УДК 532.526

А. А. Бобнев

ПРОБЛЕМА АВТОМОДЕЛЬНОСТИ В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОТОКАХ И ПРИНЦИП МИНИМАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА

При исследовании течения высокотемпературной струи из цилиндрического отверстия в приближении пограничного слоя возникает задача

$$(1)\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \rho\left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right), \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\rho v_r + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} = \mathrm{Pr}\,\rho\left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}\right), \ \rho T = 1, \ v_r = \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0;$$

$$(2)\qquad v_z = 0, \ T = T_\infty \text{ при } r \to \infty$$

с условиями сохранения

$$(3)\qquad \int_0^\infty \rho v_z^2 r\,dr = 1, \quad \int_0^\infty \rho v_z (T - T_\infty)\, r\,dr = 1.$$

Здесь r, $z\mathrm{R}$ — цилиндрические координаты (r, z — внутренние координаты в асимптотическом разложении по малому параметру R^{-1}); $\mathrm{R} = \sqrt{\rho_m I_{1m}/2\pi}/\mu_m$ — аналог числа Рейнольдса; v_z, $v_r R$ — осевая и радиальная составляющие скорости; T — температура; ρ — плотность; $\mathrm{Pr} = c_{pm}\mu_m/\lambda_m$ — число Прандтля. Считаются заданными масштабы температуры T_m, плотности ρ_m, удельной теплоемкости при постоянном давлении c_{pm}, теплопроводности λ_m, динамической вязкости μ_m, полного потока импульса I_{1m}, полного потока энтальпии I_{2m}:

$$I_{1m} = 2\pi\rho_m V_m^2 L_m^2 \int_0^\infty \rho v_z^2 r\,dr,$$

$$I_{2m} = 2\pi c_{pm}\rho_m T_m V_m L_m^2 \int_0^\infty \rho v_z (T - T_\infty)\, r\,dr.$$

В качестве масштабов скорости и длины выбраны соответственно $V_m = c_{pm} T_m I_{1m}/I_{2m}$, $L_m = I_{2m}/(c_{pm} T_m \sqrt{2\pi\rho_m I_{1m}})$.

При $T_\infty \to 0$ граничные условия (2) и интегральные условия (3) можно переписать в виде [1]

$$(4)\qquad \int_0^{r_0(z)} \rho v_z^2 r\,dr = 1, \quad \int_0^{r_0(z)} v_z r\,dr = 1, \quad v_z = T = 0 \text{ при } r \to r_0(z),$$

где интегралы выписаны в предположении о их существовании; $r_0(z)$ — поверхность раздела, отделяющая течение высокотемпературного сжимаемого газа от течения холодного несжимаемого газа с постоянной температурой. Отметим, что в некотором диапазоне параметров поверхности раздела может не существовать, тогда в формулах (4) следует положить $r_0 \to \infty$. При $T_\infty \to 0$ для задачи (1), (4) построим автомодельное решение

$$(5)\qquad v_z(r, z) = \frac{3 - \mathrm{Pr}}{4}\,\frac{1}{z}\left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right)^{2/(\mathrm{Pr}-1)}, \quad T = \frac{\mathrm{Pr} + 1}{4}\,\frac{1}{z}\left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right)^{2\mathrm{Pr}/(\mathrm{Pr}-1)},$$

$$v = \frac{3 - \mathrm{Pr}}{8}\,\frac{r}{z^2}\left[\left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right)^{2/(\mathrm{Pr}-1)} - \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right)^{(1+\mathrm{Pr})/(\mathrm{Pr}-1)}\right],$$

$$x = r/\sqrt{z}, \quad x_0^2 = 8(\mathrm{Pr} + 1)/[(3 - \mathrm{Pr})(\mathrm{Pr} - 1)],$$

которое при $\Pr < 1$ пригодно на полубесконечном интервале r ($0 \leqslant r < < \infty$), а при $1 \leqslant \Pr < 3$, как показано в [1],— на конечном интервале $0 \leqslant r < r_0(z)$. При $\Pr > 3$ решение (5) становится непригодным, так как константа автомодельности для скорости получена в предположении о существовании интегралов (4), а при $\Pr \geqslant 3$ первый интеграл в (4) не существует.

