

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cercignani C., Sernagiotto F. Cylindrical Poiseuille flow of rarefied gas.— Phys. Fluids, 1966, vol. 9, N 11.
2. Cercignani C., Pagani C. D. Variational approach to rarefied flows in cylindrical and spherical geometry.— In: Rarefied Gas Dynamics, 5 th. Brundin C. L. ed., 1967, vol. 1.
3. Ferziger J. H. Flow of a rarefied gas through a cylindrical tube.— Phys. Fluids, 1967, vol. 10, № 7.
4. Edwards R. H. Low-density flows through tubes and nozzles.— In: Progress in Astronautics and Aeronautics: Rarefied Gas Dynamics, 10th. N. Y., 1977, vol. 51, pt 1.
5. De Marcus W. C. Report K-1302, Union Carbide Nuclear Company, Oak Ridge, Tennessee, 1956.
6. Weissberg H. L. End correction for slow viscous flow through long tubes.— Phys. Fluids, 1962, vol. 5, N 9.
7. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A. A model for collision process in gases.— Phys. Rev., 1954, vol. 94, N 3.
8. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
9. Cercignani C., Neudacini I. Rarefied gas flow through long slots.— J. Appl. Math. and Phys., 1979, vol. 30, p. 943.
10. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
11. Abramowitz M. Evaluation of the integral  $\int_0^{\infty} \exp(-u^2 - x/u) du$ .— J. Math. and Phys., 1953, vol. 32, p. 188.
12. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979.
13. Clausing P. Über die Strömung sehr verdünnter Gas durch Röhren von beliebiger Länge.— Ann. Phys., 1932, N. 8, N 12.
14. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978

УДК 532.5 : 533.6.011.32 : 532.582.33

## ТЕЧЕНИЕ ОКОЛО ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ С ТРЕМЯ УЧАСТКАМИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ

*Л. А. Кожуро*

(Москва)

Представляет интерес определение формы толстых осесимметричных тел, имеющих при заданном объеме небольшую площадь поверхности и в то же время достаточно высокое значение критического числа Маха при небольшом перепаде давления на поверхности тел, что позволило бы реализовать их безотрывное обтекание.

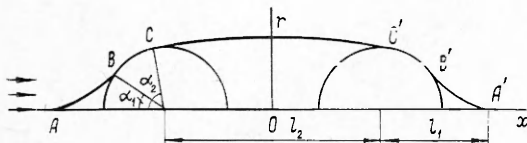
Как известно [1], при заданных длине и объеме осесимметричного тела максимальное значение критического числа Маха достигается в случае, когда тело состоит из двух дисков, соединенных поверхностью, скорость на которой везде звуковая. Аналогом этого течения в несжимаемой жидкости является течение Рябушинского для диска. Однако обеспечить безотрывное обтекание такого тела ввиду большой величины перепада давления на его поверхности чрезвычайно трудно.

Как было показано С. А. Чаплыгиным [2] для случая плоского течения, любую критическую точку на поверхности тела можно заменить примыкающей к телу конечной областью с покоящейся жидкостью. Течения такого типа для цилиндра и сферы были впервые получены в [3]. Как и всякие течения со свободными границами, такие течения обладают рядом экстремальных свойств. Отметим некоторые из них. Пусть рассматривается потенциальное обтекание плоского тела, симметричного относительно оси  $x$ , или осесимметричного тела с осью симметрии  $x$ . На бесконечности — однородный поток, направленный вдоль этой оси. Пусть кривая  $L$  — фиксированная часть контура тела в верхней полуплоскости, а  $L_*$  — варьируемая часть контура тела, соединяющая точку  $M_*$  на оси симметрии  $x$  с точкой  $M$  на контуре  $L$ . В осесимметричном случае  $L$  и  $L_*$  — сечения фиксированной и варьируемой поверхностей тела меридиональной плоскостью. В [4] показано, что при заданном положении точки  $M$ , достаточно близком к оси симметрии, максимальное значение квадрата скорости на варьируемой части тела  $L_*$  достигает минимума тогда и только тогда, когда скорость на  $L_*$  везде постоянна, т. е. когда  $L_*$  является свободной линией тока. Доказательство этого результата основано на использовании принципа максимума для функций тока плоских и осесимметричных течений. Аналогичным путем можно показать, что такие течения имеют еще одно экстремальное свойство: при заданном положении точки  $M_*$  на оси симметрии  $x$  минимальное значение квадрата скорости на варьируемой части тела  $L_*$  достигает максимума тогда и только тогда, когда кривая  $L_*$  является сво-

