

УДК 532.5

ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТОРНАДОПОДОБНЫХ ВИХРЕЙ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Б. А. Луговцов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Показано, что механизм возникновения торнадоподобных вихрей при возбуждении в твердотельно вращающейся жидкости вынужденных резонансных инерционных колебаний большой амплитуды имеет в основном кинематическую природу (адвекция циркуляции азимутальной составляющей скорости и растяжение вихревых линий полоидальными составляющими поля скоростей, возникающими при возбуждении инерционных колебаний). На основе решений модельных задач получены оценки основных параметров возникающих вихрей. Для возбуждения таких колебаний необходим подвод энергии, значительно превышающей по величине первоначальную энергию вращающейся жидкости. Поэтому инерционные колебания сами по себе не могут приводить к возникновению интенсивных атмосферных вихрей. Тем не менее такие колебания, по-видимому, могут играть роль спускового механизма, приводящего в действие более сложные процессы вихреобразования, связанные с неустойчивостью атмосферы.

В работах [1–3] экспериментально установлен факт возникновения концентрированных торнадоподобных вихрей во вращающейся жидкости под действием вынужденных резонансных инерционных колебаний большой амплитуды, возбуждаемых в твердотельно вращающейся жидкости, целиком заполняющей цилиндрический сосуд. Авторами работ [1, 2] выдвинута гипотеза о том, что это явление может служить моделью интенсивных атмосферных вихрей (смерчей, торнадо и т.д.) и инерционные колебания играют основную роль в механизме их возникновения.

Подтверждение (или опровержение) данной гипотезы — важный шаг на пути к более глубокому пониманию указанных явлений. В связи с этим проведены дополнительные эксперименты [3] на установке, параметры которой отличались от параметров установки, описанной в работах [1, 2].

В данной работе предпринята попытка с помощью аналитического и численного решения модельных задач получить оценки основных характеристик вихрей, возникающих при возбуждении вынужденных резонансных инерционных колебаний большой амплитуды в твердотельно вращающейся жидкости. Цель этих исследований — выявить условия и механизм возникновения концентрированных торнадоподобных вихрей в лабораторной модели, определить их основные параметры и оценить важность этого явления и его роль в процессе возникновения интенсивных атмосферных вихрей.

Основная задача настоящей работы — объяснение наблюдаемого в эксперименте увеличения концентрации завихренности в окрестности оси цилиндра. В ядре возникающего при возбуждении колебания торнадоподобного вихря амплитуда завихренности $\omega_z \simeq 50\omega_0$ (ω_0 — завихренность невозмущенной вращающейся с угловой скоростью $\Omega = \omega_0/2$ жидкости). Радиус ядра $r_0 \simeq 0,05R$ (R — радиус вращающегося цилиндра) [1, 2]. Объяснение этих экспериментальных фактов отсутствует.

Объем имеющихся экспериментальных данных весьма ограничен. В работах [1, 2] измерены максимальное значение азимутальной скорости и радиус, при котором это значение достигается. В [3] предпринята попытка измерения поля азимутальной скорости. Однако разброс результатов измерений настолько велик, что не позволяет даже установить, достигается ли экстремальное значение азимутальной скорости в той области, где производились измерения (в системе отсчета, вращающейся вместе с цилиндром, такой максимум наблюдается). Это объясняется трудностью проведения соответствующих измерений и природой самого явления (нерегулярные отклонения вихря от оси цилиндра). В связи с этим представляет интерес получение оценок основных параметров рассматриваемых вихрей на основе решений модельных задач с использованием экспериментальных данных. Такой грубый подход оправдывается тем, что в настоящее время неясно, насколько существенны для понимания механизма возникновения наблюдаемых вихрей вязкость, явления, связанные с возможным отрывом пограничного слоя, и т.п. Прежде чем пытаться решать сложные задачи, необходимо выяснить, можно ли в принципе объяснить наблюдаемое явление в рамках модели невязкой жидкости.

