

$x \rightarrow \infty$ будут

$$w = \frac{3 - \text{Pr}}{4\zeta} \left[\frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(\text{Pr} + 1)} x^2 \right]^{-2/(1 - \text{Pr})}, \quad T = \frac{\text{Pr} + 1}{4\zeta} \left[\frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(\text{Pr} + 1)} x^2 \right]^{-2\text{Pr}/(1 - \text{Pr})},$$

т. е. при $\text{Pr} < 1$ в системе уравнений (1.7) возможна подстановка условий (3.10), а вот при $\text{Pr} > 1$ условия (3.10) будут непригодны. Необходимо помнить также, что рассмотренная задача (1.7) — (1.10) сама является нулевым приближением в асимптотическом разложении по малому параметру Re^{-1} , и поэтому область неравномерности разложений (1.12) располагается в пограничном слое. Поэтому обнаруженная область неравномерности, на наш взгляд, относится к новому классу, и названа разделительным слоем.

При численных расчетах для задачи (2.13), (2.14) использовался метод прогонки с итерациями, для задачи (1.4) — (1.3), (3.9) — метод [4]. Точность расчета кривых не ниже точности их графического изображения.

• Автор выражает благодарность М. А. Гольдштику, В. В. Пухначеву, В. Н. Штерну за участие в обсуждении результатов работы.

Поступила 26 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобнев А. А. Точное решение высокотемпературного струйного течения. — ПМТФ, 1982, 5.
2. Коул Дж. Методы возмущения в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
4. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1962.

УДК 532.135 + 532.522 + 532.52

О СОУДАРЕНИИ ПЛОСКИХ СТРУЙ ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

М. В. РУБЦОВ

(Новосибирск)

Экспериментальные исследования явления плоской кумуляции показывают, что теория процесса, основанная на модели идеальной жидкости [1, 2], нуждается в усовершенствовании. Используемая в [3] модель ньютоновской жидкости, качественно объясняя некоторые экспериментальные закономерности, при описании процесса в целом сталкивается с затруднениями [4]. Эти затруднения связаны, с одной стороны, с тем, что рассчитанные по модели вязкой жидкости (с постоянной вязкостью) скорость кумулятивной струи и форма меченой линии в пластинах совпадают в одном и том же опыте с соответствующими экспериментальными характеристиками при существенно различных числах Рейнольдса: в кумулятивной струе совпадение достигается при $\text{Re} \approx 350$, в соударяющихся пластинах $\text{Re} \approx 25$. Таким образом, эффективная вязкость в струе и пластинах оказывается различной, что противоречит первоначальному предположению о постоянной вязкости. С другой стороны, в заданном режиме соударения (заданы скорость, толщина, плотность пластин) вязкость не может быть определена до опыта; она определяется в опытах совпадением расчетных и экспериментальных характеристик и, вообще говоря, изменяется в зависимости от условий эксперимента. Следовательно, эффективная вязкость не является объективной характеристикой материала. Выбор такого объективного параметра был бы весьма желательным. Для преодоления затруднений надо использовать более сложные реологические законы.

В данной работе предлагается описывать реальный процесс на основе модели степенной псевдопластической жидкости, параметры которой подбираются из независимых измерений динамической пластичности металлов.

1. Выбор реологического соотношения $\sigma = \sigma(\epsilon, T)$. Как показано в [4], эффективные числа Рейнольдса в кумулятивной струе Re^0 и в пестовой струе Re_* отличаются примерно на порядок: $\text{Re}^0 \approx 350$, $\text{Re}_* \approx 25$. Естественно попытаться поэтому найти другую характеристику, которая меняется в одном и том же процессе незначительно. С этой целью оценим характерные сдвиговые напряжения в струе и песте по соотношению $\sigma = 2\mu\epsilon$.

Для отношения σ^0/σ_* , где надстрочный индекс соответствует струе, а подстрочный — песту, имеем

$$(1.1) \quad \sigma^0/\sigma_* = \mu^0 \dot{\epsilon}^0 / (\mu_* \dot{\epsilon}_*) = \text{Re}_* \dot{\epsilon}^0 / (\text{Re}^0 \dot{\epsilon}_*).$$

Характерные скорости сдвига $\dot{\epsilon}^0$ и $\dot{\epsilon}_*$ в струе и песте оценим как отношение разности скоростей на свободной границе ($v \approx U$) и в критической точке ($v = 0$) на минимальное расстояние r от критической точки до данной свободной границы ($r^0 \approx h(1 - \cos \gamma)/2$, $r_* \approx h(1 + \cos \gamma)/2$):

$$(1.2) \quad \dot{\epsilon}^0 \approx 2U/[h(1 - \cos \gamma)], \quad \dot{\epsilon}_* \approx 2U/[h(1 + \cos \gamma)],$$

где U — скорость втекания материала в системе отсчета точки контакта; h — толщина втекающих струй; γ — половинный угол соударения. В [4] исследовался случай $U = 1,0$ км/с, $h = 4$ мм, $2\gamma = 45^\circ$. Подставляя эти значения в (1.2), получим

$$(1.3) \quad \dot{\epsilon}^0/\dot{\epsilon}_* = (1 + \cos \gamma)/(1 - \cos \gamma) \approx 24,5.$$

Подстановка (1.3) в (1.1) приводит к $\sigma^0/\sigma_* \approx 1,75$.