бодной линией тока. Величина скорости на  $L_*$  однозначно связана с положением точки  $M_*$ .

Таким образом, пристраивая к течению Рябушинского в критических точках области с постоянным давлением, при фиксированном увеличении длины полученного таким путем тела добиваемся максимального уменьшения перепада давлений на его поверхности. Идея построения таких тел принадлежит Г. И. Таганову. В данной работе получено семейство течений такого типа для случая несжимаемой жидкости. Для уменьшения градиентов давления на поверхности тел в качестве опорных тел вместо дисков использованы сферы. При заданных длине и объеме тела это приводит к некоторому увеличению максимальной величины возмущенной скорости течения. Учет сжимаемости жидкости приведет лишь к количественному уточнению полученных в данной работе результатов.

Рассмотрим осесимметричное обтекание тела неизвестной заранее формы, симметричной относительно плоскости  $x = 0$  в системе координат  $x, r$  (фиг. 1). На переднем участке тела  $AB$  скорость постоянна и равна  $v_1$ , участок  $BC$  представляет собой часть поверхности сферы, а на средней части тела  $CC'$  скорость также постоянна и равна  $v_2$ . Тело обтекается однородным на бесконечности потенциальным потоком, направленным вдоль оси  $x$ . Скорость течения на бесконечности и радиусы сфер примем равными единице. Кроме скоростей  $v_1$  и  $v_2$ , задача содержит следующие параметры:  $l_1$  — расстояние от носика тела до центра ближайшей сферы,  $l_2$  — расстояние между центрами сфер,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — угловые положения точек  $B$  и  $C$ . Положение точки  $C$  (параметр  $\alpha_2$ ) будем определять из условия обращения в нуль градиента скорости при подходе к точке  $C$  по поверхности сферы. Из теории струй идеальной жидкости [5] известно, что это условие эквивалентно условию «гладкого отрыва» Вриллуэна —



Фиг. 1

Вилля: кривизна поверхности с постоянным значением скорости совпадает в точке отрыва с кривизной тела. Анализ известных решений для струйных течений показывает, что задача должна иметь двухпараметрическое семейство решений. Результаты численного решения подтверждают это предположение.

Задача формулируется следующим образом: при заданных значениях параметров  $l_1$  и  $l_2$  определить параметры  $v_1, v_2, \alpha_1, \alpha_2$ , формы поверхностей  $AB$  и  $CC'$  и функцию тока Стокса  $\psi$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению  $\psi_{xx} + \psi_{rr} - \psi_r/r = 0$ , вытекающему из условия потенциальности течения, и следующим граничным условиям:  $\psi = 0$  на всей поверхности тела, на  $AB$  и  $A'B'$   $|\nabla\psi|/r = v_1$ , на  $CC'$   $|\nabla\psi|/r = v_2$ ,  $|\nabla\psi|/r \rightarrow r^2/2$  при  $x^2 + r^2 \rightarrow \infty$ .

Рассматривая поверхность тела как вихревую поверхность с неизвестной интенсивностью, функцию тока можно представить в виде [6]

$$(1) \quad \psi(\mathbf{r}) = \frac{r^2}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_L \gamma(\mathbf{r}') Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dl,$$

где  $Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = p[(2 - k^2)K - 2E]$ ;  $p = [(x - x')^2 + (r + r')^2]^{1/2}$ ;

$k = (4rr')^{1/2}/p$  — модуль полных эллиптических интегралов первого и второго рода  $K$  и  $E$ ;  $\mathbf{r} = (x, r)$ ;  $\mathbf{r}' = (x', r')$  — точка на поверхности тела, по которой производится интегрирование;  $L$  — кривая  $ABCC'B'A'$ ;  $l$  — длина дуги кривой  $L$ ;  $\gamma$  — интенсивность вихревого слоя на поверхности тела. На поверхностях  $AB$  и  $A'B'$   $\gamma = -v_1$ , на  $CC'$   $\gamma = -v_2$ , на обтекаемой поверхности сфер  $BC$  и  $B'C'$   $\gamma = \omega(l)$ .

