

При коротких импульсах нагрузки ($l = 0,25$) в окрестности точки A формируется короткая волна: очень большие градиенты ($\partial p/\partial x \sim 10^2$) при максимальных значениях самих функций. Проанализируем влияние отброшенных членов в системе (2.1). Непосредственные вычисления по данным из расчетов показывают, что слагаемые $\theta_0 v u_y$ и $\theta_0 v v_y$ вплоть до $\theta_0 \approx 0,3$ остаются на порядок меньше $|\nabla p|$. Кроме того, коэффициенты $(1 - \theta_0 u)/(1 - \theta) \approx 1 - (1 - p_{00})\theta_0$ в первых двух и $(1 - u\theta_0)$ в третьем уравнениях (2.1) заменены на единицу. Наибольшую погрешность может внести последнее. Однако значения функций в точке A здесь вычисляются точно, а окрестность, где $u = p$ может существенно превышать единицу, мала, поэтому следует ожидать, что учет конвективных членов при $\theta < 0,2$ окажет малое влияние на решение в целом в отличие от [9], где ситуация принципиально другая.

Поступила 13 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Херман В. Определяющее уравнение для динамического сжатия пластических пористых материалов.— Сб. пер. Механика, 1970, № 5.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
3. Купрадзе В. Д. О приближенном решении задач математической физики.— УМН, 1967, т. 22, № 2.
4. Верюжский Ю. В., Вусатюк А. И., Савицкий В. В. Численная реализация метода академика В. Д. Купрадзе при решении некоторых статических задач теории упругости.— Сопротивление материалов и теория сооружений. Респ. межвед. науч.-техн. сб. Киев, «Будівельник», 1975, вып. 25.
5. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М., «Наука», 1976.
6. Первозванский А. А. Поиск. М., «Наука», 1970.
7. Симонов И. В. Дифракция плоской ударной волны на углах в идеальной уплотняющейся среде.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1978, № 1.
8. Симонов И. В. Численно-аналитическое исследование задачи о нагрузке, бегущей по слою идеально уплотняющегося материала. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, 1978, № 115.
9. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн.— ПМТФ, 1960, № 1.

УДК 539.3+539.4

О ДИНАМИКЕ РАЗРУШЕНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА

М. В. Степаненко

(Новосибирск)

Рассмотрена динамическая задача о концентрации напряжений и последующем распространении трещины отслаивания в однонаправленном стеклопластике. Исследуется плоская деформация, материал стеклопластика соответствует модели [1], т. е. предполагается, что армирующие волокна находятся в одноосном напряженном состоянии (растяжение — сжатие), а наполнитель (связующее) испытывает только напряжения сдвига.

Для практических целей представляется важным выявление особенностей кинетики трещин и возможности их локализации. В данной работе эти вопросы решаются на основе численного метода, позволяющего с приемлемой точностью описать нестационарный волновой процесс концентрации напряжений и последующего разрушения.

Задаче о динамической концентрации напряжений вблизи дефекта в стеклопластике посвящено ограниченное число работ (см., например, [2, 3]). Здесь использована постановка работы [2], где решение динамической задачи получено в виде суммы ряда с конечным числом слагаемых, каждое из которых соответствует вкладу волны, отраженной от определенного волокна. В работе [3] обсуждается вопрос о приближении со временем динамического решения к статическому. Провести же анализ кинетики разрушения с помощью аналитических методов не удастся.

Постановка задачи состоит в следующем: волокна растянуты на бесконечности постоянной силой; в нулевой момент времени вследствие некоторого дефекта одно из волокон мгновенно разрывается; в дальнейшем разорванное волокно начинает разгружаться, а целые — догружаться, возмущения от одного стержня к другому переносятся волнами сдвига в связующем; если считать, что догружение целых волокон не приводит к разрушению последних, то разрушение может реализоваться лишь в виде продольных трещин отслаивания.

