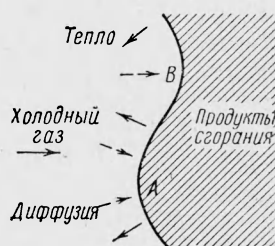


О ДИФФУЗИОННО-ТЕПЛОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ЛАМИНАРНОГО ПЛАМЕНИ

Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович, А. Г. Истратов

(Москва)

§ 1. Введение. Вопрос об устойчивости пламени имеет несколько различных аспектов и возникает немедленно после того как доказано существование решения, описывающего стационарный режим горения. Напомним, что предположение о стационарности решения является идеализацией постановки задачи. Эта идеализация оправдана только в том случае, когда стационарное решение представляет собой предел, к которому стремятся с течением времени решения определенного класса нестационарных задач. Для этого необходимо, чтобы стационарное решение было устойчивым. При исследовании горения в техническом аппарате представляет интерес выяснение устойчивости процесса в целом, включая подачу топлива, отвод продуктов горения, теплоотвод и т. п. Для того чтобы решить этот вопрос, нужно сначала убедиться в том, что устойчив отдельный небольшой элемент поверхности пламени при условии, что гидродинамические и тепловые условия на достаточном расстоянии с обеих сторон поверхности поддерживаются постоянными.



Л. Д. Ландау [1] показал гидродинамическую неустойчивость пламени. При этом пламя рассматривалось им как поверхность разрыва, на которой меняются скачком температура, плотность и скорость движения газа. Сама скорость движения пламени относительно горящего вещества, определяемая химической кинетикой, считалась постоянной и заданной. В этих предположениях оказалось, что пламя всегда неустойчиво и что скорость нарастания возмущений обратно пропорциональна длине волны возмущения. Таким образом, факторы, влияющие на возмущения с коротким периодом, имеют основное значение в вопросе об устойчивости. Наряду с тривиальным влиянием вязкости существенное влияние на развитие возмущений оказывают диффузия реагирующих веществ и теплопроводность. Вследствие диффузии и теплопроводности возмущения влияют на температуру пламени, и скорость пламени относительно газа не может уже считаться постоянной. Влияние изменения скорости пламени при искривлениях его поверхности на гидродинамическую неустойчивость рассматривалось Маркштейном [2].

На первый взгляд, имея в виду один только тепловой аспект вопроса об устойчивости, можно было бы предположить, что пламя всегда устойчиво. В самом деле, участок А, выпуклый в сторону свежей смеси (фигура), отдает больше тепла, чем плоский участок фронта, так что скорость пламени в точке А должна, казалось бы, быть меньше нормальной. Напротив, газ, поступающий слева в точку В, нагревается не только спереди, но и сбоку, что должно облегчать и ускорять его горение. Увеличение скорости горения на вогнутых участках и уменьшение ее на выпуклых участках, очевидно, приводит к выравниванию фронта, т. е. обуславливает устойчивость плоского пламени.

Однако, по замечанию одного из авторов [3], рассмотрение диффузии горючего может изменить этот результат, так как к выпуклым участкам притекает больше горючего, а к вогнутым — меньше. В работе [3] было высказано мнение, что если коэффициент диффузии горючего D больше коэффициента температуропроводности смеси κ , то уменьшение теплового потока на выпуклых участках с избытком компенсируется повышением притока горючего, температура выпуклых участков пламени повышается, скорость пламени на таких участках возрастает, и при $D > \kappa$ пламя оказывается неустойчивым.

Роль D и κ в распространении пламени была впервые рассмотрена Льюисом и Эльбе [4]. Справедливо отметив, что при $D > \kappa$ сумма химической и тепловой энергии (точнее, энтальпии) имеет минимум вблизи фронта, они сделали из этого неправильный вывод, что при $D > \kappa$ пламя устойчиво, а при $D < \kappa$ — неустойчиво.

В предлагаемой работе проделан расчет закона нарастания или затухания возмущений пламени в зависимости от соотношения D и κ и от химической кинетики реакции горения. Задача решается приближенно, в предположении сильной температурной зависимости скорости химической реакции (большой энергии активации). В этом приближении зону химической реакции можно считать узкой по сравнению с михельсоновской зоной подогрева и диффузии. Движение газа не рассматривается; значения D и κ считаются постоянными (не учитывается их зависимость от температуры). Возмущения всех величин берутся в виде

$$f(x) e^{\varphi t} \sin ky \quad (1.1)$$

где x — координата, отсчитываемая по перпендикуляру от невозмущенной поверхности пламени, y — координата, отсчитываемая вдоль поверхности пламени, t — время.

