

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН  
В ОГРАНИЧЕННОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ  
СТЕРЖНЕ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

Г. Г. Константинов, Л. Л. Марченко, К. Н. Шхинек  
(Ленинград)

В настоящей статье рассматривается задача о распространении волн возмущения в ограниченном упруго-пластическом стержне с одним свободным концом, другим — примыкающим к упругому полубесконечному стержню. Задача решается для конкретного вида нагрузки на свободном конце и частного уравнения состояния материала стержня — диаграммы напряжение — деформация.

В результате решения получены расчетные зависимости, позволяющие определить максимально возможные остаточные смещения рассматриваемого сечения упруго-пластического стержня относительно границы раздела стержней.

Кроме того, получены зависимости, устанавливающие возможность возникновения кавитации материала стержня и место ее наступления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим распространение волны сжатия в ограниченном упруго-пластическом стержне. Материал стержня характеризуется плотностью  $\rho$  и диаграммой  $P=P(\varepsilon)$ , в которой кривые нагружения и разгрузки аппроксимируются двумя различными отрезками прямых. Прямой нагружения соответствует скорость  $a_1$ , а прямой разгрузки — скорость  $a_p$ . При вторичном нагружении сжатие протекает по прямой разгрузки до напряжения  $P_{0i}$ , достигнутого при первом нагружении, а при дальнейшем увеличении  $P$  — по прямой нагружения (рис. 1). Принимается, что материал стержня не обладает сцеплением и  $P \geq 0$  (с учетом бытовых напряжений)<sup>1</sup>, т. е. материал не выдерживает растягивающих напряжений.

Стержень имеет длину  $h$ . Один конец его свободен, а другой находится в контакте с полубесконечным упругим стержнем плотностью  $\rho_*$  и скоростью распространения продольных волн  $a_*$

$$(a_* > a_p; \rho_* > \rho).$$

<sup>1</sup> В дальнейшем задача решается без учета бытовых напряжений и последние принимаются в расчет лишь при изучении кавитации.

К свободному концу стержня приложена нагрузка вида

$$P = P_m \left(1 - \frac{t}{\tau}\right); \quad P = 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } t \geq \tau,$$

вызывающая в стержне волну сжатия.

В предположении, что  $\tau \gg \frac{h}{a_p}$ , требуется найти напряжения, скорости и остаточные смещения в произвольной точке стержня с учетом взаимодействия волны сжатия с граничными поверхностями.

Задача в аналогичной постановке была рассмотрена в работе [1]. Однако в этой работе принималось несколько иное уравнение со-

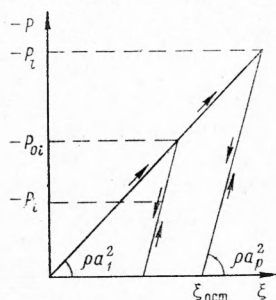


Рис. 1.

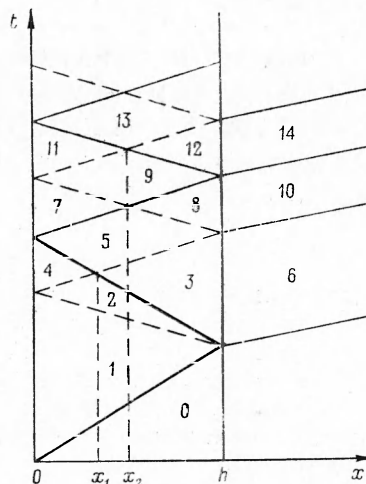


Рис. 2.

стояния среды и исследовался лишь коэффициент отражения при отражении упруго-пластических волн сжатия от границы раздела двух стержней.

#### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОМ СТЕРЖНЕ

Введем в рассмотрение координатную плоскость  $x, t$ , совместив начало координат со свободным концом стержня и направив ось  $x$  вдоль стержня (рис. 2). Уравнение, описывающее распространение волны сжатия в стержне, запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a_i^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $a_i = a_1$ ;  $a_i = a_p$  в зависимости от знака  $\frac{\partial P}{\partial t}$  или от цикла нагружения;

$W$  — смещение.