Направим координату y вдоль волокна, x — перпендикулярно ему, а начало координат совместим с дефектом. За единицы измерения примем величины, относящиеся к заполнителю: плотность ρ , модуль сдвига G , скорость сдвиговых волн $c_2 = \sqrt{G/\rho}$, расстояние между волокнами H (H/c_2 — единица времени). Введем обозначения: ρ_1 , E , h — плотность, модуль Юнга, толщина волокна ($c_1 = \sqrt{E/\rho_1}$ — скорость звука в волокне), $u_j(y, t)$ — смещение j -го волокна ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $v(x, y, t)$ — смещение точек заполнителя, $\sigma_j = E \partial u_j / \partial y$, $\tau = G \partial v / \partial x$ — напряжения в волокнах и связующем.

Стеклопластик растянут на бесконечности напряжением P . Будем решать задачу относительно дополнительных возмущений, вызванных обрывом волокна (пусть это волокно $j = 0$). Уравнения в перемещениях и граничные условия имеют вид (начальные условия нулевые)

$$(1) \quad \partial^2 v / \partial t^2 = \partial^2 v / \partial x^2;$$

$$(2) \quad \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \frac{1}{Eh} Q_j, \quad Q_j = \tau|_{x=j+0} - \tau|_{x=j-0};$$

$$(3) \quad v(j, y, t) = u_j(y, t);$$

$$(4) \quad \partial u_j / \partial t = -P/E \quad (j = 0), \quad u_j = 0 \quad (j \neq 0) \quad \text{при } y = 0,$$

где Q_j — сила, действующая на j -е волокно со стороны связующего.

Будем считать, что разрушение связующего наступает после превышения напряжениями сдвига некоторой величины τ_p . Критерием разрушения в некоторой точке связующего служит неравенство

$$(5) \quad \tau(x, y, t) > \tau_p.$$

Поскольку было принято предположение о том, что не происходит разрыва волокон с номерами $j \neq 0$, то интенсивность сдвиговых напряжений в области $|x| > 1$ по сравнению с полосой $|x| \leq 1$ невелика. Поэтому ограничим исследование разрушения изучением процесса отслаивания в полосе $|x| \leq 1$.

В силу симметрии рассматриваем четверть плоскости. Разделим возможные области разрушения на три (разделение это чисто условное и

введено ради удобства): границы полосы $x = 0$, $x = 1$ и область $0 < x < 1$. Рассмотрим, как изменяются уравнения задачи, если разрушение происходит в какой-либо из этих трех областей.

1. Граница $x = 0$. Если в некоторой точке связующего $x = +0$, $y = y_{0*}$ в момент времени t_{0*} выполняется условие (5), то в уравнении (2) следует положить

$$Q_0 = 0 \quad (y = y_{0*}, t = t_{0*}).$$

В последующие моменты времени ($t > t_{0*}$) возможны следующие варианты развития разрушения:

а) Фронт разрушения движется вдоль волокна: происходит отслаивание связующего от волокна и образование трещины $l_0^-(t) \leq y \leq l_0^+(t)$, где l_0^- , l_0^+ — координаты концов последней.

При этом в уравнении (2) следует положить

$$(6) \quad Q_0 = 0 \quad (y \in [l_0^-, l_0^+], t > t_{0*}),$$

а граничное условие для связующего (3) должно быть заменено условием отсутствия напряжений на образовавшейся свободной поверхности

$$(7) \quad \tau = 0 \quad (x = +0, y \in [l_0^-, l_0^+], t > t_{0*}).$$

б) При отслаивании (или без такового) фронт разрушения продвигается также и в глубь связующего в направлении $x > 0$. В этом случае условие (6) для волокна не меняется, а условие (7) необходимо ставить уже на границе между разрушенной и неразрушенной областями связующего, заменяя граничное условие (3) на условие отсутствия напряжений на свободной поверхности перед фронтом разрушения $x = x^*(t, y)$

$$(7') \quad \tau = 0 \quad (x = x^*, y \in [L_0^-(x), L_0^+(x)], t > t_{0*}).$$

Следует отметить, что координаты концов $L_0^-(x)$, $L_0^+(x)$ в (7') могут не совпадать с l_0^- , l_0^+ в (7).