Уравнение поверхности пламени берется в виде

$$x = a(y, t) = \varepsilon e^{\varphi t} \sin ky \quad (1.2)$$

Проведенный расчет (см. ниже) дает

$$\varphi = k^2 [D (A / 2RT_b - 1) - \kappa A / 2RT_b] \quad (1.3)$$

где A — энергия активации, T_b — температура горения. При не очень малых $(D - \kappa)$, пренебрегая единицей по сравнению с $A / 2RT_b$, что в силу сделанного предположения о большой энергии активации возможно, получим

$$\varphi = k^2 (D - \kappa) A / 2RT_b \quad (1.4)$$

Этот результат вполне соответствует высказанным выше качественным соображениям о роли $(D - \kappa)$ и температурной зависимости горения. С другой стороны, при $D = \kappa$ члены с $A / 2RT_b$ в (1.3) сокращаются и получается

$$\varphi = -k^2 \kappa = -k^2 D \quad (1.5)$$

Как известно (см., например, [5]), при $D = \kappa$ имеет место точное подобие поля температуры и поля концентрации, причем не только для одномерной невозмущенной задачи, но и в общем случае (при надлежащих начальных условиях). При $D = \kappa$ независимо от формы поверхности пламени окончание химической реакции (исчерпание горючего) происходит всегда при одной и той же температуре T_b . Поэтому в полученный окончательный ответ не входит энергия активации. Устойчивость одномерного стационарного решения при $D = \kappa$ рассматривалась ранее в работах [6,7]. Было показано, что в этом случае всегда имеется тривиальное решение с $\varphi = 0$ и нет решения с $\varphi > 0$ (точнее, с $\text{Re } \varphi > 0$). Отсюда элементарно получается для периодического по y возмущения выражение (1.5). Существенно, что исследование случая

$D = \kappa$ было проведено в [6,7] без дополнительного предположения о сильной температурной зависимости и тонкой зоне реакции. Поэтому совпадение результатов в этом частном случае является подтверждением правильности приближенного метода, примененного в настоящей работе.

Скорость сгорания u_* оказывается связанной с кривизной пламени следующим соотношением:

$$u_* = u + \frac{A(D - \kappa)}{2RT_b} \frac{\partial^2 a(y, t)}{\partial y^2}$$

Здесь u — невозмущенная скорость пламени. Наличие большого множителя $A/2RT_b$ оправдывает подход Маркштейна [2], который из всех возможных влияний диффузии и теплопроводности учел лишь одно — изменение скорости пламени.

§ 2. Постановка задачи. Рассматриваются уравнения теплопроводности и диффузии в веществе, движущемся с постоянной скоростью слева направо вдоль оси x . Зону химической реакции выделяем особо, поэтому считаем, что вне зоны вещество не расходуется и не выделяется. Уравнения имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

(не уменьшая общности, можно считать задачу двумерной). Зону химической реакции рассматриваем как поверхность, на которой имеет место разрыв потока вещества и потока тепла, причем температура и концентрация на этой поверхности остаются непрерывными.

Пусть $x = a(y, t)$ — координата зоны реакции. Обозначим через $\partial/\partial n$ производную по нормали к поверхности $x = a(y, t)$; тогда имеем,

$$c|_{a-0} = c|_{a+0}, \quad T|_{a-0} = T|_{a+0} \quad (2.3)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{a+0} - \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{a-0} \right) + qD \left(\frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{a+0} - \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{a-0} \right) = 0 \quad (2.4)$$

Эти уравнения получаются формально путем интегрирования уравнений типа (2.1) и (2.2) с добавочными членами, представляющими тепловыделение и расходование вещества при химической реакции, в пределе при стремлении к нулю толщины зоны реакции. Уравнения (2.3) представляют собой следствия конечности потоков, уравнение (2.4) выражает собой сохранение энергии и получается после почленного сложения уравнений теплопроводности и диффузии с коэффициентами, обеспечивающими уничтожение членов, зависящих от химической реакции.

Если c — концентрация вещества, находящегося в недостатке (например, концентрация горючего в смеси, содержащей избыток кислорода), то $c \equiv 0$ при $x > 0$. Следовательно, $c|_{a+0} = 0$ и $\partial c / \partial n|_{a+0} = 0$. Согласно (2.3), имеем также $c|_{a-0} = 0$.