Прямая 0—1 в плоскости  $x, t$  (см. рис. 2) соответствует фронту волны сжатия, за которым происходит разгрузка среды (область 1). Зависимости избыточного давления и скорости частиц в области разгрузки при сделанных допущениях, как известно [1], имеют вид:

$$P = F_1(x - a_p t) + F_2(x + a_p t), \quad (2)$$

$$a_p \rho U = F_1(x - a_p t) - F_2(x + a_p t). \quad (3)$$

Произвольные функции  $F_1$  и  $F_2$  определяются из граничных и начальных условий задачи.

При решении необходимо иметь в виду, что на фронтах сильного разрыва должно выполняться условие

$$P_\Phi - P = \rho D_\Phi (U_\Phi - U), \quad (4)$$

где параметры с индексом « $\Phi$ » характеризуют состояние среды на фронте, а параметры без индексов — состояние среды перед фронтом.  $D_\Phi$  — скорость распространения фронта. На фронтах, являющихся слабым разрывом,  $U$  и  $P$  непрерывны.

$$P_\Phi = P; \quad U_\Phi = U. \quad (5)$$

Так как линия 0—1 является фронтом сильного разрыва и уравнение ее  $x = a_1 t$ , а перед фронтом в области 0 принимается  $P_0 = U_0 = 0$ , граничное условие на фронте 0—1 имеет вид:

$$P_1|_{x=a_1 t} = \rho a_1 U_1|_{x=a_1 t}. \quad (6)$$

Кроме того, известно усилие в начальном сечении ( $x=0$ )

$$P_1|_{x=0} = P_m \left(1 - \frac{t}{\tau}\right). \quad (7)$$

Из (2), (3), (6), (7) можно определить функции  $F_1$  и  $F_2$ :

$$\left. \begin{aligned} F_3 &= A_1 + b_1 (x - a_p t), \\ F_2 &= A_2 + b_2 (x + a_p t), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= P_m \frac{(1 + \gamma)^2}{4\gamma a_p \tau}, & A_1 &= P_m \frac{1 + \gamma}{2}, \\ b_2 &= P_m \frac{(1 - \gamma)^2}{4\gamma a_p \tau}, & A_2 &= P_m \frac{1 - \gamma}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При падении волны сжатия на границу раздела сред возникнут отраженная и преломленная волны. Вследствие вида принятой диаграммы напряжение — деформация в первом упруго-пластическом стержне образуются два отраженных фронта: упругий (распространяющийся со скоростью  $a_p$ ) и упруго-пластический, уравнения этих фронтов соответственно

$$x = h(1 + \gamma) - a_p t, \quad (10)$$

$$x = 2h - a_1 t, \quad (11)$$

где  $\gamma = \frac{a_p}{a_1}$ .

В области 2 за фронтом 1—2 (см. рис. 2) в каждой точке стержня происходит нагружение до того напряжения, которое было в этой точке при прохождении фронта 0—1. Иначе говоря, в этой области происходит повышение напряжений от  $P_i$  до  $P_{0i}$  (см. рис. 1). На границе 3—2 происходит дальнейшее нагружение среды отраженной волной. Область 3 соответствует разгрузке среды.

На границе 1—2 в силу (5) имеем

$$U_1|_{1-2} = U_2|_{1-2}, \quad (12)$$

на границе 2—3

$$P_1|_{0-1} = P_2|_{-} \quad (13)$$

при одинаковых  $x$ .

Решение в области 2, как и в последующих областях, ищем в виде (3) и (4), а коэффициенты функций  $F_{ik} = A_{ik}$  и  $b_{ik}$ , у которых индекс « $k$ » совпадает с номером области, находим из граничных условий (для области 2 из (12) и (13)), поступая так же, как и в области 1.