2. Граница $x = 1$. Аналогично случаю 1 имеем (ниже особо не выделяем варианты «а», «б», соответствующие случаю 1)

$$(8) \quad Q_1 = \tau|_{x=1+0} \quad (y \in [l_1^-, l_1^+], t \geq t_{1*});$$

$$(9) \quad \tau = 0 \quad (x = 1-0, y \in [l_1^-, l_1^+], t \geq t_{1*}),$$

где t_{1*} — начало разрушения; $l_1^-(t)$, $l_1^+(t)$ — координаты концов трещины отслаивания связующего от первого целого волокна.

3. Пусть $A_k(x, y)$ — точки внутри полосы $0 < x < 1$, в которых в моменты времени t_{*k} достигается условие (5). В этих точках при $t \geq t_{*k}$ уравнение (1) теряет смысл, и вместо него следует ввести условия

$$(10) \quad \tau = 0 \quad (\overline{x, y} = A_k(x, y), t \geq t_{*k}),$$

которые будут служить граничными условиями для уравнения (1), определенного для целого материала ($\overline{x, y} \neq A_k(x, y)$).

Выражения (7), (9), (10) на свободной границе, образованной в связующем трещинами отслаивания или фронтом разрушения, выписаны в предположении, что выполняются условия применимости используемой модели (деформации сдвиговые, и они малы) и, кроме того, в процессе

разрушения на образовавшихся поверхностях не происходит каких-либо необратимых явлений, иными словами, закон состояния для связующего считается справедливым для всех точек последнего, включая границу.

Исследование процессов, происходящих в области, занятой разрушенным материалом, выходит за рамки данной работы и здесь не проводится.

Отметим характерные особенности поведения искомого решения. При распространении волнового процесса от окрестности дефекта в глубь материала стеклопластика создается сложная интерференционная картина. Основная доля энергии переносится волнами сдвига, которые, частично отражаясь от волокна, как от подвижной границы, перекачивают часть энергии в продольные движения волокон. Последние, в свою очередь, излучают волны сдвига в связующее, и область, занятая возмущениями, растет, пока на некотором (большом) расстоянии от зоны дефекта (формально на бесконечности) волновой процесс практически не затухнет.

Волны напряжений в волокнах и связующем имеют многоступенчатую форму, отрезки плавного изменения решения чередуются с разрывами, доставляемыми фронтами отраженных волн, амплитуды скачков на фронтах вследствие многократного взаимодействия друг с другом не имеют упорядоченной структуры.

Уравнения (1), (2) с граничными условиями (3), (4) и дополнительными условиями при отслаивании (5)–(10), описывающие эту картину, решались численно.

С целью описания волновых фронтов с приемлемой точностью параметры разностной сетки (Δt , Δx , Δy) выбирались из условий минимизации численной дисперсии [5]. В плоской задаче динамической теории упругости минимизировать численную дисперсию довольно трудно. Исследуемая модель среды представляет собой некоторый вырожденный случай плоской задачи. От последней она отличается тем, что, хотя фронты продольной и сдвиговой волн распространяются с теми же скоростями c_1 и c_2 , эти два типа волн взаимодействуют лишь на прямых линиях, определяемых волокнами, а не во всей области, занятой возмущениями. Благодаря свойствам используемой модели минимизировать численную дисперсию удается довольно эффективно.