Функция  $\omega$  должна удовлетворять следующим граничным условиям [6]:

$$(2) \quad \omega(B) = -v_1, \quad \omega(C) = -v_2, \quad \omega_l(C) = 0.$$

Величина скорости потока в точке  $A$  равна  $v_1$ , поэтому в этой точке должно выполняться условие [7]

$$(3) \quad v_1 = 1 + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \gamma(x) \frac{r^2 (1 + r_x^2)^{1/2}}{[r^2 + (x+a)^2]^{3/2}} dx,$$

где  $a = l_1 + l_2/2$ , а  $(x, r)$  — точка на поверхности тела.

Из условия обращения функции тока (1) в нуль на поверхности тела получаем интегральное уравнение для определения функции  $\omega$ , неизвестной формы поверхности тела и параметров  $v_1, v_2$  и  $\alpha_1$ . При этом должны выполняться условия (2), (3). Параметр  $\alpha_2$  определяется из условия «гладкого отрыва».

Метод численного решения задачи является развитием метода, примененного в [6] для расчета течений Рябушинского.

Учитывая бесконечный градиент скорости на поверхности сферы в точке  $B$  и последнее условие (2), интенсивность вихревого слоя на участке  $BC$  представим в виде

$$\omega(l) = c_1 (l^{1/2} - l/2 - 1/2) + \sum_{n=2}^N c_n \cos \pi(n-2)l, \quad 0 \leq l \leq 1.$$

При заданной форме тела и заданных значениях параметров  $l_1, l_2$  и  $\alpha_2$  из условия обращения функции тока (1) в нуль в  $N$  точках на обтекаемой части поверхности сферы, первых двух условий (2) и соотношения (3) получаем систему уравнений, линейных относительно параметров  $v_1, v_2$  и  $c_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Параметр  $\alpha_1$  входит в эти уравнения нелинейно. После решения полученной системы уравнений делается итерация для формы границ, на которых скорость должна быть постоянна. Форма поверхности тела на участке  $CC'$  задавалась в виде кубического сплайна по переменной  $x$ . Для учета бесконечной кривизны контура тела в точках  $A$  и  $B$  радиус сечения начального участка тела  $AB$  задавался кубическим сплайном по аргументу  $t$ , а координата  $x$  определялась соотношением

$$x(t) = (1 - \cos \pi t)(l_1 - \cos \alpha_1)/2 - l_1 - l_2/2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Итерации для радиуса тела в узлах сплайнов проводились следующим образом:

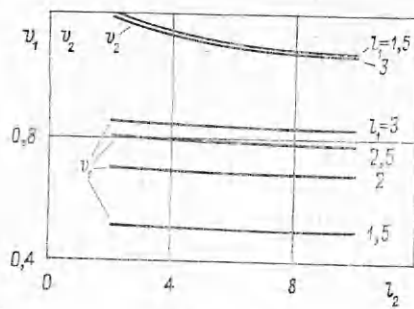
$$r^{k+1} = r^k - \frac{\psi(r^k)}{r^k v_e} (1 + r_x^2)^{1/2}.$$

Здесь  $r^k$  — радиус сечения тела в узле сплайна для предыдущего приближения;  $r^{k+1}$  — последующее приближение для  $r^k$ ;  $v_e = v_1$  на начальном участке тела  $AB$ ;  $v_e = v_2$  на среднем участке  $CC'$ . Сходимость этого итерационного процесса оказалась значительно лучше, чем примененно в [6].