Рассмотрим предельный случай такой кинетики реакции, при которой ширина зоны реакции стремится к нулю, причем одновременно стремится к нулю и средняя концентрация внутри зоны, но так, что количество вещества, сгорающего в единицу времени m , остается конечным

$$m = -D \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{a-0} \quad (2.5)$$

Концентрация в зоне реакции определяется из уравнения диффузии с реакцией и граничных условий

$$c|_{a+0} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{a+0} = 0 \quad (2.6)$$

Величина m зависит от температуры в зоне реакции

$$T_r = T|_{\alpha+0} = T|_{\alpha-0} \quad (2.7)$$

Как уже указывалось, в возмущенном пламени при $D \neq \kappa$ температура T_r может отличаться от «теоретической» температуры горения плоского пламени T_b . Зависимость от T_r количества вещества, сгорающего в единицу времени на единице поверхности, $m(T_r)$, считаем известной из теории распространения пламени.

В простейшем случае нецепной реакции

$$m \sim \exp(-A/2RT_r) \quad (2.8)$$

Заметим, что скорость потребления вещества однозначно связана и прямо пропорциональна скорости передвижения зоны реакции относительно газа лишь в случае движения плоского пламени с постоянной скоростью. В рассматриваемой задаче о возмущенном пламени такой пропорциональности нет.

§ 3. Расчет устойчивости. Расчет проводится обычным методом малых возмущений; поверхность пламени задается при этом в виде

$$x = a(y, t) = \varepsilon \exp(iky + i\omega t + \varphi t) \quad (3.1)$$

где k, ω, φ — вещественные константы, ε — малая величина. В виду малости ε производная по нормали отличается от производной по x на величину порядка ε^2 , которой пренебрегаем. Невозмущенное решение имеет вид

$$\begin{aligned} T_n &= (T_b - T_0) e^{ux/\kappa} + T_0 & c_n &= c_0 (1 - e^{ux/D}) & (x < 0) \\ T_n &= T_b, & c_n &\equiv 0, & (x > 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

причем из (2.4) следует соотношение

$$c_p \rho (T_b - T_0) = c_0 q \quad (3.3)$$

Возмущенное решение ищем в виде

$$T = T_n + T_1 \quad (x < 0) \quad T = T_n + T_2 \quad (x > 0), \quad c = c_n + c_3 \quad (x < 0)$$

$$T_1 = g (T_b - T_0) \exp(r_1 x +iky + i\omega t + \varphi t) \quad (3.4)$$

$$T_2 = h (T_b - T_0) \exp(-r_2 x +iky + i\omega t + \varphi t)$$

$$c_3 = f c_0 \exp(r_3 x +iky + i\omega t + \varphi t)$$

Из уравнений (2.1) и (2.2) найдем

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{u}{2\kappa} + \sqrt{\frac{u^2}{4\kappa^2} + k^2 + \frac{(\varphi + i\omega)}{\kappa}} \\ r_2 &= -\frac{u}{2\kappa} + \sqrt{\frac{u^2}{4\kappa^2} + k^2 + \frac{(\varphi + i\omega)}{\kappa}} \\ r_3 &= \frac{u}{2D} + \sqrt{\frac{u^2}{4D^2} + k^2 + \frac{(\varphi + i\omega)}{D}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Граничные условия (2.3) дадут

$$\begin{aligned} T_r = T(a) &= T_b + (T_b - T_0) \left(\frac{u\varepsilon}{\kappa} + g \right) e^{iky + i\omega t + \varphi t} = \\ &= T_b + (T_b - T_0) h e^{iky + i\omega t + \varphi t} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$c(a) = c_0 \left(-\frac{u\varepsilon}{D} + f \right) e^{iky + i\omega t + \varphi t}$$

Отсюда получаем

$$\frac{u\varepsilon}{\kappa} + g - h = 0, \quad -\frac{u\varepsilon}{D} + f = 0 \quad (3.7)$$

Уравнение (2.4) с учетом (3.3) дает

$$\frac{u^2\varepsilon}{\kappa^2} + gr_1 + hr_2 = \left(\frac{u^2\varepsilon}{D^2} - r_3f\right)\frac{D}{\kappa} \quad (3.8)$$

Наконец, составим уравнение, выражающее зависимость химического потребления вещества от температуры

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{A\delta T}{2RT_b^2} = \frac{A(T_b - T_0)}{2RT_b^2} h e^{iky + i\omega t + \varphi} = zh e^{iky + i\omega t + \varphi} \quad (3.9)$$

где

$$z = \frac{A(T_b - T_0)}{2RT_b^2} \approx \frac{A}{2RT_b} \quad (3.10)$$

С другой стороны, по (2.5) найдем

$$\frac{\delta m}{m} = \left(\frac{u\varepsilon}{D} - Dr_3\frac{j}{u}\right) e^{iky + i\omega t + \varphi} \quad (3.11)$$

Приравнявая (3.9) и (3.11), получаем

$$zh = \frac{u\varepsilon}{D} - Dr_3f/u \quad (3.12)$$

Однородная система из четырех линейных уравнений (3.7), (3.8), (3.12) с четырьмя неизвестными имеет нетривиальное решение при равном нулю определителе, что дает одно уравнение для нахождения ω и φ (представляющих собой мнимую и вещественную части одной величины — комплексной частоты) в зависимости от волнового числа k и параметров D , κ , z .