Решение задачи (1), (4) при $\Pr > 3$ будем искать в форме

$$v_z(r, z) = z^{\alpha_w} w(x), \quad T = z^{-1}\theta(x), \quad v_r = z^{-\alpha_r - 1} v(x), \tag{6}$$

$$r = z^{\alpha_r} x, \quad \alpha_w = -2\alpha_r.$$

Здесь w, θ, v, x — автомодельные переменные; α_w, α_r — константы автомодельности; при установлении связей между константами автомодельности предполагалось существование второго интеграла в (4). Подставив (6) в (1), (4), получим

$$\frac{1}{x}(xw')' = \frac{1}{\theta}[vw' + w(\alpha_w w - \alpha_r x w')], \tag{7}$$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{xv}{\theta}\right)' + (\alpha_w + 1)\frac{w}{\theta} - \alpha_r x\left(\frac{w}{\theta}\right)' = 0,$$

$$\frac{1}{x}(x\theta')' = \Pr \theta^{-1}[v\theta' + w(-\theta - \alpha_r x\theta')],$$

$$w' = \theta' = v = 0 \text{ при } x = 0, \; w = \theta = 0 \text{ при } x = x_0$$

(x_0 — точка раздела, связанная с поверхностью раздела формулой $r_0 = = z^{\alpha_r} x_0$). Введя новую функцию

$$s = \Pr(v - \alpha_r x w), \tag{8}$$

задачу (7) преобразуем:

$$\frac{1}{x}(xw')' = \frac{sw'}{\Pr\theta} + \alpha_w\frac{w^2}{\theta}, \quad \frac{1}{x}(xs)' = \frac{s\theta'}{\theta} - \Pr w, \tag{9}$$

$$\frac{1}{x}(x\theta')' = \frac{s\theta'}{\theta} - \Pr w, \; w' = \theta' = s = 0 \text{ при } x = 0, \; w = \theta = 0 \text{ при } x = x_0.$$

Так как уравнения и начальные условия в (9) для s и θ' совпадают, то

$$s = \theta'. \tag{10}$$

Таким образом, в задаче (9) можно понизить порядок, и с помощью (10) она примет вид

$$\frac{1}{x}(xw')' = \frac{\theta' w'}{\Pr\theta} + \alpha_w\frac{w^2}{\theta}, \quad \frac{1}{x}(x\theta')' = \frac{\theta'^2}{\theta} - \Pr w, \tag{11}$$

$$w' = \theta' = 0 \text{ при } x = 0, \; w = \theta = 0 \text{ при } x = x_0.$$

Отметим, что решения задачи (11) инвариантны к преобразованию

$$w \to C_1 w, \quad \theta \to C_2\theta, \quad x \to C_1^{-1/2} C_2^{1/2} x \tag{12}$$

(C_1, C_2 — произвольные постоянные). Это позволяет в качестве условия нетривиальности задавать, например, начальные условия

$$w = \theta = 1 \text{ при } x = 0. \tag{13}$$

Решив задачу (11), (13) и воспользовавшись инвариантными свойствами (12), можно пронормировать решения согласно интегральным условиям (4) или же каким-либо другим образом.