Постановка задачи. В рамках модели несжимаемой (единичной плотности) вязкой жидкости результаты эксперимента должны описываться решением задачи, сформулированной ниже. Цилиндр высотой H и радиусом R вращается с угловой скоростью $\Omega = \omega_0/2$ вокруг оси z ($\omega_0 = \omega_z(0)$ — начальная завихренность вращающейся вместе с цилиндром жидкости). Требуется определить колебательные (периодические по времени) течения жидкости в цилиндре при условии, что одна из торцевых стенок цилиндра гибкая и деформируется по закону $\mathbf{r} = (r = r(\rho, t), \varphi, z = z(\rho, t))$, причем в недеформированном состоянии $r(\rho, 0) = \rho$, $z(\rho, 0) = 0$ (ось z совпадает с осью цилиндра), так что

$$z = h(r, t) < H \quad (z(R, t) = h(R, t) = 0), \quad 2\pi \int_0^R h(r, t) r dr = 0.$$

При этом $h(r, t + T) = h(r, t)$, где T — период; $\omega = 2\pi/T$ — частота основной гармоники периодического возмущения.

В рассматриваемых условиях исходные уравнения, описывающие возникающие нестационарные осесимметричные течения жидкости, можно представить в следующей форме (используются цилиндрические координаты $\mathbf{r} = (r, \varphi, z)$, $\mathbf{v} = (u, v, w)$):

$$\Gamma_t = (\psi_z \Gamma_r - \psi_r \Gamma_z)/r + \nu(\Gamma_{rr} - \Gamma_r/r + \Gamma_{zz}); \quad (1)$$

$$\omega_t = \psi_z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) - \psi_r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma^2}{r^3} \right) + \nu \left(\omega_{rr} + \frac{1}{r} \omega_r - \frac{\omega}{r^2} + \omega_{zz} \right) + f(r, z, t); \quad (2)$$

$$\psi_{rr} - \frac{1}{r} \psi_r + \psi_{zz} = -r\omega, \quad u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \omega_z = \frac{1}{r} \Gamma_r, \quad (3)$$

где $\omega = \omega_\varphi = u_z - w_r$; $\Gamma = rv$; $f(r, z, t) = \mathbf{e}_\varphi \operatorname{rot} \mathbf{F}$; $\mathbf{F}(r, z, t)$ — полоидальный вектор внешних массовых сил (в описанном выше эксперименте такие силы отсутствуют). Добавление этих сил позволяет моделировать вынужденные колебания без использования гибкого торца цилиндра, что несколько упрощает задачу.

Решения системы (1)–(3) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

— $\psi = 0$ при $r = 0$, $r = R$ и $z = H$;

— $u = 0$, $w_r = 0$ при $r = 0$; $u = 0$ при $r = R$; $w = 0$ при $z = H$;

— $h_t = w + u h_r$, $r_t = u$, $z_t = w$ при $z = h(r, t)$ ($r = r(\rho, t)$, $z = z(\rho, t)$ — заданные функции, вид которых определяется формой деформации (изгибом и растяжением) торцевой поверхности).

В такой постановке задача очень сложна. Фактически представляют интерес не детали движения (весьма сложные), а только ответ на вопрос: возможна или невозможна концентрация завихренности при возбуждении полоидального колебательного движения и оценка параметров такой концентрации?

Более простая задача получается, если пренебречь вязкостью. В этом случае решения системы (1)–(3) ($\nu = 0$) должны удовлетворять следующим условиям:

— $\psi = 0$ при $r = 0$, $r = R$ и при $z = 0$, $z = H$, если торцевая стенка цилиндра не деформируется;

— $\psi = 0$ при $r = 0$, $r = R$ и при $z = H$; $h_t = w + uh_r$ при $z = h(r, t)$.

В первом случае можно ставить задачу о собственных колебаниях (если $f(r, z, t) = 0$) и о вынужденных колебаниях (если $f(r, z, t) \neq 0$). Однако и в этом случае задача остается чрезвычайно сложной.

Имеется большое число работ, в которых исследуются возмущения в твердотельно вращающейся несжимаемой жидкости в невязкой линейной постановке. Задача оказывается нетривиальной даже в этом случае. Обнаруживается сложная структура спектра собственных колебаний [4, 5]. Для рассматриваемой здесь проблемы представляет интерес работа [4], в которой исследованы вынужденные колебания жидкости во вращающемся цилиндре с гибкой крышкой в линейной постановке (с начальными условиями) и определена довольно сложная структура возникающего течения.

Для понимания рассматриваемого явления большая амплитуда колебаний чрезвычайно существенна (необходима), что требует решения соответствующей задачи в нелинейной постановке. В такой постановке исследований по данной проблеме в литературе найти не удалось.