Ограничимся случаем $k \ll u/\kappa$, т. е. возмущениями, длина волны которых больше ширины михельсоновской зоны прогрева. Нетрудно видеть, что φ и ω при этом много меньше u^2/κ . Выражения для показателей r_i при этом упрощаются

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{u}{\kappa} + \frac{\kappa}{u} \left(k^2 + \frac{\varphi + i\omega}{\kappa}\right) \\ r_2 &= \frac{\kappa}{u} \left(k^2 + \frac{\varphi + i\omega}{\kappa}\right) \\ r_3 &= \frac{u}{D} + \frac{D}{u} \left(k^2 + \frac{\varphi + i\omega}{D}\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

После простых вычислений окончательно получаем

$$\omega = 0, \quad \varphi = k^2 [D(z - 1) - \kappa z] \quad (3.14)$$

Так как обычно z велико, то, пренебрегая единицей сравнительно с z , найдем

$$\varphi = k^2 z (D - \kappa) \quad (3.15)$$

т. е. $\varphi > 0$ при $D > \kappa$ и пламя неустойчиво, $\varphi < 0$ при $D < \kappa$ и пламя устойчиво.

В случае $D = \kappa$ из формулы (3.14) вытекает

$$\varphi = -\kappa k^2 \quad (3.16)$$

Но при $D = \kappa$ величины T и s связаны алгебраическим соотношением, так что в одномерной задаче получается одно уравнение для $T(x, t)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho c_p} \Phi(T) \quad (3.17)$$

где $\Phi(T)$ — скорость выделения энергии. Нормальному распространению пламени соответствует стационарное, не зависящее от времени решение $T = T_n(x)$ уравнения (3.17).

Ввиду инвариантности задачи относительно сдвига

$$T(x) = T_n(x + \varepsilon) = T_n(x) + \varepsilon \frac{dT_n}{dx} \quad (3.18)$$

также представляет собой решение, не зависящее от времени.

Рассматривая $T(x)$ как возмущенное решение, получаем, что $\Psi_0 = \varepsilon dT_n/dx$ представляет собой стационарное малое возмущение. Произвольное малое возмущение $\Psi(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho c_p} \frac{d\Phi}{dT} \Psi \quad (3.19)$$

Решения этого уравнения следует искать в виде

$$\Psi(x, t) = \eta(x) \exp(i\omega_1 t + \varphi_1 t) \quad (3.20)$$

Найденное выше стационарное возмущение соответствует случаю $\omega_1 = 0, \varphi_1 = 0$. В работах [6, 7] было показано, что все остальные возможные решения соответствуют $\varphi_1 < 0$.

В двумерном случае в правой части (3.19) добавиться член $\kappa \partial^2 \Psi / \partial y^2$. Очевидно, что решение (3.20) превратится в решение двумерного уравнения, если его умножить на $\exp(iky - \kappa k^2 t)$

$$\Psi(x, y, t) = \eta(x) \exp(i\omega_1 t + \varphi_1 t - \kappa k^2 t +iky) \quad (3.21)$$

В частности, не зависящее от времени решение одномерного уравнения имеет вид

$$\Psi(x, y, t) = \frac{dT_n}{dx} \exp(-\kappa k^2 t +iky) \quad (3.22)$$

Таким образом, при $D = \kappa$ точное решение задачи о двумерном возмущении (без каких-либо идеализирующих предположений о химической кинетике) имеет главное, медленнее всего затухающее решение с декрементом

$$\varphi = -\kappa k^2 \quad (3.23)$$

в полном согласии с результатом (3.16), полученным приближенно в предположении узкой зоны реакции.

Поступила 21 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.— Л., ГИТТЛ, 1954.
2. Markstein G. Experimental and theoretical studies of flame front stability. Journal of the Aeronautical Sciences, 1951, vol. 18, No 3.
3. Зельдович Я. Б. Теория горения и детонации газов. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1944.
4. Lewis B. and von Elbe G. Combustion, flames and explosions of gases Academic Press, New York, 1951.
5. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. ЖФХ, 1948, т. XXII, вып. 1.
6. Баренблатт Г. И. и Зельдович Я. Б. Об устойчивости распространения пламени. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6.
7. Zeldovich J. B., Barenblatt G. I. Theory of flame propagation Combustion and Flame, 1959, vol. 3, No. 1.