$$\left. \begin{aligned} b_{12} &= b_1, & A_{12} &= A_1, \\ b_{22} &= b_2 \frac{1+\gamma}{1-\gamma} - b_1 \frac{2\gamma}{1-\gamma}, & A_{22} &= A_2 - 2h\gamma(b_{22} - b_{12}). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Во втором стержне после начала взаимодействия волны сжатия с границей раздела начинает распространяться упругая волна, фронт которой является фронтом сильного разрыва и описывается уравнением

$$x_* = a_* t_*, \quad (15)$$

$$\text{где } x_* = x - h; \quad t_* = t - \frac{h}{a_1}.$$

Следовательно,

$$P_6|_{x_* = a_* t_*} = \rho_* a_* U_6|_{x_* = a_* t_*}. \quad (16)$$

Вдоль границы раздела стержней должны выполняться условия непрерывности скоростей и напряжений

$$P_3|_{x=h} = P_6|_{x=h}, \quad (17)$$

$$U_3|_{x=h} = U_6|_{x=h}. \quad (18)$$

В упруго-пластическом стержне на границе между областями 2 и 3 происходит скачок напряжений и скоростей, поэтому на фронте 2—3 должно выполняться условие (4).

Из перечисленных граничных условий находим коэффициенты  $A_{i3}$  и  $b_{i3}$  области 3 и коэффициенты  $A_{i6}$  и  $b_{i6}$  области 6.

Приведем только коэффициенты, необходимые для построения дальнейшего решения.

$$\left. \begin{aligned} b_{16} &= \frac{a_p}{a_*} \frac{(\gamma+1)^2 b_{12} - (\gamma-1)^2 b_{22}}{\gamma^2 + 2\gamma\beta + 1}, \\ b_{13} &= \frac{a_*}{a_p} (1+\beta) \frac{b_{16}}{2}, & A_{13} &= \frac{1+\beta}{1-\beta} A_{23} - 2hb_{13}, \\ b_{23} &= -\frac{a_*}{a_p} (1-\beta) \frac{b_{16}}{2}, & A_{23} &= \frac{1}{\frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \times \\ & \times \left[ A_{12} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} A_{22} + 2h \left[ b_{13} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (b_{22} - b_{23}) \right] \right], \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\text{где } \beta = \frac{a_p \rho}{a_* \rho_*}.$$

В областях 4, 5, и 9 происходит взаимодействие волн разрежения, возникающих при отражении от свободной поверхности, с разгрузочным течением за фронтами 1—2 и 2—3. Поэтому в этих областях происходит линейное наложение указанных волн.

Решение в областях 4, 5 и 9 ищется в форме (2), (3).

Для определения функций  $F_{ik}$  используются условия непрерывности давлений и скоростей на тех фронтах, где не происходит скачков (2—4, 5—3), условия на разрывах вдоль фронтов (5—4, 7—5) и условие (7) при  $x=0$ .

В результате находим коэффициенты  $A_{ik}$  и  $b_{ik}$  для областей 4, 5 и 7.

$$\left. \begin{aligned} b_{24} &= b_{22}, & A_{24} &= A_{22}, \\ b_{14} &= b_{24} + \frac{P_m}{\bar{a}_p \tau}, & A_{14} &= P_m - A_{24}, \\ b_{25} &= b_{23}, & A_{25} &= A_{23}, \\ b_{15} &= b_{14} + \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2 (b_{25} - b_{24}), & A_{15} &= A_{13} + h(\gamma + 1)(b_{15} - b_{13}), \\ b_{27} &= b_{25}, & A_{27} &= A_{25}, \\ b_{17} &= b_{27} + \frac{P_m}{a_p \tau}, & A_{17} &= P_m - A_{27}, \end{aligned} \right\} (20)$$

Новая волна сжатия может образоваться лишь при следующем отражении рассмотренных волн разрежения от свободной поверхности. При этом суммарные напряжения не превзойдут тех напряжений, которые были на границе 3—2 или 5—4.

Таким образом, в рассматриваемых областях найдены решения, которые, в частности, определяют максимальные сжимающие напряжения в различных сечениях  $x$  упруго-пластического стержня.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ СМЕЩЕНИЙ

Максимальное сжимающее напряжение  $P_l$  при любом  $x$  связано с остаточной относительной деформацией и  $\varepsilon_{\text{ост}}$  в этом же сечении зависимостью:

$$\varepsilon_{\text{ост}} = \frac{P_l}{\rho a_p^2} (\gamma^2 - 1). \quad (21)$$

Остаточное смещение в сечении  $x_c$  относительно границы  $x=h$  находится по формуле

$$\Delta l = \int_{x_c}^h \varepsilon_{\text{ост}}(x) dx = \frac{\gamma^2 - 1}{\rho a_p^2} \int_{x_c}^h P_l(x) dx. \quad (22)$$

