

DOI: 10.34020/2073-6495-2020-2-177-182

УДК 311

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАВИСИМОСТИ УРОВНЯ ВОДЫ В РЕКЕ ОБИ ОТ СБРОСА ВОДЫ НА ГЭС

Логачёв А.В., Логачёва О.М.

Новосибирский государственный университет
экономики и управления «НИНХ»,
Сибирский государственный университет геосистем и технологий
E-mail: avlogachov@mail.ru, omboldovskaya@mail.ru

Карпик П.А.

Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет
E-mail: karpikpavel@yandex.ru

В работе исследуется зависимость среднего уровня воды в р. Оби по Новосибирскому водному посту от скорости ее сброса на ГЭС. Для моделирования данной зависимости используется стохастический подход. В результате анализа массива статистических данных получена двухкомпонентная математическая модель. Одновременное использование Probit модели определения вероятности и построение регрессионной прямой приводит к получению нелинейной связи между уровнем воды и скоростью сброса, что позволяет строить более точный прогноз паводка.

Ключевые слова: прогноз паводка, стохастическая модель, Probit модель, регрессионный анализ.

MATHEMATICAL MODEL OF WATER LEVEL DEPENDENCE IN THE OB RIVER FROM THE DISCHARGE OF WATER TO HYDROELECTRIC POWER STATION

Logachov A.V., Logachova O.M.

Novosibirsk State University of Economics and Management,
Siberian State University of Geosystems and Technologies
E-mail: avlogachov@mail.ru, omboldovskaya@mail.ru

Karpik P.A.

Novosibirsk State University
E-mail: karpikpavel@yandex.ru

The dependence of the average water level in the Ob River at the Novosibirsk water post on the discharge rate to a hydroelectric power station is being investigated. The stochastic approach is used to model this dependence. As a result of the analysis of an array of statistical data a two-component mathematical model has been obtained. The simultaneous use of the Probit probability determination model and the construction of a regression straight line result in a nonlinear relationship between the water level and the discharge rate, which allows for a more accurate flood forecast.

Keywords: flood forecast, stochastic model, Probit model, regression analysis.

1. ВВЕДЕНИЕ

В результате паводка государству, малому и среднему бизнесу наносится значительный ущерб. Так, например, в 2014 г. паводок, начавшийся в бассейне Верхней Оби в третьей декаде мая и продолжавшийся до конца июня, нанес экономике Западной Сибири ущерб в размере около 6 млрд руб. Поэтому прогнозирование уровня воды в реке является важной экономической задачей для густонаселенных районов, находящихся в окрестностях бассейнов рек. Если в черте этих районов находится ГЭС, то появляется возможность предотвращения или регулирования интенсивности паводка с помощью изменения расхода воды (скорости сброса воды).

В работе рассмотрена модель зависимости уровня воды в реке от расхода воды на ГЭС. Предложенная модель была использована для прогноза среднего уровня воды по Новосибирскому водному посту, в зависимости от расхода воды на Новосибирской ГЭС. Статистические данные были предоставлены Верхне-Обским бассейновым водным управлением.

В работе [2] была получена следующая формула для прогноза среднего уровня воды по Новосибирскому водному посту

$$y^*(t) = 0,1X(t - l) - 76, \quad (1)$$

здесь $y^*(t)$ – прогноз уровня, см; $X(t - l)$ – расход воды на ГЭС, м³/с; l – лаг (время запаздывания, т.е. время, необходимое для установления уровня, соответствующего данному расходу воды).

Линейный вид модели обусловлен формой сечения русла до критического уровня, уравнением расхода [6, с. 36–37] и того, что основная часть воды поступает через ГЭС.

Однако, как было отмечено в [2], формула (1) дает завышенный прогноз для случаев, когда преодолен критический уровень, начиная с которого происходит подтопление. По-видимому, это вызвано тем, что меняется вид сечения русла Оби после того, как начинается подтопление земель (рис. 1).

Большинство современных моделей, связанных с описанием поведения водоема основаны на физико-математическом моделировании [1, 3, 4, 7–11].

В работах [1, 4] были рассмотрены реки Дальневосточного региона. В работе [4] рассмотрена линейная модель регрессии, описывающая зависимость паводкового стока от атмосферных осадков. В работе [1] изучена полумарковская модель для прогнозирования максимального уровня воды в реке. Реки Сибири рассмотрены в работе [3], где предложена модель стекания воды по руслу, описанная уравнением Сен-Венана. Реки южных регионов России, в частности, горные реки, рассмотрены в работах [8, 10, 11].