На основе гармонического анализа можно показать, что групповые скорости высокочастотных (в пределе $\omega \rightarrow \infty$) составляющих, формирующих разрывы, будут в дифференциальной и разностной модели совпадать, если параметры сетки удовлетворяют следующему условию:

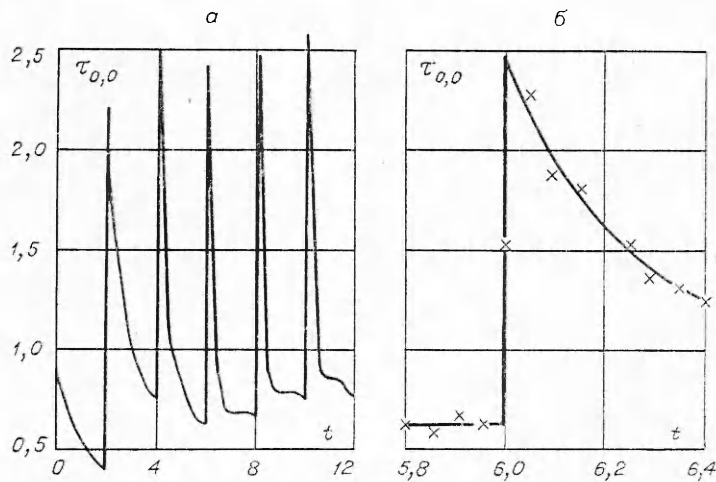
$$(11) \quad \Delta t = \Delta x = c_1^{-1} \Delta y.$$

При этом область зависимости конечно-разностных уравнений совпадает с областью зависимости исходных (1), (2). Равенство (11), однако, противоречит условиям устойчивости явной схемы, полученным в виде следующих неравенств:

$$(12) \quad \Delta t \leq \Delta x, c_1 \Delta t \leq \Delta y (1 + \Delta x / \alpha)^{-1/2}, \alpha = \rho_1 h,$$

где α — масса волокна, отнесенная к массе связующего. Чтобы минимизировать численную дисперсию и удовлетворить условиям устойчивости, нужно при фиксированном Δt пространственным шагам Δx и Δy назначить предельные значения неравенства (12)

$$(13) \quad \Delta x = \Delta t, \Delta y = c_1 \Delta t (1 + \Delta t / \alpha)^{1/2}.$$



Ф и г. 1

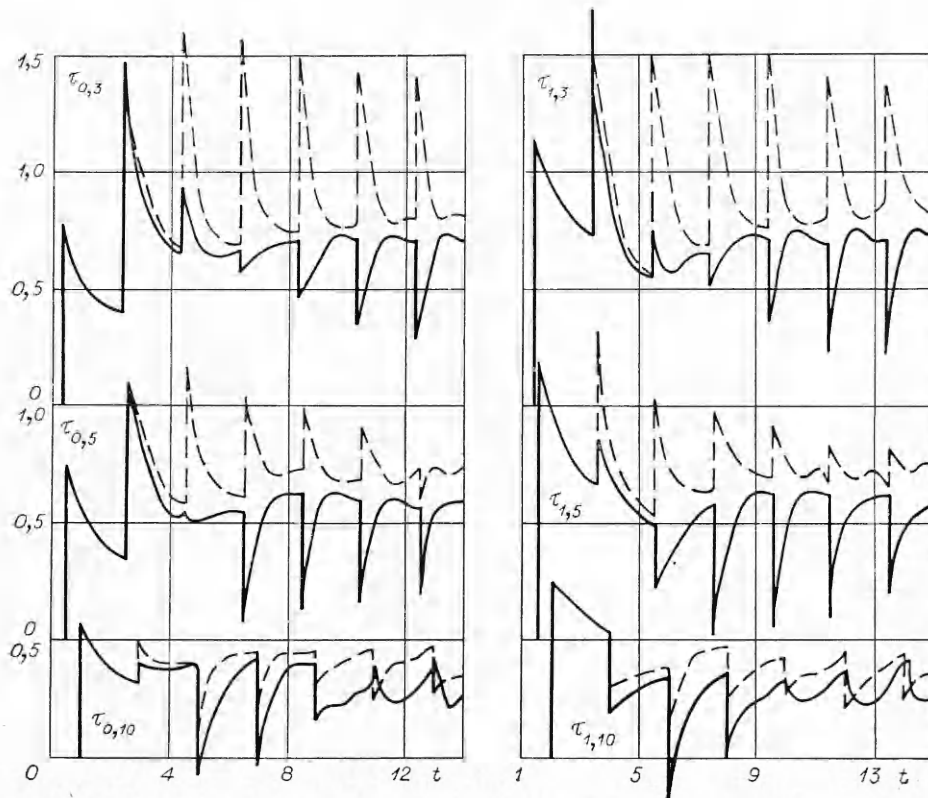
Следует отметить, что численная дисперсия, которая остается при этом в разностном алгоритме, вносится лишь волновым процессом, распространяющимся в волокнах.