Нелинейные колебания обладают рядом особенностей, существенно отличающих их от линейных, что демонстрирует одна из простейших моделей нелинейной колебательной системы — уравнение Дуффинга [6, 7]. Характерной чертой свободных нелинейных колебаний является зависимость периода колебаний от амплитуды. В случае вынужденных колебаний имеет место неединственность (для установившихся колебаний) и хаотическое поведение, если решается задача с начальными условиями. Все эти особенности присущи решениям обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, известно, что при некотором значении параметров, входящих в эти уравнения, вынужденные колебания становятся хаотическими [6]. Вряд ли можно ожидать, что нелинейное поведение систем с распределенными параметрами будет более простым. Различные приближенные и численные методы исследования нелинейных систем изложены в работах [6, 7] и др. Из этих исследований можно сделать вывод, что численный расчет нелинейных задач с периодическими условиями по времени (для сплошной среды) очень сложен, требует глубокого предварительного математического анализа и достаточно мощных вычислительных ресурсов.

В связи с вышеизложенным представляет интерес изучение существенно более простых модельных постановок, в которых сохраняется воздействие полоидального течения на эволюцию циркуляции и вертикальной завихренности, что позволяет определить условия, при которых происходит концентрация вертикальной завихренности, и оценить степень (размер области) этой концентрации.

Представляют интерес следующие постановки:

а) задается функция $f(t, r, z)$ и определяются вынужденные установившиеся колебания под действием периодических по времени массовых сил;

б) задается периодическая по времени функция тока $\psi(t, r, z)$ и решается уравнение (1). Определяются Γ , ω , ω_z и радиус зоны концентрации вертикальной компоненты завихренности. Распределение массовых сил $f(t, r, z)$ находится из уравнения (2) (в некотором смысле обратная задача).

В данной работе рассматривается наиболее простой вариант “б”.

Модельная постановка. В линейном приближении функция тока установившихся вынужденных колебаний в рассматриваемой постановке определяется бесконечным рядом

$$\psi = \frac{A_1}{\sin k_1 \pi} r J_1 \left(\frac{\mu_1 r}{R} \right) \sin \left(k_1 \pi \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{\sin k_n \pi} r J_1 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) \sin \left(k_n \pi \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right), \quad (4)$$

где постоянные коэффициенты A_n определяются из граничного условия $h_t = \psi_r/r$ при $z = 0$. Величины μ_n являются корнями уравнений $J_n(\mu_n) = 0$, а величины k_n определяются по формуле

$$k_n = \mu_n H \omega_* / (\pi R \sqrt{\omega_0^2 - \omega_*^2}).$$

Если частота вынужденных колебаний ω_* близка к одной из резонансных частот ω_n , то соответствующая величина k_n мало отличается от целого числа n , а амплитуда этой моды большая. В экспериментах [1–3] резонансные инерционные колебания возбуждались с частотой, соответствующей основной (первой) моде, которая в (4) выделена из общего ряда. Если вынужденные колебания возбуждаются из состояния твердотельного вращения (как в указанных экспериментах), то возбуждаются все моды, но амплитуда резонансной моды растет и по прошествии времени становится доминирующей. В действительности все происходит более сложным образом (см. [4]), но для рассматриваемой проблемы это обстоятельство не столь важно. Однако, когда амплитуда колебаний становится достаточно большой, линейное приближение перестает быть справедливым и течение не описывается резонансной модой ряда (4). Тем не менее из результатов эксперимента можно сделать вывод о том, что при возбуждении колебаний на основной частоте даже при очень больших амплитудах картина течения (топология линий тока) не меняется. Основываясь на этом факте, в качестве пробных периодических (по времени) функций тока будем использовать функцию тока, соответствующую резонансной моде, и близкие к ней, причем без учета искривления торцевой поверхности, используемой для возбуждения колебаний. При таком подходе амплитуда колебаний остается неопределенной (произвольной), и ее величина определяется из сравнения расчетов с результатами экспериментов. Таким образом, исходя из сказанного выше, выбор конкретной формы функции тока определяется ее близостью к собственной функции основной моды инерционных колебаний в цилиндре (с нулевыми граничными условиями), требованием $\psi \rightarrow r^2$ при $r \rightarrow 0$ и возможностью получения аналитических результатов хотя бы в некоторых случаях.