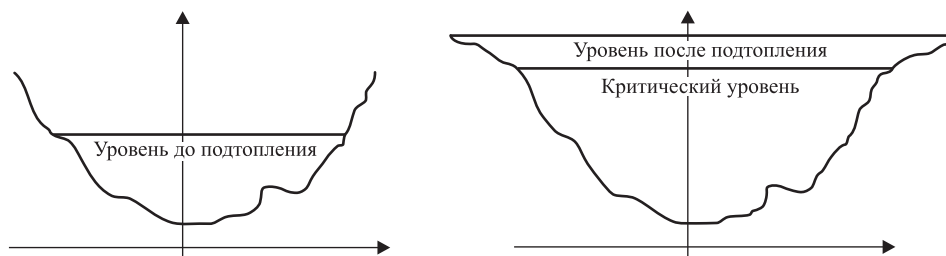


Рис. 1. Сечение русла

В [8, 10] построены модели линейной регрессии и полиномиальной регрессии зависимости уровня воды в русле горной реки от уровня в прошлые моменты времени и от количества выпавших осадков. Прогноз уровня воды с помощью цепей Маркова сделан в [11]. В [7] сформулированы общие методические подходы к прогнозированию паводка. Модель зависимости уровня воды от толщины льда предложена в работе [9], где для прогнозирования использованы регрессионные уравнения и искусственные нейронные сети.

Таким образом, большинство вышеописанных моделей содержат случайные элементы. Мы будем рассматривать стохастическую модель, которая состоит из двух компонент. Первая компонента – прогноз паводка (ожидается он или нет), вторая – линейная регрессия, которая прогнозирует уровень воды, в зависимости от прогноза, сделанного по первой компоненте. Как будет показано, предложенная модель дает более качественный прогноз, чем формула (1).

2. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Будем использовать следующие переменные: $X(t)$ – расход воды на ГЭС, $\text{м}^3/\text{с}$; $Y(t)$ – средний уровень воды по Новосибирскому водному посту, см; $Z(t)$ – индикатор наводнения:

$$Z(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } Y(t) < Y_{\text{кр}}, \\ 1, & \text{если } Y(t) \geq Y_{\text{кр}}. \end{cases}$$

Здесь $Y_{\text{кр}}$ – критический уровень, начиная с которого наблюдается подтопление земель. В нашем случае $Y_{\text{кр}} = 350$ см.

Для определения вероятностей наводнения будем использовать Probit модель [6, с. 323–336]. Обозначим $F(Z(t)) = P(Z(t) = 1)$ – вероятность того, что будет наводнение. В Probit модели $F(Z(t)) = \Phi(a_1 X(t-l) + b_1)$, где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \text{ – стандартное нормальное распределение.}$$

Будем предполагать, что линейная зависимость среднего уровня воды от расхода воды различна в зависимости от того, произошло наводнение или нет. Таким образом, эту зависимость можно задать следующей формулой:

$$Y(t) = (a_2 X(t-l) + b_2 + \varepsilon(t)) \cdot Z(t) + (a_3 X(t-l) + b_3 + \varepsilon(t)) \cdot (1 - Z(t)),$$

где $\varepsilon(t)$ – изменение уровня воды, вызванное факторами, не связанными с расходом воды.

Будем предполагать, что $\varepsilon(t)$ имеет нормальное распределение, математическое ожидание $\mathbf{E}\varepsilon(t) = 0$, дисперсия $\mathbf{D}\varepsilon(t) = \sigma^2(t) \leq \text{const} < \infty$, и если $t \neq s$, то ковариация $\text{cov}(\varepsilon(t), \varepsilon(s)) = 0$. В этом случае среднее значение зависимой переменной удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{E}Y(t) = \mathbf{E}[(a_2 X(t-l) + b_2) \cdot Z(t) + (a_3 X(t-l) + b_3) \cdot (1 - Z(t)) + \varepsilon(t)] = \\ &= (a_2 X(t-l) + b_2) \cdot F(Z(t)) + (a_3 X(t-l) + b_3) \cdot (1 - F(Z(t))) = \\ &= a_3 X(t-l) + b_3 + ((a_2 - a_3) X(t-l) + b_2 - b_3) \cdot F(Z(t)) \end{aligned}$$

и оценки коэффициентов методом максимального правдоподобия будут состоятельными.