При  $x > x_1$  (см. рис. 2) остаточное смещение определяется формулой (22). При  $x < x_1$  интеграл должен быть разбит на два от  $x_c$  до  $x_1$  и от  $x_1$  до  $h$ ;

$$\text{здесь} \quad x_1 = h \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (23)$$

Общее выражение для определения остаточного смещения имеет вид.

$$\Delta l = \frac{\gamma^2 - 1}{\rho a_p^2} \left\{ \left[ \int_{x_c}^{x_i} P_5(x) dx + \int_{x_1}^h P_3(x) dx \right] \varepsilon(x_1 - x_c) + \int_{x_c}^h P_3(x) dx \cdot \varepsilon(x_c - x_1) \right\}, \quad (24)$$

где  $\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda > 0, \\ 0 & \lambda \leq 0. \end{cases}$

Для сечения  $x=0$  выражение (24) принимает вид

$$\Delta l_0 = \frac{\gamma^2 - 1}{\rho a_p^2} \left\{ [A_{13} + A_{23} + 2h\gamma(b_{23} - b_{13})] \frac{2h}{\gamma + 1} + [A_{15} + A_{25} + 2h\gamma(b_{25} - b_{15})] h \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2h^2\gamma}{(\gamma + 1)^2} [(1 + \gamma)b_{13} + (1 - \gamma)b_{23}] + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2 [(1 + \gamma)b_{15} + (1 - \gamma)b_{25}] \right\}. \quad (25)$$

Формулы (24) и (25) справедливы в том случае, когда сжимающие напряжения  $P_i$  вдоль всего фронта 2—3 и 4—5 превосходят напряжения  $P_1$  во фронте падающей волны. Возможен случай, когда, начиная с какой-то точки  $x_i$ ,  $P_i$  на фронте 2—3 и 4—5 становятся меньше, чем  $P_1$  на фронте 0—1. Тогда  $\Delta l_0$  следует определять по формуле

$$\Delta l_0 = \frac{\gamma^2 - 1}{\rho a_p^2} \left\{ \int_0^{x_i} P_1(x) dx + \left[ \int_{x_i}^{x_1} P_5(x) dx + \int_{x_1}^h P_2(x) dx \right] \varepsilon(x_1 - x_i) + \int_{x_i}^h P_3(x) dx \cdot \varepsilon(x_i - x_1) \right\}. \quad (26)$$

Координаты точки  $x_i$  находятся из уравнения

$$P_3(x_i) \cdot \varepsilon(x_i - x_1) + P_5(x_i) \varepsilon(x_1 - x_i) - P_1(x_i) = 0. \quad (27)$$

Полученные остаточные смещения для реального материала упруго-пластического стержня являются максимально возможными, поскольку при дальнейшем взаимодействии волн с границами стержня может возникнуть так называемое явление кавитации, при котором происходит разрыхление части материала стержня с последующим его уплотнением при «схлопывании» зон кавитации.

#### ЯВЛЕНИЕ ОТКОЛА (КАВИТАЦИИ)

Перейдем к рассмотрению волн разрежения, возникших в результате отражения волн сжатия от свободной поверхности.

Волна разрежения с резким фронтом и непрерывная волна разрежения, распространяющиеся от свободного конца стержня, отражают-

ся от границы раздела стержней и взаимодействуют друг с другом, а также с разгрузочным течением за фронтами волн сжатия. Это сложное взаимодействие соответствует областям 4; 5; 7; 8; 9; 11; 12 и 13. Давления и скорости колебания в этих областях определяются по аналогии с областями 1—7. При этом используются граничные условия типа (4) и (5) вдоль соответствующих фронтов, а также непрерывность скоростей и напряжений вдоль границы  $x=h$  и условие (7) при  $x=0$ .