Ниже используются безразмерные (отмечены звездочками) переменные, связанные с исходными следующим образом:

$$r = \frac{R}{\pi} r_*, \quad z = \frac{H}{\pi} z_*, \quad t = \frac{T}{2\pi} t_*, \quad u = \frac{2R}{T} u_*, \quad w = \frac{2H}{T} w_*, \quad v = \frac{1}{2} \omega_0 R v_*,$$

$$\psi = \frac{2HR^2}{\pi^2 T} \psi_*, \quad \Gamma = \frac{\omega_0 R^2}{\pi^2} \Gamma_*, \quad \omega_z = \omega_0 \omega_{z*}.$$

Далее звездочки отбрасываются.

Пусть задана периодическая по времени функция тока. Например,

$$\psi = A \Psi(r) \sin z \sin t,$$

где для $\Psi(r)$ рассматривались два варианта:

$$\Psi_1(r) = r J_1(\mu_1 r / \pi), \quad \Psi_2(r) = r \sin r.$$

Эти варианты близки друг к другу, но второй вариант позволяет получить результат в аналитической форме (распределение $v(r)$ на торцах цилиндра).

Если функция тока задана, то нахождение азимутальной скорости $v(r, z, t)$ и вертикальной завихренности $\omega_z(r, z, t)$ сводится к решению уравнения (1) для $\Gamma(r, z, t)$, в котором надо положить $\nu = 0$. Имеем

$$\Gamma_t + u\Gamma_r + w\Gamma_z = 0.$$

Для определения движения частиц жидкости получаем уравнения

$$\frac{dr}{dt} = u = -\frac{1}{r}\psi_z, \quad \frac{dz}{dt} = w = \frac{1}{r}\psi_r. \quad (5)$$

Решение этой системы уравнений с начальными условиями $r = x$, $z = y$ при $t = 0$ определяет решение уравнения для Γ , так как в соответствии с этим уравнением величина Γ остается постоянной во время движения вдоль траектории $r = r(t, x)$, $z = z(t, y)$ и при $t = 0$ имеем $\Gamma = x^2/2$. Полного аналитического решения этой задачи получить не удастся. Однако такие решения можно получить как в первом, так и во втором вариантах для частиц, расположенных на оси цилиндра (причем эти решения совпадают), а для частиц жидкости на его торцах — во втором варианте. Рассмотрим движение частиц на оси цилиндра. Здесь $r = 0$, и для $z = z(t, y)$ получаем уравнение

$$\frac{dz}{dt} = 2A \sin t \sin z, \quad t = 0, \quad z = y.$$

Решение имеет вид

$$z = 2 \operatorname{arctg} [\exp(2\varphi(t)) \operatorname{tg}(y/2)], \quad (6)$$

где $\varphi(t) = A(1 - \cos t)$.

Из (6) находим

$$z_y = \frac{\exp(2\varphi)}{(1 + \exp(4\varphi) \operatorname{tg}^2(y/2)) \cos^2(y/2)} = \frac{\exp(2\varphi)}{1 + (\exp(4\varphi) - 1) \sin^2(y/2)}.$$

Отсюда, учитывая, что $\omega_z(y, t) = z_y$, $\operatorname{tg}(y/2) = \exp(-2\varphi(t)) \operatorname{tg}(z/2)$, получаем

$$\omega_z(z, t) = \exp(2\varphi(t)) \cos^2(z/2) + \exp(-2\varphi(t)) \sin^2(z/2).$$

Для фазы максимальной (на нижнем торце) завихренности находим

$$\begin{aligned} z = 0: & \quad \omega_z(0, t) = \exp(4A), \quad \varphi(\pi) = 2A, \\ z = H/2: & \quad \omega_z(H/2, t) = (1/2) \operatorname{ch} 4A, \\ z = H: & \quad \omega_z(H, t) = \exp(-4A). \end{aligned}$$

Величина A выбирается на основе сравнения результатов расчета с данными, полученными в эксперименте. Для $A = 0,4 \div 1,0$ $\omega_z(0, t) = \exp(2\varphi(t)_{\max}) \simeq 5 \div 50$, что соответствует диапазону этой величины в экспериментах. Значение $A \simeq 1$ соответствует максимальным (для завихренности) значениям, полученным в [1, 2], а $A \simeq 0,44$ — максимальным значениям, полученным в [3]. Отметим, что в фазе достижения максимального значения завихренности на нижнем торце $\omega_z(H/2) \simeq \omega_z(0)/2$ (если $A \simeq 1$), что близко к результатам [1, 2], где получено $\omega_z(H/2) \simeq 0,4\omega_z(0)$.