Заметим, что если бы вид регрессии зависел от того, принимает ли независимая переменная значение ниже или выше фиксированного уровня, то можно было использовать регрессию с фиктивной переменной. В нашем же случае это невозможно, так как вид регрессии зависит от того, будет ли значение зависимой переменной больше или меньше критического уровня.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ

Вышеописанная модель была применена авторами для анализа статистических данных за период 01.01.2012 по 31.12.2017 о среднем уровне воды в р. Оби по Новосибирскому водному посту и расхода воды на Новосибирской ГЭС. С помощью метода максимального правдоподобия были найдены оценки коэффициентов a_i , b_i , где $i = 1, 2, 3$. Как результат была получена формула:

$$y^*(t) = 0,099X(t-l) - 76,871 + (-0,016X(t-l) + 71,975) \times \Phi(-23,972 + 0,01X(t-l)),$$

где $y^*(t)$ – прогноз среднего уровня воды в р. Оби по Новосибирскому водному посту, временной лаг l равен 48 ч (двое суток).

Отметим также, что функция $\Phi(-23,972 + 0,01X(t-l))$ является оценкой вероятности наводнения и может быть использована в качестве индикатора для уменьшения расхода воды. Обычно предлагается уменьшать скорость сброса, если ее значение больше чем 0,5.

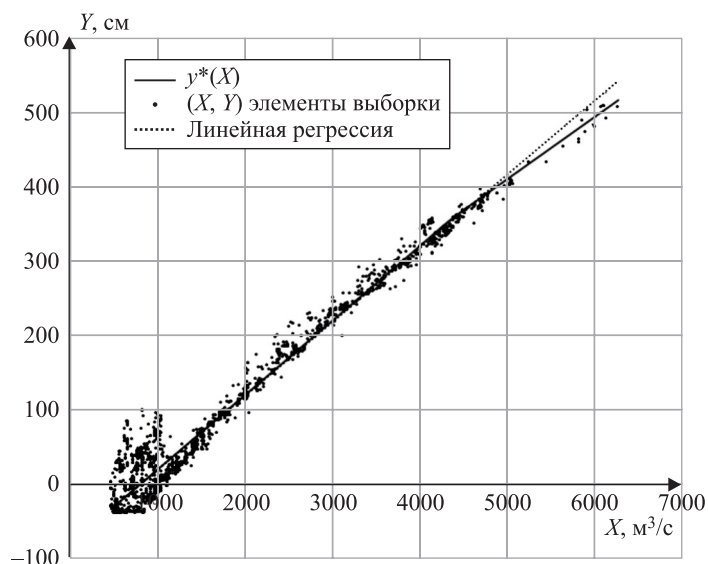


Рис. 2. Корреляционное поле

Из графика рис. 2 видно, что предложенная модель дает не менее точный прогноз для случая, когда уровень воды не превосходит 350 см, и более точный прогноз для случая, когда уровень воды выше 350 см, чем линейная модель (1). Это утверждение также подтверждается статистическим анализом.

4. ВЫВОДЫ

Предложенная модель была апробирована на данных за 2018 г. Стандартная ошибка составила $s = 22,32$ см, достигнутый коэффициент детерминации $R^2 = 0,97$, что говорит о хорошем качестве прогноза. Апробация позволяет предположить, что предложенная модель будет давать качественный прогноз в тех случаях, когда район расположен недалеко от ГЭС ниже по течению реки и основная часть воды поступает через эту станцию.

