

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Р. С. Кузнецкий

(Харьков)

Получены теоретически критические числа Рейнольдса и места максимальной неустойчивости ламинарного течения жидкости в трубах прямоугольного сечения в зависимости от отношения сторон прямоугольника. Результаты подтверждаются экспериментальными данными.

Выражение для критического значения числа Рейнольдса R течения жидкости в прямой трубе [1], представленное в относительной форме, есть

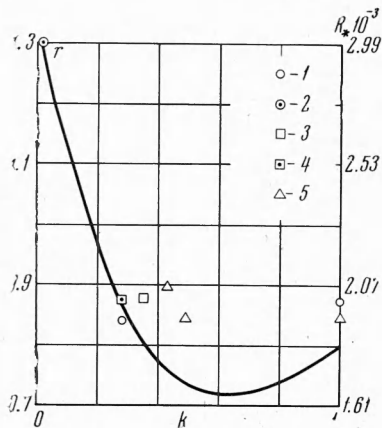
$$r \equiv \frac{R_*}{R_{*0}} = \frac{2}{3^{3/2}} \frac{\langle u \rangle}{\sup_F \{u | \nabla_{\xi\eta} u\}} \quad \text{при } \Delta_{\xi\eta} u = -i, \quad u|_{\Gamma} = 0 \quad (4)$$

а локальная неустойчивость максимальна там, где достигается $\sup_F \{u | \nabla_{\xi\eta} u\}$. Здесь $x = s\xi$, $y = s\eta$ — декартовы координаты в сечении F трубы (с контуром Γ), s — гидравлический радиус; угловые скобки означают усреднение по F ; звездочка соответствует потере устойчивости, индекс 0 — трубе с круговым сечением¹.

Для труб прямоугольного сечения ($|x| \leq a$, $|y| \leq b$) форма F характеризуется параметром $k = b/a$, так что $r = r(k)$. Не ограничивая общности, будем считать $k \leq 1$ и рассматривать первый квадрант $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. При этом граничные условия примут вид

$$u\left(\frac{1+k}{2k}, \eta\right) = u\left(\xi, \frac{1+k}{2}\right) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \eta) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, 0) = 0 \quad (2)$$

Величина $u|\nabla_{\xi\eta} u|$, помимо абсолютного максимума $\sup_F \{u|\nabla_{\xi\eta} u\}$ при $x = 0$, $y = y_*$ ($0 < y_* < b$; предполагается $k < 1$), может иметь также относительный максимум при $y = 0$, $x = x_{**}$ ($0 < x_{**} < a$). Соответственно абсолютный и относительный минимумы $\langle u \rangle \{u|\nabla_{\xi\eta} u\}^{-1}$ при этом приводят к числам Рейнольдса R_* (критическому) и $\bar{R}_{**} > \bar{R}_*$, соответствующим наступлению неустойчивости в упомянутых точках; \bar{R}_* , \bar{R}_{**} , y_* и x_{**} как функции k подлежат определению.



Фиг. 1

Появление второй из зон неустойчивости $x \sim 0$, $y \sim y_*$ ($R \geq R_*$); $x \sim x_{**}$, $y \sim 0$ ($R \geq R_{**}$), служащей дополнительным изолированным очагом турбулизации, при затянутом ламинарном режиме вызывает резкое увеличение (тем большее, чем больше k) вероятности общей турбулизации течения. Аналогичной была ситуация для трубы кольцевого сечения [1].

При прямоугольном сечении трубы в отличие от рассмотренных ранее сечений [1] конечное аналитическое выражение для u отсутствует [3]. Соответственно усложняется расчет, прежде всего за счет необходимости численного интегрирования (1).

Численное решение уравнения Пуассона (1) разностным методом при граничных условиях (2) с последующим подсчетом $\langle u \rangle \times \{u|\nabla_{\xi\eta} u\}^{-1}$ в узлах сетки и выбором минимальных из них производилось на ЭВМ «Минск-22». Для получения сетки каждая из половин сторон прямоугольника при $k > 0.1$ делилась на 32 равные части; при $k \leq 0.1$ они делились соответственно на 85 и 24 части. Итерации прекращались, как только невязка по u становилась меньше $2^{-23} \approx 1.2 \cdot 10^{-7}$; при этом $0.08 \lesssim \langle u \rangle \lesssim 0.14$, $0.12 \lesssim u_{\max} \lesssim 0.29$. Счет каждого из вариантов с определенным исходным значением k продолжался ~ 3 час. Всего было просчитано 20 вариантов. Основные результаты счета представлены на фиг. 1, 2, 3.