Рассмотрим движение на нижнем ($z = 0$) торце, используя функцию тока $\Psi_2(r)$. Здесь

$$\frac{dr}{dt} = -A \sin t \sin r, \quad t = 0, \quad r = x.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$r(t, x) = 2 \operatorname{arctg} (\exp(-\varphi) \operatorname{tg}(x/2)).$$

При $t = 0$ $\Gamma(x) = x^2/2$. Отсюда

$$\Gamma(t, r) = 2[\operatorname{arctg}(\exp(\varphi) \operatorname{tg}(r/2))]^2.$$

Азимутальная составляющая скорости $v(r, t)$ вычисляется по формуле

$$v(r, t) = (2/(\pi r))\Gamma(r, t) = (2/(\pi r))[\operatorname{arctg}(\exp(\varphi) \operatorname{tg}(r/2))]^2.$$

Распределение завихренности $\omega(r) = \Gamma_r/r$ имеет вид

$$\omega(t, r) = 2 \exp(\varphi) \frac{\operatorname{arctg}(\exp(\varphi) \operatorname{tg}(r/2))}{r(\sin^2(r/2) + \exp(\varphi) \cos^2(r/2))}.$$

Отсюда следует, что при $A \simeq 1$ концентрация завихренности происходит в области $r \sim 0,1R$, при этом $v \sim 3V_0$ (в первом варианте с помощью численного расчета найдено, что при $A = 1$ $r = 0,1R$, $v = 2,8V_0$), что находится в качественном согласии с измерениями в [1, 2]. При $A = 0,44$ получаем $r \simeq 0,16$, $v \simeq 0,7$, что качественно соответствует результатам работы [3], но это значение азимутальной скорости не является экстремальным (в окрестности этой точки максимальным является значение азимутальной скорости в системе отсчета, связанной с вращающимся цилиндром).

Вернемся к полной системе уравнений (4), (5) и определим распределение циркуляции $\Gamma(r)$, $v(r)$ и $\omega(r)$ при $z = \pi/2$ в фазе достижения максимальной концентрации завихренности. Перемещение точки ($r = x$, $z = \pi/2$) определяется уравнениями (4), (5) с начальными условиями $r = x$, $z = \pi/2$ при $t = 0$. Интегрируя эти уравнения до $t = \pi$, находим $r_1 = r(x, \pi)$ и $z_1 = z(x, \pi)$. Очевидно, что частица, находившаяся при $t = 0$ в точке ($r_1 = r(x, \pi)$, $z_1 = -z(x, \pi)$), попадет в точку (x, π) . Так как циркуляция сохраняется, должно выполняться равенство