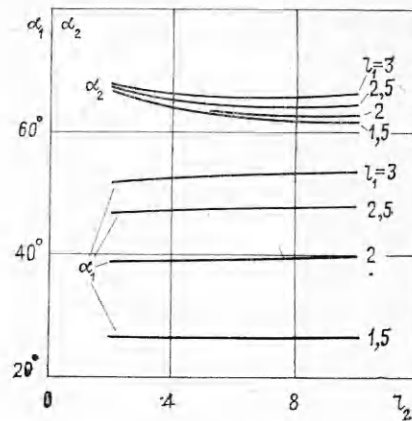
После получения нового приближения для неизвестной формы поверхности тела проводилась следующая итерация: опять удовлетворялось условие непротекания на обтекаемой поверхности сферы и выполнялись условия (2), (3) и затем определялось следующее приближение для формы тела.

Определение углового положения начала средней части поверхности тела с постоянной скоростью проводилось методом [6].

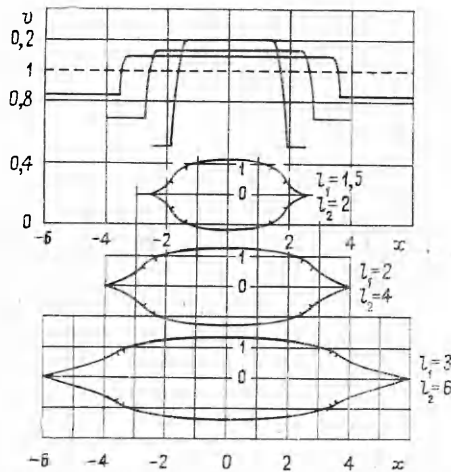
Расчеты проведены для значений параметров  $1,5 \leq l_1 \leq 3$  и  $2 \leq l_2 \leq 10$ . Величины остальных параметров представлены на фиг. 2, 3. Как видно, в этом диапазоне изменения  $l_1$  и  $l_2$  параметры, характеризующие средний участок тела с постоянной скоростью  $CC'$  (см. фиг. 1) и участки  $AB$  и  $A'B'$ , слабо зависят друг от друга. При неограниченном увеличении длин переднего и заднего участков с постоянной скоростью, очевидно,  $\alpha_1 \rightarrow 90^\circ$ ,  $\alpha_2 \rightarrow 90^\circ$ ,  $v_1 \rightarrow i$ ,  $v_2 \rightarrow 1$  и течение представляет собой обтекание цилиндра с радиусом, равным единице, невозмущенным потоком. При  $l_1 \rightarrow 1$  приходим к обтеканию сферы по схеме Рябушинского, полу-



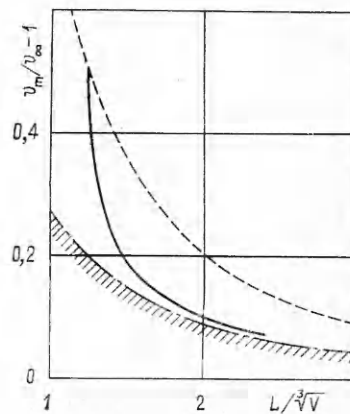
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ченному в [6]. Результаты данной работы хорошо согласуются с результатами [6] для значений параметра  $v_2$ . Несколько хуже соответствие для углового положения начала среднего участка с постоянной скоростью. По-видимому, это объясняется менее удачным выбором в данной работе аппроксимации контура свободной поверхности тока на среднем участке тела в окрестности точки схода струй.

На фиг. 4 приведены меридиональные сечения трех полученных тел и распределение скорости потока вдоль их поверхностей. Передний и задний участки тела имеют бесконечную кривизну в точках сопряжения со сферическими поверхностями. Градиент скорости на сферах в этих точках обращается в бесконечность. При сопряжении средней части тела с поверхностями сфер имеем касание второго порядка и нулевой градиент скорости.