Величина $r(k)$ убывает от наибольшего значения $r(0) = 4/3$ (плоский канал) [1] до минимального $r(0.6255) \approx 0.7186$ и затем несколько возрастает до $r(1) \approx 0.7981$ (квадратное сечение). Течение в трубе, по-видимому, тем устойчивее (r больше), чем

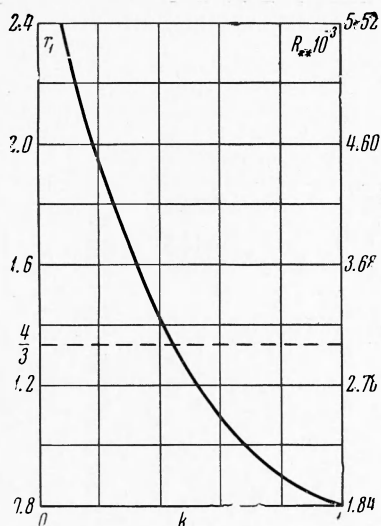
¹ Ниже принято $R_{*0} = 2300$ [2,3], соответственно чему общий для труб критерий q_* [1] составляет ~ 885 .

распределение u в F ближе либо к одномерному (т. е. чем больше отличаются измерения прямоугольного сечения), либо к возможно более симметричному (чем прямоугольник ближе к квадрату). Следовательно, можно ожидать, что, например, для сечений в виде правильных n -угольников ($n \geq 3$) r ($r < 1$ [4]) является монотонно возрастающей функцией n , стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$.

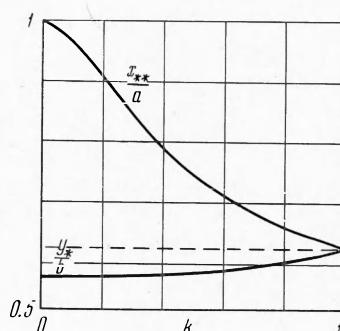
Значение $r = r(1)$ достигается также при $k \approx 0.366$. Таким образом, обратная $r(k)$ зависимость на отрезке $0.366 \leq k \leq 1$ является двужаночной. Отметим, что $r = 1$ ($R_* = R_*^0$) при $k \approx 0.182$.

На фиг. 1 нанесены также экспериментальные точки Шиллера [5], Дэвиса и Уайта [6], Корниша [7], Никурадзе [4] и Ли и Тадроса [8], которым соответствуют последовательно цифры 1—5. Точки взяты из непосредственно полученных экспериментаторами зависимостей коэффициента сопротивления труб от R при учете влияния интенсивности

начальных возмущений и длины начального участка [3]. Тем не менее при более интенсивных и разнообразных начальных возмущениях R_* оказались бы несколько меньшими. Учитывая это, можно констатировать неплохое согласие экспериментальных и теоретических результатов.



Фиг. 2



Фиг. 3

Функция $r_1(k) = R_{**} / R_*^0$ монотонно убывает до значения $r_1(1) = r(1)$. Отметим, что $r_1 = 1$ и $4/3$ соответственно при $k \approx 0.660$ и 0.440 .

Относительное расстояние точки абсолютного минимума устойчивости (y_*/b) от центра прямоугольника всегда меньше относительного (x_{**}/a); y_*/b при увеличении k монотонно возрастает от $1/\sqrt{3} \approx 0.5773$ для плоского канала [1] при $k = 0$ до 0.625 для трубы квадратного сечения при $k = 1$. Соответственно x_{**}/a монотонно убывает от 1 до 0.625.

Поступила 16 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецкий Р. С., Лихт М. К. Об общем критерии устойчивости ламинарного течения в трубах. ПМТФ, 1969, № 4.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Гидродинамическая устойчивость и возникновение турбулентности. ПМТФ, 1962, № 5.
3. Schiller L. Strömung in Röhren. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1932. (Рус. перев.: Движение жидкостей в трубах. М.—Л., ОНТИ, 1936.)
4. Nikuradse J. Untersuchungen über turbulente Strömungen in nichtkreisförmigen Röhren. Ing.-Arch., 1930, Bd 1, H. 3, S. 306—332.
5. Schiller L. Über den Strömungswiderstand von Röhren verschiedenen Querschnitts und Rauigkeitsgrades. Z. angew. Math. und Mech., 1923, Bd 3, H. 1, S. 9—30.
6. Davies S. J., White C. M. An experimental study of the flow of water in pipes of rectangular section. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1928, vol. 119, No. 781, pp. 92—107.
7. Cornish R. J. Flow in a pipe of rectangular cross-section. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1928, vol. 120, No. 786, pp. 691—695.
8. Lea F. C., Tadros A. G. Flow of water through a circular tube with a central core and through rectangular tubes. Philos. Mag. & J. Sci., Ser. 7, 1931, vol. 11, No. 74, pp. 1235—1247.