$$\Gamma(x) = \Gamma(r_1) = r_1^2(x)/2.$$

Отсюда (полагая $x = r$) находим азимутальную составляющую скорости

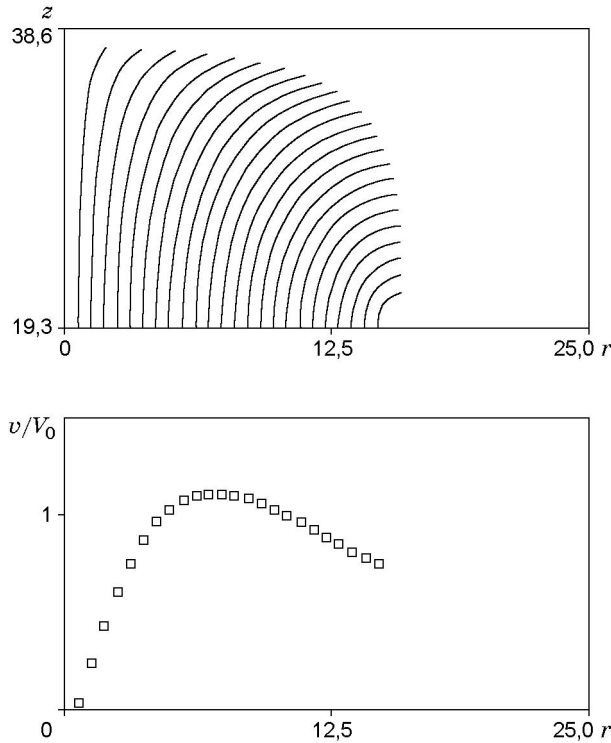
$$v(r) = r_1^2(r)/(\pi r).$$

Распределение завихренности вычисляется по формуле

$$\omega(r) = \frac{1}{r} \Gamma'(r) = \frac{1}{r} r_1 \frac{dr_1}{dr}.$$

Необходимые для реализации описанной процедуры расчеты выполнены численно. Результаты одного из расчетов (во втором варианте для начальной высоты $H/2 = 19,3$ см, $A = 0,7$) представлены на рисунке. Семейство кривых соответствует траекториям частиц. Концы траекторий определяют положение частиц (при $t = \pi$). Точки соответствуют значениям азимутальной скорости на высоте $H/2$ в зависимости от радиуса в фазе максимальной завихренности. Максимальное значение азимутальной скорости $v = 1,1V_0$ достигается на радиусе $r = 6,5$ см. Видно, что имеется только качественное соответствие с результатами измерений.

Тем не менее полученные результаты позволяют утверждать, что наблюдаемые в эксперименте увеличение завихренности и ее концентрация на оси цилиндра являются в основном кинематическим эффектом (адвекция циркуляции азимутальной составляющей скорости и растяжение линий завихренности пологидальными составляющими поля скоростей), который может быть объяснен в рамках модели невязкой жидкости. Для того чтобы получить дополнительные аргументы в пользу этой точки зрения, ниже рассматривается модельная задача с учетом вязкости.



Оценка влияния вязкости. Для оценки влияния вязкости рассмотрим следующую задачу. Система уравнений (1)–(3) имеет решения вида (далее используются размерные переменные)

$$\psi(r, z, t) = f(t)r^2z, \quad \omega(r, z, t) = 0, \quad \Gamma(r, z, t) = \Gamma(r, t),$$

причем $\Gamma(r, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_t - f(t)r\Gamma_r = \nu(\Gamma_{rr} - \Gamma_r/r). \tag{7}$$

Уравнение (7) имеет решения вида

$$\Gamma = \Gamma_0[1 - \exp(-\gamma(t)r^2)],$$

где $\gamma(t)$ удовлетворяет уравнению $\gamma' = 2f(t)\gamma - 4\nu\gamma^2$, которое, в свою очередь, имеет решение

$$\gamma(t) = \gamma_0 \exp\left(2 \int_0^t f(\tau) d\tau\right) / \left[1 + 4\nu\gamma_0 \int_0^t \exp\left(2 \int_0^\tau f(\tau) d\tau\right) d\tau\right].$$

Здесь $\gamma_0 = \gamma(0)$. Решения такого вида получены в [8]. Пусть при $t = 0$ имеется стационарное решение — вихрь Бюргерса

$$\Gamma = \Gamma_0[1 - \exp(-\gamma_0 r^2)], \quad u_0 = -\psi_z/r = -2\nu\gamma_0 r, \quad w_0 = \psi_r/r = 4\nu\gamma_0 z. \tag{8}$$

Пусть в этом решении максимум азимутальной скорости $v = V_0$ достигается при $r = R$. Тогда решение можно представить в виде

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0}{1 - \exp(-\mu)} \left(1 - \exp\left(-\mu \frac{r^2}{R^2}\right)\right), \quad \omega_z = \omega_0 \exp\left(-\mu \frac{r^2}{R^2}\right),$$

где $\Gamma_0 = V_0 R$; $\omega_0 = (\Gamma_0/R^2) \exp(-\mu)$; $V_0 = \exp(-\mu)\omega_0 R$; $\gamma_0 = \mu/R^2$; $\mu = 1,25$ — неравный нулю корень уравнения $\exp(\mu) = 1 + 2\mu$.

В экспериментах, результаты которых приведены в работе [3], $R = 25$ см, $V_0 = 65,4$ см/с, $\nu = 0,01$ см²/с, тогда для поддерживающего стационарное состояние потока на радиусе R имеем $|u| = 2\nu\nu/R = 10^{-3}$ см/с.

Пусть при $t > 0$ $f(t) = -2\nu\gamma_0 - AP(t/T)$, где $P(\tau) = P(\tau + 1)$ — периодическая функция с периодом T , такая что $\max |P(\tau)| = 1$ и $P(0) = 0$, $P'(0) > 0$, $\int_0^1 P(\tau) d\tau = 0$,

$\tau = t/T$, т. е. на исходное стационарное течение накладывается периодическое возмущение полоидальной составляющей поля скоростей. Тогда при $t > 0$ имеем

$$u = -(2\nu\gamma_0 + AP(t/T))r, \quad w = 2(2\nu\gamma_0 + AP(t/T))z.$$

Такая постановка в какой-то степени моделирует течение у неподвижного торца (без учета пограничного слоя, возникающего за счет вязкого прилипания на нем) или (более точно) течение в окрестности узла скорости w , если возбуждается мода резонансных колебаний с длиной волны, равной высоте цилиндра. Представляет интерес изучение вопроса о влиянии вязкости на величину завихренности и степень ее концентрации.