При выборе сетки в виде (13) в численном алгоритме остается два независимых параметра: параметр сетки Δt (или Δx) и параметр α , характеризующий инерционные свойства стеклопластика. Уменьшая при фиксированном α величину Δt , можно добиться того, чтобы эффекты численной дисперсии практически не проявлялись. Вместе с тем, однако, при уменьшении Δt растет объем оперативной памяти ЭВМ, необходимый для исследования волнового процесса на временах, достаточных для развития и локализации разрушения. Поэтому необходимо выбрать некоторый оптимум для величины Δt . Расчеты показали, что при $\Delta x/\alpha = \Delta t/\alpha \leq 0,025$ численные и аналитические результаты находятся в достаточно хорошем соответствии: интенсивности фронтов вычисляются с погрешностью не более 5% (счет с $\Delta t/\alpha = 0,005$ дает расхождение лишь в третьем-четвертом знаках). Вышесказанное относится к вычислениям особенностей, гладкие же составляющие решения рассчитываются практически точно.

На фиг. 1, а при $\alpha = 2$, $\Delta t = 0,05$ представлены напряжения сдвига в точке связующего, ближайшей к месту разрыва нулевого волокна ($\tau_{0,0} = \tau|_{x=0, y=0}$). Численные и аналитические результаты практически совпадают (в представленном масштабе не различимы), некоторое расхождение наблюдается в малой окрестности четных значений t — вблизи разрывов. Характер рассогласования представлен на фиг. 1, б (сплошная линия — аналитическое решение [3], звездочки — численное).

С целью экономии машинной памяти прямоугольная область, занятая стеклопластиком, заменялась треугольной с фиктивной границей на гипотенузе. Положение этой границы зависело от величины T ($T = n\Delta t$, n — число шагов по времени) и выбиралось таким образом, чтобы за время T волны, отраженные от фиктивной границы, не достигали бы области, в которой рассчитывается интересующий нас процесс.

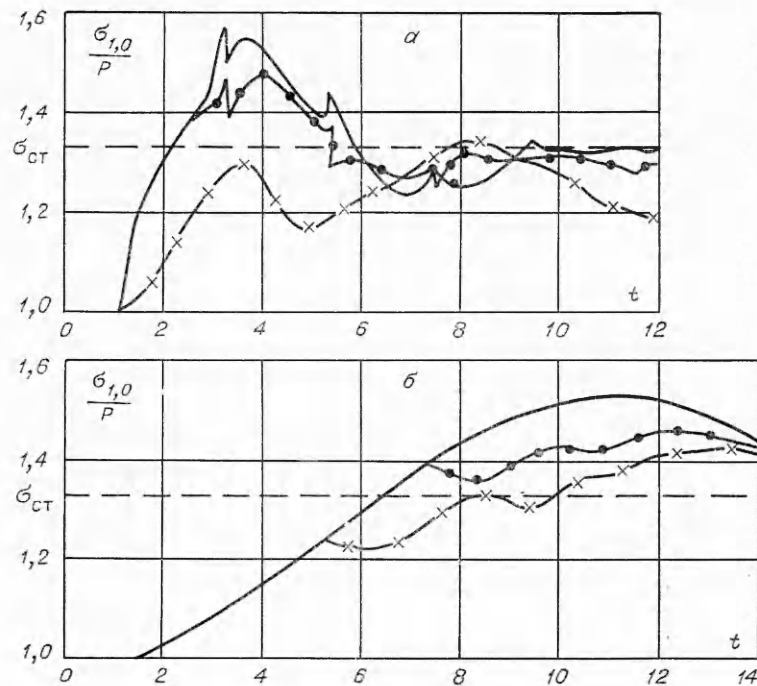
Приведем некоторые данные расчетов и проанализируем их. На фиг. 2 для $\tau_p = 1,8$, $\alpha = 2$ ($\Delta t = 0,05$) штриховыми линиями показаны напряжения $\tau_{x,y}$ ($x = 0,1$; $y = 3\Delta y, 5\Delta y, 10\Delta y$) после отслаивания. Трещины отслаивания прекратили свой рост при $t = 4$. Их параметры: $t_{0*} = 0,05$,