На фиг. 5 приняты следующие обозначения:  $v_m$  — максимальное значение возмущенной скорости потока,  $v_\infty$  — величина невозмущенной скорости,  $L$  — длина тела вдоль оси симметрии,  $V$  — объем тела. Штриховая линия соответствует эллипсоидам вращения, сплошная — полученному в данной работе семейству тел без учета объема и длины пристроенных к сферам заостренных областей с постоянным давлением. Штрихпунктирная линия является нижней границей максимальных значений возмущенной скорости течения. Она соответствует обтеканию дисков по схеме Рябушинского и построена по результатам [6]. Полученные в данной работе тела при расстояниях между центрами опорных сфер, превышающих их диаметр, имеют максимальные значения возмущенной скорости течения, близкие к минимально возможным и почти вдвое меньшие, чем эллипсоиды вращения.

Поступила 3 III 1982

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme values of the critical Mach number.— J. Rat. Mech. and Anal., 1954, vol. 3, N 2.
2. Чаплыгин С. А. Собр. соч. Т. 2. М.—Л.: Изд-во техн.-теор. лит., 1948.
3. Southwell R. V., Vaisey G. Fluid motions characterized by «free» stream-lines.— Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 1946, vol. 240, N 815.
4. Garabedian P. R., Spencer D. C. Extremal methods in cavitation flow.— J. Rat. Mech. and Anal., 1952, vol. 1, N 3.
5. Биргоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964.
6. Кожуро Л. А. Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского.— Учен. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 5.
7. Кожуро Л. А. Семейство осесимметричных вихревых течений с поверхностью разрыва постоянной Бернулли.— ПММ, 1981, т. 45, № 1.

УДК 532.516

### ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКИ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В. В. Попов  
(Ленинград)

Для описания течений вязкой пленки по поверхности невязкой жидкости в [1] была предложена система уравнений (обозначения те же)

$$(1) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H v_k}{\partial x_k} = \dot{0}, \quad \rho \bar{H} \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k},$$

$$S_{ik} = -p \delta_{ik} + 3\mu H \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ik} + \mu H \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \right),$$

$$p = \rho (1 - \rho/\rho_1) gH^2/2, \quad i, j, k = 1, 2.$$

В выражении для тензора напряжений  $S_{ik}$  первый член — суммарное по толщине пленки гидростатическое давление с учетом погружения пленки в нижнюю жидкость, второй описывает вязкие силы, связанные с ее растяжением, третий соответствует деформации сдвига.

Пусть пленка со свободными боковыми краями течет в направлении оси  $Ox$ , которую будем считать осью симметрии. Предположим также, что толщина пленки  $H$ , ее продольная скорость  $u$  и ширина  $W$  являются функциями времени и медленно меняющимися функциями координаты  $x$ . Это позволит перейти к одномерному описанию течения. Пусть на боковые края  $y = \pm W/2$  действуют симметричные относительно оси  $Ox$  силы  $F = (F_x/2, F_y)$ ,  $F' = (F_x/2, -F_y)$  в расчете на единицу длины края. При этом пленка растягивается в поперечном направлении силами  $F_y$  и  $-F_y$ , в продольном направлении на оба края в сумме действует сила  $F_x$ . Применение к системе (1) процедуры, с помощью которой она сама была получена из трехмерных уравнений Навье — Стокса, дает систему уравнений для функций  $H$ ,  $W$ ,  $u$  от переменных  $x$ ,  $t$ :

$$(2) \quad \frac{\partial HW}{\partial t} + \frac{\partial HWu}{\partial x} = 0,$$

$$\rho HW \frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ W \left( -\frac{p}{2} + 3\mu H \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{F_y}{2} + \frac{F_x}{8} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + F_x,$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{W}{4\mu H} \left[ F_y + F + \frac{F_x}{4} \frac{\partial W}{\partial x} \right] - \frac{W}{2} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Вязкие эффекты в уравнении для импульса даются членом  $3\mu HW \partial u / \partial x$ . Как известно, для течений растяжения коэффициент пропорциональности между вязкими напряжениями и скоростью деформации равен  $3\mu$  [2]. При математическом описании таких течений, встречающихся в задачах о формовании различных изделий, обычно полагают, что на боковую поверхность изделия не действуют никакие силы и конфигурация его