Можно было бы ожидать, что решения задачи (11), (13) существуют не при всяком значении константы автомодельности для скорости α_w (т. е. α_w — аналог собственного значения), но при численном расчете оказалось, что α_w принимает множество значений из интервала $\alpha_{wc} < < \alpha_w < \infty$. Для того чтобы сформулировать условие, исходя из которого можно было бы выбрать единственное значение α_w, рассмотрим решения задачи (11), (13) в окрестности точки раздела:

$$w = A(x_0 - x)^a,\ \theta = B(x_0 - x)^b. \tag{14}$$

Подставив (14) в (11), имеем

$$B\,[a(a-1) - ab\,\mathrm{Pr}^{-1}] - A\alpha_w = 0,\ \ Bb - A\,\mathrm{Pr} = 0,\ \ b = a + 2. \tag{15}$$

Уравнения (15) линейны и однородны относительно неизвестных A, B. Приравняв нулю определитель системы (15), получим

$$a = \frac{\mathrm{Pr} + 2 + \alpha_w}{2(\mathrm{Pr} - 1)} \pm \frac{1}{2(\mathrm{Pr}-1)} \sqrt{\mathrm{Pr}^2 + (4 + 10\alpha_w)\,\mathrm{Pr} + (\alpha_w - 2)^2}, \tag{16}$$

$$B = \frac{\mathrm{Pr}}{a+2} A.$$

Из численных расчетов задачи (11), (13) следует, что ее решения в окрестности точки раздела ведут себя согласно (14), (16), причем в (16) в формуле для a необходимо брать у корня квадратного знак минус.

Таким образом, существует континуум решений (6), удовлетворяющих системе (1) и граничным условиям (1), (4). Из физических соображений очевидно, что вязкость препятствует течениям с большими градиентами скорости (то же самое можно сказать и о влиянии теплопроводности на градиент температуры). Поэтому в качестве критерия отбора решений сформулируем следующий принцип: из математически возможных высокотемпературных течений физически реализуется лишь то, у которого градиент скорости (или, что в данном случае эквивалентно, градиент температуры) у поверхности раздела минимален. В связи с тем, что градиент скорости на поверхности раздела неограниченно велик, терминологически строже было бы потребовать минимум особенности градиента скорости, а для температуры — минимум особенности какой-либо стремящейся к бесконечности производной. Однако физическое содержание наиболее отражается в термине «минимальный градиент» (его следует рассматривать не на самой поверхности раздела, а в сколь угодно близкой окрестности ее) тем более, что, по-видимому, существуют ситуации, когда ни градиент скорости (или температуры), ни его производные в окрестности поверхности раздела не имеют особенностей. Принцип минимального градиента для рассматриваемой задачи используется только в случае, если не существуют интегралы вида (4).

Из формулы (16) и численных расчетов вытекает, что при $\mathrm{Pr} > 3$ градиент скорости у поверхности раздела минимален (a максимальна), если

$$\alpha_w = 2 - 5\mathrm{Pr} + \sqrt{24\mathrm{Pr}(\mathrm{Pr} - 1)}, \tag{17}$$

значение a при этом определяется по формуле

$$a = \sqrt{6\mathrm{Pr}/(\mathrm{Pr} - 1)} - 2, \tag{18}$$

т. е. принцип минимального градиента реализуется как условие кратности корня a в (16). В рамках настоящего исследования принцип минимального градиента означает с математической точки зрения выбор предельного значения α_w, ниже которого решение задачи (11), (13) уже не существует. Из (18) вытекает, что при $\mathrm{Pr} > 3$ $a < 1$, т. е. градиент скорости у поверхности раздела неограниченно велик. В связи с кратностью корня a в (16) для системы (11) пригодны как решения вида (14), так и решения $w = A(x_0 - x)^a \ln (x_0 - x)$, $\theta = B(x_0 - x)^b \ln (x_0 - x)$, и численным образом трудно установить, какое из них будет реализовываться вблизи точки раздела.

