt{1 + P_H} / c_1$ и P_H / c_1 , которые запишем в виде

$c_e / c_1 \sqrt{1 + P_H}$ и $c_e / c_1 P_H$ и будем сравнивать с единицей. Если исходить из того, что сильные постоянные магнитные поля, создаваемые в лабораторных условиях в настоящее время, имеют порядок 10^7 Гл [4,5], то указанные члены будут малы высшего порядка. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае в акустической среде (или вакууме) можно не учитывать токи смещения, если рассматриваются медленные движения в примыкающей магнитоупругой среде ($c_e / c_1 \ll 1$).

В случае идеальной проводимости с увеличением P_H увеличивается скорость распространения фронта волны в $\sqrt{1 + P_H}$ раз и уменьшается амплитуда фронта волны как $(B \sqrt{1 + P_H})^{-1}$: величина B , как это следует из (3.8), возрастает.

Наличие акустической среды уменьшает напряжения в обоих случаях, что объясняется ее инерционными и упругими свойствами.



5. В качестве примеров рассмотрим слабопроводящую среду типа висмут с проводимостью σ в 100 раз меньшей, чтобы выполнялось условие $R_m < 1$, и идеальнопроводящую среду типа медь с проводимостью $\sigma = \infty$. В полости принята акустическая среда со свойствами воды; параметры:

в первом случае (а)

$$\rho_0 / \rho_c = 0.102, \quad c_0 / c_e = 0.663, \quad \nu = 0.33$$

во втором случае (б)

$$\rho_0 / \rho_c = 0.113, \quad c_0 / c_e = 0.333, \quad c_1 / c_e = 0.686 \cdot 10^5, \quad \nu = 0.34$$

На фигуре изображены радиальные напряжения σ_{rr} , нормированные согласно (3.6) и (3.7), на фронтах волн в зависимости от расстояния r/a для слабопроводящей и идеальнопроводящей сред. Индексами 0, 1, 2, 3 обозначены величины $R_m P_n$ или P_n — 0, 0.1, 0.2, 0.3. Эти значения соответствуют сильным постоянным магнитным полям, которые на порядок выше получаемых в лабораториях [4,5].

6. Анализ решений (3.6), (3.7) и расчетов позволяет сделать следующие выводы:

- а) увеличение напряженности магнитного поля H_{0z} приводит к уменьшению $|\sigma_{rr}|$ на фронте волны как в случае слабой, так и идеальной проводимостей,
- б) за фронтом волны магнитное поле вызывает небольшое увеличение $|\sigma_{rr}|$ в обоих случаях,
- в) токи смещения в акустической среде (или вакууме) являются малыми высшего порядка, если $B \ll 10^4$ тл и в примыкающей магнитоупругой среде рассматриваются процессы со скоростями, не превышающими скорость воли расширения в упругой среде,
- г) наличие акустической среды в полости приводит к уменьшению $|\sigma_{rr}|$,
- д) влияние постоянного магнитного поля на магнитоупругие напряжения в ненамагничиваемых средах можно обнаружить в сверхсильных магнитных полях $B \geq 10^3$ тл.

В заключение автор благодарит Я. С. Уфлянда за обсуждение отдельных вопросов.

Поступила 2 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Sinha D. K. On disturbances in an infinite elastic medium containing a cylindrical cavity traversed by an axial magnetic field. Pure and Appl. Geophys., 1965/1, vol. 60, p. 23—28.
2. Селезов И. Т., Селезова Л. В. Обтекание колеблющейся границы ионизированным газом при действии магнитного поля. Магнитн. гидродинамика, 1967, № 1.
3. Уфлянд Я. С. Об одном приближенном способе решения задач магнитоупругости для тел конечной проводимости. ПМТФ, 1965, № 2.
4. Казовский Е. Я., Карцев В. П., Шахтари В. Н. Сверхпроводящие магнитные системы. Л., «Наука», 1967.
5. Кольм Г., Фриман А. Сильные магнитные поля. Успехи физ. наук, 1966, т. 88, вып. 4.