Ф и г. 2

$t_{1*} = 1,05x$, $y_{0*} = y_{1*} = l_0^- = l_1^- = 0$, $l_0^+ = l_1^+ = 3\Delta y$. Сплошными линиями показаны напряжения при отсутствии разрушения ($\tau_p > \tau_{\max}$, где τ_{\max} — максимальные напряжения, достигающиеся в связующем). Следует отметить, что знак разрыва $\tau_{x,y}$ при $y > 0$ с течением времени меняется, огибающая острых пиков представляет собой гладкую знакопеременную функцию, убывающую с ростом t . В свою очередь, с ростом y максимальная величина разрыва также убывает и напряжения относительно быстро стремятся к статическим (для своих y). Эти статические значения одинаковы для $\tau_{0,y}$ и $\tau_{1,y}$ [4]. Из фиг. 2 видно, что существенное отличие в работе материала при отслаивании и без такового наблюдается на сравнительно небольшом расстоянии от зоны разрушения. Это различие характеризуется тем, что при отслаивании пики напряжений значительно выше, особенности меняют знак при больших значениях времени. Качественная же картина распределения напряжений сохраняется. Видно, что уже при $y = 10\Delta y$ различие в этих двух случаях сравнительно невелико.

На фиг. 3, а для $\alpha = 20$, $\Delta t = 0,1$, $\tau_p = 1,25$ показано развитие со временем трещин отслаивания связующего от порванного 0 и первого целого I волокон, звездочками обозначены концы трещин; $t_{0*} = 4,1$, $t_{1*} = 5,1$, $l_0^- = l_1^- = y_{0*} = y_{1*} = 0$, $l_1^+ = 20\Delta y$, $l_0^+ = 19\Delta y$. При $t_{0**} = 12,7$ и $t_{1**} = 13,8$ трещины прекращают свой рост, и разрушение останавливается. Движение трещин происходит скачкообразно. Проследим за этим процессом на примере трещины l_0 . Разрушение начинается при



Ф и г. 4

Пусть при $t = t^*$ «разрушающий» пик достигает точки $\overline{x^*, y}$ ($0 < x^* < 1$). В момент времени $t^* + \Delta t$ (в дискретной схеме разрушение происходит за конечное время, равное Δt) в этой точке реализуются условия разрушения, а так как вплоть до выполнения критерия сеточные функции пересчитываются с временных слоев $t^* - \Delta t$ и t^* на слой $t^* + \Delta t$, согласно волновому уравнению (1), то упомянутый пик в момент времени $t = t^* + \Delta t$ появляется в точке $x^* + \Delta x$, y (при движении волны в положительном направлении) или в точке $x^* - \Delta x$, y в противном случае. Таким образом, разрушение движется с единичной скоростью, не останавливаясь, вплоть до волокна. Поскольку максимальные пики доставляются в волну напряжений при отражении от волокон, то и разрушение начинается на склейке волокна и связующего.