На рис. 1 изображены построенные численно решения задачи (11), (13), (17) для продольной скорости и температуры при разных Pr, а на рис. 2 — решение для поперечной скорости v, определяемое с помощью формул (10), (8). С увеличением Pr профиль *продольной скорости* ста-

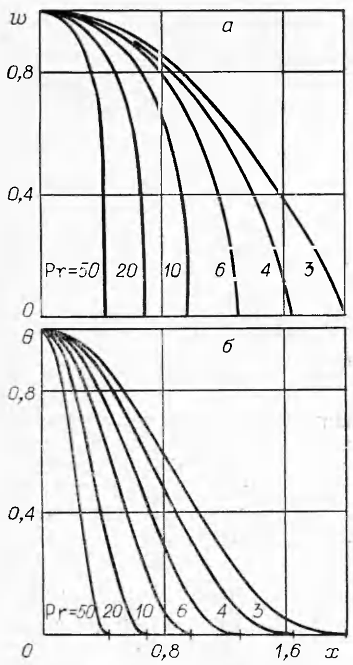

Рис. 1

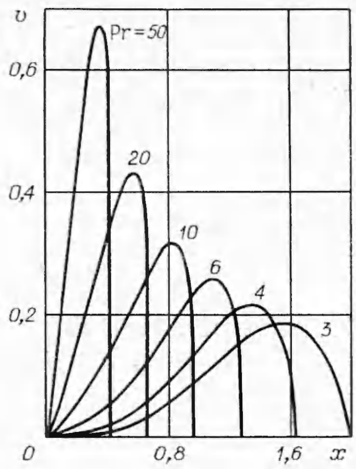

Рис. 2

новится более наполненным, толщина высокотемпературного пограничного слоя x_0 уменьшается, поперечная составляющая скорости увеличивается. При $\mathrm{Pr} \to \infty$, сформулировав предельный процесс в виде

(19) $$t = x\sqrt{\mathrm{Pr}} \text{ фиксировано при } \mathrm{Pr} \to \infty,$$

построим асимптотическое разложение

(20) $$w(x, \mathrm{Pr}) = w_0(t) + \ldots, \quad \theta(x, \mathrm{Pr}) = \theta_0(t) + \ldots,$$
$$\alpha_w(\mathrm{Pr}) = \alpha_0 \mathrm{Pr} + \ldots, \quad x_0(\mathrm{Pr}) = t_0 \mathrm{Pr}^{-1/2} + \ldots$$

($\alpha_0 = -5 + \sqrt{24}$ (17)). Подставив (20) в (11), (13), получим на пределе (19) в нулевом приближении по Pr^{-1}

(21) $$\frac{1}{t}\frac{d}{dt}t\frac{dw_0}{dt} = \alpha_0\frac{w_0^2}{\theta_0}, \quad \frac{1}{t}\frac{d}{dt}t\frac{d\theta_0}{dt} = \frac{1}{\theta_0}\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 - w_0,$$
$$\frac{dw_0}{dt} = \frac{d\theta_0}{dt} = 0, \quad w_0 = \theta_0 = 1 \text{ при } t = 0, \quad w_0 = \theta_0 = 0 \text{ при } t = t_0.$$

Решения задачи (21) изображены на рис. 3. Таким образом, наполненность профиля w при $\mathrm{Pr} \to \infty$ ограничена функцией w_0.

Для проверки принципа минимального градиента был проведен численный эксперимент: задача в частных производных (1), (2) дополнялась необходимыми начальными условиями при $z = z_0$ и решалась численно (в конечных разностях) при достаточно малых значениях T_∞. Эти расчеты показали, что вне зависимости от начальных условий решения с ростом z весьма быстро становились автомодельными, причем константы автомодельности с достаточной точностью удовлетворяли принципу минимального градиента.

При численных расчетах задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями использовался метод Рунге — Кутта, для задач в частных производных — метод прогонки с итерациями, при построении асимптотических разложений — идеи методов возмущений [2].

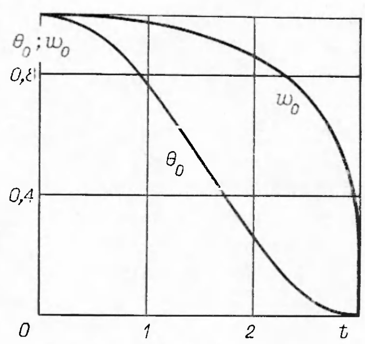

Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бобнев А. А.** Разделительный слой в высокотемпературных потоках // ПМТФ.— 1983.— № 6.
2. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.