Если $\nu = 0$, то на то же начальное поле азимутальной скорости (8) накладывается колебательный полоидальный поток

$$u = -AP(t/T)r, \quad w = 2AP(t/T)z$$

(при $\nu = 0$ первоначальный полоидальный поток отсутствует: $u_0 = w_0 = 0$). В этом случае решение имеет вид

$$\Gamma(\tau) = \Gamma_0(1 - \exp(-\gamma(\tau)r^2)), \quad \gamma(\tau) = \gamma_0 \exp\left(2AT \int_0^\tau P(\tau') d\tau'\right).$$

Завихренность на оси вихря $r = 0$

$$\omega_z(\tau) = \omega_0\gamma(\tau)/\gamma_0, \quad \omega_0 = 2\gamma_0\Gamma_0.$$

Следовательно,

$$\omega_z(\tau)/\omega_0 = \exp(\beta g(\tau)),$$

где $\beta = 2AT$; $g(\tau) = \int_0^\tau P(\tau') d\tau'$ — периодическая функция $g(\tau + 1) = g(\tau) > 0$, причем $0 < g(\tau) < 1$.

В случае вязкой жидкости для $\tau > 0$ получаем ($\gamma(0) = \gamma_0$)

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 F(\tau) / \left(1 + \alpha \int_0^\tau F(\tau') d\tau'\right), \quad F(\tau) = \exp(\alpha\tau + \beta g(\tau)),$$

где $\alpha = 4\nu\gamma_0 T$.

Нетрудно показать, что при $\tau \rightarrow \infty$ функция $\gamma(\tau)$ стремится к функции $\gamma_*(\tau)$ такой, что $\gamma_*(\tau + 1) = \gamma_*(\tau)$, т. е. течение выходит на периодический режим с периодом T , совпадающим с периодом внешнего воздействия, и

$$\gamma_*(\tau) = \gamma_*\gamma_0 F(\tau) / \left(\gamma_0 + \alpha\gamma_* \int_0^\tau F(\tau') d\tau'\right), \quad \gamma_* = \gamma_*(0) = (\exp(\alpha) - 1) / \left(\int_0^1 F(\tau) d\tau\right).$$

Завихренность на оси $r = 0$ определяется равенством

$$\omega_z(\tau) = \omega_0 \gamma(\tau) / \gamma_0.$$

Можно показать, что $\gamma(\tau) / \gamma_0 < \exp(\beta g(\tau))$, т. е. максимальная завихренность на оси вихря всегда меньше, чем в невязкой жидкости. Отсюда следует, что и степень концентрации завихренности ниже, чем в идеальной жидкости. Однако, если $\alpha\tau \ll 1$, то это отличие мало, и оно становится существенным только при $\alpha\tau > 1$, что соответствует условию $t > 10^3$ с ($\tau > 400$). При этом величина завихренности на оси колеблется около величины, мало отличающейся от исходной: $\omega_z(0, \tau) / \omega_0 = \gamma_*(\tau) / \gamma_0 \sim 1$. Время для выхода колебаний на этот режим достаточно велико (примерно 20 мин), и обычно такой режим в эксперименте регулярно не наблюдается (кроме того, в замкнутом объеме течение может эволюционировать иначе), однако не исключено, что специально поставленный эксперимент подтвердит возможность существования такого режима.

Таким образом, влияние вязкости в объеме, удаленном от стенок цилиндра, мало. В окрестности торцов цилиндра влияние пограничных слоев Экмана и Стокса (связанного с радиальным потоком) может оказаться существенным и требует дополнительного исследования.

Энергетическая оценка. Как показано ниже, энергия возникающего течения существенно превышает энергию первоначального твердотельного вращения (в несколько раз). Отсюда следует, что возбужденные инерционные колебания сами по себе не могут приводить к возникновению торнадоподобного вихря — необходима подкачка энергии. В эксперименте такая подкачка обеспечивается за счет работы, совершаемой колеблющейся гибкой торцевой стенкой цилиндра. В естественных условиях, когда возбуждение инерционных колебаний происходит в результате взаимодействия мезоциклона с неровностями земной поверхности, источником дополнительной энергии может служить только потенциальная энергия, связанная с неустойчивой стратификацией атмосферы. При этом существенную роль играют процессы, связанные с конвективной неустойчивостью, а инерционные колебания могут являться спусковым механизмом, инициирующим эти процессы.