В результате коэффициенты  $A_{ik}$  и  $b_{ik}$  определяются в виде

$$\begin{aligned}
 b_{18} &= b_{15}, & A_{18} &= \frac{1+\beta}{1-\beta} A_{28} - 2hb_{15}, \\
 b_{28} &= -\frac{1-\beta}{1+\beta} b_{15}, & A_{28} &= \frac{1-\beta}{2\beta} \{A_{15} - A_{25} + h[(3+\gamma)b_{28} - \\
 & & & - (1+\gamma)b_{25}]\}, \\
 b_{19} &= b_{17}, & A_{19} &= A_{17} - A_{27} + A_{28} + h(3+\gamma)(b_{28} - b_{27}), \\
 b_{29} &= b_{28}, & A_{29} &= A_{28}, \\
 b_{111} &= b_{211} + \frac{P_m}{a_p \tau}, & A_{111} &= \frac{1}{2} [P_m + A_{19} - A_{29} + \\
 & & & + h(3+\gamma)(b_{111} - b_{19})], \\
 b_{211} &= b_{29}, & A_{211} &= P_m - A_{111}, \\
 b_{112} &= b_{19}, & A_{112} &= A_{19}, \\
 b_{212} &= -\frac{1-\beta}{1+\beta} b_{19}, & A_{212} &= \frac{1-\beta}{1+\beta} (A_{19} + 2hb_{19}), \\
 b_{113} &= b_{111}, & A_{113} &= A_{111}, \\
 b_{213} &= b_{212}, & A_{213} &= A_{113} - A_{112} + A_{212} + h(3+\gamma)(b_{112} - b_{113}).
 \end{aligned} \tag{28}$$

До момента прихода волн сжатия, возникших в результате отражения волн разрежения от свободной поверхности, в каждом сечении растягивающие напряжения будут возрастать.

Если в некотором сечении  $x_k$  суммарное напряжение  $P_k$  окажется растягивающим и станет равным бытовому статическому давлению в материале вертикально расположенного стержня

$$P_0 = q x_k, \tag{29}$$

где  $q$  — удельный вес материала стержня, или превзойдет его, то в силу предположения о том, что материал стержня не выдерживает растягивающих напряжений, вдоль сечения  $x_k$  произойдет отрыв части стержня, расположенной над этим сечением, от остальной его массы. Это явление аналогично кавитации в жидкости.

Координаты начала кавитации находятся из условия

$$P_k + P_0 = 0 \tag{30}$$

и связаны между собой соотношением

$$t_k = \frac{A_{1k} + A_{2k} + (b_{1k} + b_{2k} + q) x_k}{a_p (b_{1k} - b_{2k})}. \tag{31}$$

Для определения координат  $t_k$ ,  $x_k$  в каждом случае необходимо для всех областей, начиная с области 4, проверить возможность наступле-

ния кавитации, подставляя в условие (31) границы соответствующей области. Если полученные значения  $t_k$  (или  $x_k$ ) не выходят из диапазона возможных значений для данной области, кавитация в ней наступит. Если получаются значения  $t_k(x_k)$ , выходящие из диапазона возможных значений, необходимо перейти к следующей области.

Определив область, в которой начнется кавитация, следует построить прямую (31); минимальное  $t_k$  и соответствующее ей  $x_k$  будут координатами начала кавитации.

Зона кавитации (откола) отделяет друг от друга две части стержня, движущиеся самостоятельно до момента соударения. При отражении от образовавшейся таким образом свободной поверхности могут возникать волны разрежения, вызывающие вторичную кавитацию. При некоторых условиях область кавитации может увеличиваться непрерывно. В дальнейшем происходит заполнение полостей, сопровождающееся внутренним соударением.

Предложенный в данной статье метод позволяет вычислить координаты начала кавитации в каждом конкретном случае. Примеры расчета свидетельствуют о том, что кавитация может играть существенную роль и охватывать значительные участки. Так, для  $\frac{h}{a_p \tau} = 0,15$  глубина, на которой возникает кавитация, равна  $\frac{x_k}{h} = 0,63$  — остаточное смещение свободного конца стержня относительно границы раздела  $\frac{\Delta l}{a_p \tau} = 6,35 \cdot 10^{-4}$ .

Авторы приносят глубокую признательность Н. В. Зволинскому за постоянное внимание к работе и советы.

Поступила в редакцию  
5/VI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Ляхов, Н. И. Полякова. Изв. АН СССР, ОТН, 1960, 3.