г. Краснодар *Поступила 26/II 1988 г.*

УДК 532.516:536.24.01

Е. А. Рябицкий

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ДВИЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Исследование устойчивости термокапиллярного движения в плоском слое и жидком цилиндре проведено в [1, 2]. В данной работе изучается устойчивость термокапиллярной конвекции в цилиндрическом слое с недеформируемой свободной поверхностью. Исследовано влияние отношения радиусов цилиндров на устойчивость движения. Показано, что для осесимметрических возмущений при некоторых значениях параметров задачи увеличение относительной толщины внутреннего цилиндра приводит к понижению устойчивости.

1. Рассмотрим цилиндрический слой вязкой теплопроводной жидкости, ограниченный твердой внутренней и свободной внешней поверхностями, при отсутствии силы тяжести. Введем цилиндрическую систему координат с осью z, направленной вдоль образующей цилиндра. Уравнение твердой границы: $r = r_0$. Полагаем, что свободная поверхность цилиндрическая ($r = r_1$) и недеформируемая. Изменение коэффициента поверхностного натяжения от температуры описывается формулой $\sigma = \sigma_0 - \varkappa(\theta - \theta_0)$.

Пусть свободная поверхность нагревается по закону $\theta_B = -Az$ (A — заданная постоянная величина). Тогда стационарное осесимметрическое термокапиллярное движение, возникающее вследствие изменения поверхностного натяжения, описывается формулами

$$(1.1)\qquad u = v = 0,\ w = B_1(\xi^2 - d^2) + B_2 \ln(\xi/d),\ p_\eta = 4B_1,$$
$$\theta = -\eta - \mathrm{MaPr}\,[B_1(\xi^4 - 1)/4 - (d^2B_1 + B_2 + \ln dB_2)(\xi^2 - 1) +$$
$$+ B_2(\xi^2 + d^2)\ln\xi + B_1 d^4 \ln\xi]/4,$$

где постоянные $B_1 = (1 - d^2 + 2\ln d)\,[(1 - d^2)(3 - d^2) + 4\ln d]^{-1}$, $B_2 = (1 - d^2)^2\,[(1 - d^2)(3 - d^2) + 4\ln d]^{-1}$ находятся из условий прилипания и замкнутости потока

$$(1.2)\qquad \int_d^1 \xi w(\xi)\, d\xi = 0.$$

Здесь и ниже $\xi = r/r_1$; $\eta = z/r_1$; $d = r_0/r_1 < 1$; $\mathrm{Ma} = r_1^2\varkappa A/\rho\nu^2$ — число Марангони; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\mathrm{Bi} = \beta r_1/\lambda$ — число Био; ν, χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности; λ, β — коэффициенты теплопроводности и межфазного обмена; ρ — плотность. В качестве единиц длины, времени, скорости, температуры и давления выбраны соответственно r_1, $r_1^2/\nu\mathrm{Ma}$, $\nu\mathrm{Ma}/r_1$, Ar_1, $\rho\nu^2\mathrm{Ma}^2/r_1^2$.

При $d \to 0$ движение (1.1) переходит в термокапиллярное течение для полностью жидкого цилиндра: $u = v = 0$, $w = (\xi^2 - 0{,}5)/2$, $p_\eta = 2$, $\theta = -\eta - \mathrm{MaPr}(1 - \xi^2)^2/32$, устойчивость которого изучена в [2]. В [3] рассматривалась устойчивость относительно осесимметрических возмущений движения с логарифмическим профилем скорости, которое не удовлетворяло условию замкнутости (1.2).

Перейдем к исследованию устойчивости движения (1.1). Ищем возмущения вектора скорости, давления и температуры в виде

$$(U,\ V,\ W,\ P,\ T) = (U(\xi),\ V(\xi),\ W(\xi),\ P(\xi),\ T(\xi)) \times$$
$$\times \exp[i\alpha\eta + im\varphi - iC\tau],$$