Литература

1. *Алексеевский Н.И., Юмина Н.М.* Многолетние изменения максимальных уровней воды на Нижнем Амуре // *Вод. ресурсы.* 2018. Т. 45. № 1. С. 3–14.
2. *Башта Т.М., Руднев С.С., Некрасов Б.Б. и др.* Гидравлика, гидромашины и гидроприводы: Учебник для машиностроительных вузов. 4-е изд. М.: Издат. дом «Альянс», 2010. 423 с.
3. *Каперова Е.А., Федоров Г.А.* Моделирование неустановившегося движения воды в нижнем бьефе Богучаевской ГЭС // *Вычислительные технологии.* 2008. Т. 13. Спец. вып. 2. С. 28–38.
4. *Лариошкин В.В.* Физико-статистические и водно-балансовые модели прогноза стока дождевых паводков в бассейне реки Онон // *География и природные ресурсы.* 2017. № 1. С. 188–195.
5. *Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. Начальный курс. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2004. 576 с.
6. *Редикарцева Е.М., Карник П.А.* Математическое моделирование зависимости уровня воды в реке Оби в городе Новосибирске от сброса воды на Новосибирской ГЭС // *Вестник СГУГиТ.* 2017. Т. 22. № 4.
7. *Сартин С.А., Маховых И.А., Немилостев Н.Д., Литвиненко М.Ю.* Применение аналитической модели половодья реки Есиль к паводку 2014 г. и возможности ее уточнения // *Геоматика.* 2014. № 4. С. 91–93.
8. *Семенчин Е.А., Титов Н.Г., Кузякина М.В., Лебедев К.А.* Сравнительный анализ методов математического моделирования уровня воды в реке горного типа (на примере реки Мзымта) // *Фундаментальные исследования.* 2014. № 12. С. 952–957.
9. *Сумачев А.Э.* Оценка возможности прогнозирования максимального ледоходного уровня воды с использованием максимальной толщины льда на примере рек бассейна Северной Двины // *Ученые записки РГГМУ.* 2019. № 54. С. 48–57.
10. *Титов Н.Г., Кузякина М.В., Лебедев К.А.* Адаптивные модели временного ряда уровня воды в реке горного типа // *Научный журнал КубГАУ.* 2015. № 114 (10). С. 1514–1527.
11. *Титов Н.Г., Кузякина М.В., Лебедев К.А.* Построение теоретической модели прогнозирования уровня воды в реке горного типа с применением цепей Маркова // *Научный журнал КубГАУ.* 2015. № 114 (10). С. 1528–1538.

Bibliography

1. *Alekseevskij N.I., Jumina N.M.* Mnogoletnie izmenenija maksimal'nyh urovnej vody na Nizhnem Amure // *Vod. resursy.* 2018. Т. 45. № 1. P. 3–14.
2. *Bashta T.M., Rudnev S.S., Nekrasov B.B. i dr.* Gidravlika, gidromashiny i gidroprivody: Uchebnik dlja mashinostroitel'nyh vuzov. 4-e izd. M.: Izdat. dom «Al'jans», 2010. 423 p.
3. *Kaperova E.A., Fedorov G.A.* Modelirovanie neustanovivshegosja dvizhenija vody v nizhnem b'efe Boguchaevsoj GJeS // *Vychislitel'nye tehnologii.* 2008. Т. 13. Spec. vyp. 2. P. 28–38.

4. *Larioshkin V.V.* Fiziko-statisticheskie i vodno-balansovye modeli prognoza stoka dozhdevykh pavodkov v bassejne reki Onon // *Geografija i prirodnye resursy*. 2017. № 1. P. 188–195.
5. *Magnus Ja.R., Katyshev P.K., Pereseckij A.A.* Jekonometrika. Nachal'nyj kurs. 6-e izd., pererab. i dop. M.: Delo, 2004. 576 p.
6. *Redikarceva E.M., Karpik P.A.* Matematicheskoe modelirovanie zavisimosti urovnja vody v reke Obi v gorode Novosibirske ot sbrosa vody na Novosibirskoj GJeS // *Vestnik SGUGiT*. 2017. T. 22. № 4.
7. *Sartin S.A., Mahovyh I.A., Nemilostev N.D., Litvinenko M.Ju.* Primenenie analiticheskoj modeli polovod'ja reki Esil' k pavodku 2014 g. i vozmozhnosti ee utochnenija // *Geomatika*. 2014. № 4. P. 91–93.
8. *Semenchin E.A., Titov N.G., Kuzjakina M.V., Lebedev K.A.* Sravnitel'nyj analiz metodov matematicheskogo modelirovanija urovnja vody v reke gornogo tipa (na primere reki Mzymta) // *Fundamental'nye issledovanija*. 2014. № 12. P. 952–957.
9. *Sumachev A.Je.* Ocenka vozmozhnosti prognozirovanija maksimal'nogo ledohodnogo urovnja vody s ispol'zovaniem maksimal'noj tolshhiny l'da na primere rek bassejna Severnoj Dviny // *Uchenye zapiski RGGMU*. 2019. № 54. P. 48–57.
10. *Titov N.G., Kuzjakina M.V., Lebedev K.A.* Adaptivnye modeli vremennogo rjada urovnja vody v reke gornogo tipa // *Nauchnyj zhurnal KubGAU*. 2015. № 114 (10). P. 1514–1527.
11. *Titov N.G., Kuzjakina M.V., Lebedev K.A.* Postroenie teoreticheskoj modeli prognozirovanija urovnja vody v reke gornogo tipa s primeneniem cepej Markova // *Nauchnyj zhurnal KubGAU*. 2015. № 114 (10). P. 1528–1538.