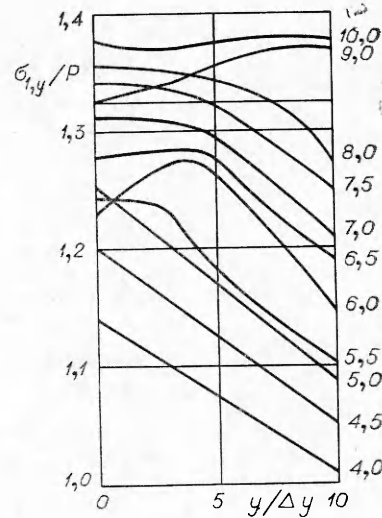
В процессе отслаивания происходит перераспределение напряжений растяжения — сжатия в волокнах (по сравнению с напряжениями в случае отсутствия разрушения при $\tau_p > \tau_{\max}$ ($t > 0$)): в порванном волокне ($j = 0$) напряжения (сжатие) увеличиваются, в целых — уменьшаются (растяжение). Если при $\tau_p > \tau_{\max}$ в первом целом волокне максимальная догрузка составляет $\sim 1,55 P$ и достигается в точке $y = 0$ [3], то при $\tau_p \leq \tau_{\max}$ с уменьшением τ_p эта величина падает. На фиг. 4 представлены значения напряжений растяжения в точке $y = 0$ первого целого волокна ($\sigma_{1,0}$), рассчитанные при следующих параметрах: $a - \alpha = 2$, $\Delta t = 0,05$; $b - \alpha = 20$, $\Delta t = 0,1$. Сплошные линии обозначают напряжения при отсутствии отслаивания ($\tau_p > \tau_{\max}$), линии с точками — $\tau_p = 1,8$ и $1,4$, линии с крестиками — $\tau_p = 1,35$ и $1,25$ (фиг. 4, а, б соответственно). Значение $\sigma_{ст} = (4/3) P$ соответствует величине $\sigma_{1,0}$ в статической задаче [4] и от α не зависит. В случае $\alpha = 20$ максимальные значения $\sigma_{1,0}$ достигаются при $t = 12,5$ и $13,4$ ($\tau_p = 1,4$ и $1,25$ соответственно).

Следует отметить, что в процессе отслаивания эпюра напряжений $\sigma_{1,0}$ в области $0 \leq y \leq l_1^+$ выравнивается, и разрушение волокна (при достижении напряжениями некоторого предельного значения) возможно в любой точке этого интервала. На фиг. 5 для $\alpha = 20$, $\Delta t = 0,1$ и $\tau_p = 1,35$ представлены эпюры напряжений $\sigma_{1,y}$ в некоторые моменты времени (цифры справа). Видно, как изменяется характер эпюры после начала отслаивания ($t_{1*} = 5,1$, $l_1^- = 0$, $l_1^+ = 14\Delta y$, $t_{1**} = 12,2$). Расчеты показали, что в следующих целых волокнах ($|j| > 1$) напряженное состояние при отслаивании практически то же, что и без него.

В работе [6] экспериментально показано (материал волокон — стекло, наполнитель — эпоксидная смола), что разрушение стеклопластика вначале сопровождается трещинами отслаивания, после чего на некотором расстоянии (порядка l_1^+) от оси симметрии ($y = 0$) происходит разрыв целого волокна.

Результаты проведенных расчетов находятся в качественном соответствии с выводами, полученными из эксперимента.

Автор выражает благодарность А. М. Михайлову за полезные обсуждения.



Фиг. 5

Поступила 30 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Outwater J. O. Jr. The mechanics of plastics reinforcement in tension.— «Mod. Plastics», 1956, vol. 33, p. 156.
2. Михайлов А. М. Динамика однонаправленного стеклопластика.— ПМТФ, 1974, № 4.
3. Михайлов А. М. Динамическая концентрация напряжений около дефекта в стеклопластике.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 19, 20. Новосибирск, изд. Инта гидродинамики СО АН СССР, 1974.
4. Михайлов А. М. О разрушении однонаправленного стеклопластика.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1973, № 5.
5. Степаненко М. В. Об одном методе расчета нестационарных импульсных процессов деформаций в упругих конструкциях.— ФТПРПИ, 1976, № 2.
6. Французова Л. П. Исследование процесса разрушения на модели слоистого композита.— «Проблемы прочности», 1977, № 2.