Рассмотрим идеализированный процесс перестройки осесимметричного течения от твердотельного вращения к потенциально твердотельному в силу некоторых причин (не конкретизируя их). При этом будем предполагать сохранение кинетической энергии и осевой составляющей момента импульса (аналогично случаю возбуждения свободных инерционных колебаний). Найдем энергию и момент импульса в начальном и конечном состояниях, предполагая, что в результате перестройки возникает потенциально твердотельное течение, в котором при $r < r_*$ жидкость вращается как твердое тело, а при $r > r_*$ течение потенциальное. Тогда в начальный момент времени момент импульса

$$K_0 = (\pi\rho/2)V_0R^3H,$$

энергия

$$E_0 = (\pi\rho/4)V_0^2R^2H.$$

После перестройки момент импульса

$$K_* = \pi\rho V_* r_* (R^2 - r_*^2/2)H,$$

энергия

$$E_* = (\pi\rho/4)V_*^2 r_*^2 H (1 + 4 \ln(R/r_*)).$$

В силу сохранения момента импульса и энергии для определения параметров возникающего течения V_* , r_* получаем систему уравнений

$$V_* r_* (2R^2 - r_*^2) = V_0 R^3, \quad V_*^2 r_*^2 (1 + 4 \ln(R/r_*)) = V_0^2 R^2.$$

Отсюда находим $r_* \simeq 0,52R$, $V_* \simeq 1,14V_0$, $\omega_* \simeq 2,1\omega_0$, что явно не соответствует результатам эксперимента. Для того чтобы получить значения определяемых величин, сопоставимые с полученными в эксперименте, необходимо добавить в правую часть уравнения энергии дополнительную энергию (значительную). В эксперименте при возбуждении инерционных колебаний подкачка энергии осуществляется за счет работы, совершаемой при деформации гибкой торцевой крышки вращающегося цилиндра.

В естественных условиях дополнительная энергия может появиться только за счет потенциальной энергии неустойчиво стратифицированной атмосферы. Величину этой энергии можно оценить следующим образом. Пусть имеется неустойчиво стратифицированная (линейно) атмосфера: $\rho = \rho_0 + \Delta\rho z/H$. В состоянии устойчивого равновесия $\rho = \rho_0 + \Delta\rho - \Delta\rho z/H$, так как полная масса жидкости в том и другом случаях одинакова. Тогда запас потенциальной энергии вычисляется по формуле

$$E_p = \int_0^H \left(\rho_0 + \Delta\rho \frac{z}{H} \right) g z dz - \int_0^H \left(\rho_0 + \Delta\rho - \Delta\rho \frac{z}{H} \right) g z dz = \frac{1}{6} \Delta\rho g H^2.$$

При $H \sim 1$ км эта величина может в несколько раз превышать кинетическую энергию мезоциклона, в котором происходит зарождение торнадо. При такой подкачке энергии существенную роль играют конвективные течения, и говорить о возникновении торнадоподобного вихря только за счет возбуждения инерционных колебаний было бы неверно. Однако концентрация завихренности, достижимая только за счет возбуждения инерционных колебаний, может послужить толчком (спусковым механизмом) для развития неустойчивости и превращения потенциальной энергии неустойчиво стратифицированной атмосферы в кинетическую энергию торнадо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаренко В. Г., Тарасов В. Ф. Экспериментальная модель смерча // ПМТФ. 1987. № 5. С. 115–122.
2. Макаренко В. Г., Тарасов В. Ф. Экспериментальная модель смерча // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305, № 2. С. 297–300.
3. Ахметов Д. Г., Луговцов Б. А., Макаренко В. Г., Никулин В. В. Возникновение торнадоподобных вихрей во вращающейся жидкости при вынужденных инерционных колебаниях большой амплитуды // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 2. С. 87–91.
4. Baines P. G. Forced oscillation of an enclosed rotating fluid // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 533–546.
5. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
6. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
7. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991.
8. Rott N. On the viscous core of a line vortex // Z. angew. Math. Phys. 1958. Bd 9. S. 543–553.

Поступила в редакцию 24/XII 2001 г.