Таким образом, по сравнению с масштабом изменения вязкости характерные сдвиговые напряжения примерно постоянны в области высоких давлений.

С точки зрения теории пластичности этот вывод не удивителен. В процессах пресования, штамповки, вытяжки металлов, когда скорость деформирования не слишком высока, с хорошей точностью соблюдается экспериментальный закон Треска, согласно которому в состоянии текучести наибольшее касательное напряжение во всех точках среды постоянно и равно пределу текучести материала при чистом сдвиге. В дальнейших исследованиях [5—7] было установлено, что поведение металлов лучше описывается зависимостью

$$(1.4) \quad \sigma_i = \sigma_T,$$

называемой условием пластичности Мизеса. В (1.4) σ_i — интенсивность напряжений, σ_T — предел текучести при одноосном растяжении.

При $\dot{\epsilon} \sim 10^5$ с⁻¹ и выше закон деформирования металлов может отличаться от (1.4). Систематических экспериментальных данных в этом диапазоне нет. Однако при скоростях деформирования $\dot{\epsilon} \sim 10^4$ с⁻¹ и меньше информация о поведении металлов довольно подробна [8—13]. Установлено, что при увеличении $\dot{\epsilon}$ предел прочности σ_B (предел текучести σ_T) увеличивается. Причем зависимости σ_T от $\dot{\epsilon}$, T разбиваются на два характерных участка:

$$(1.5) \quad \sigma_T = \sigma_T^0 e^{D/T} \dot{\epsilon}^n;$$

$$(1.6) \quad \sigma_T = \sigma_T^1 \dot{\epsilon}^{m(T-T_0)},$$

где σ_T^0 , D , n , σ_T^1 , m , T_0 — некоторые постоянные материала. Константа n равна 0,018; 0,020; 0,030 и 0,025 для меди, алюминия, стали 0,2% С и свинца соответственно, а произведение $m(T - T_0)$ не превышает 0,20 во всем исследованном диапазоне температур (до 1200°C для стали и вплоть до температур плавления для остальных металлов). Зависимость (1.5) справедлива при $T < T_0$, где $T_0 = 370$; 340; 430 и 80 К соответственно для меди, алюминия, стали 0,2% С и свинца. При $T > T_0$ существует критическая скорость деформирования $\dot{\epsilon}_*(T)$ такая, что при $\dot{\epsilon} > \dot{\epsilon}_*$ выполняется (1.5), а при $\dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_*$ выполняется (1.6). Эти переходы от зависимости (1.5) к (1.6) обнаружены для свинца, алюминия и цинка в [8, 9, 14]. В [9] высказано предположение, что аналогичное поведение при деформировании справедливо для других металлов. Если придерживаться данного предположения, то при экстраполяции известных экспериментальных данных в область $\dot{\epsilon} \geq 10^4$ с⁻¹ следует выбрать зависимость (1.5) как наиболее вероятную. При графической экстраполяции данных по меди, приведенных в [8, 9], правдоподобным значением D представляется $D = 150$ К. Поскольку введено значение D , значение σ_T^0 можно определить, потребовав, чтобы при $T = 300$ К, $\dot{\epsilon} = 1$ с⁻¹ (обычные условия испытаний металлов) значение σ_T совпадало со справочным значением предела текучести при одноосном растяжении. Будем в дальнейшем понимать под $\dot{\epsilon}$ интенсивность скорости деформирования.

Уравнение состояния металлов в условиях высокоскоростного деформирования введем в виде

$$(1.7) \quad \sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + A(T) J^\alpha \dot{\epsilon}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \dot{\epsilon}_{ii} = 0,$$

где σ_{ij} , $\dot{\epsilon}_{ij}$ — тензоры напряжений и скоростей деформирования; J — интенсивность

скорости деформирования, $J = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}$; $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$; $A(T) = \frac{2}{3} \sigma_T^0 e^{D/T}$; $\alpha = -1 + n$.

Несложно проследить связь между (1.5) и (1.7). В условиях высокоскоростного струйного течения металлов максимальные давления обычно не превышают 35 ГПа, в то время как модуль объемного сжатия $K \approx 200$ ГПа, т. е. сжимаемостью металла можно пренебречь ($\dot{\varepsilon}_{ii} = 0$). Далее, сдвиговая деформация в условиях струйного течения $\sim 10-100\%$, поэтому будем пренебрегать начальным упругим участком (меньшим 1%) при деформировании металла. В [15] указывается, что при высоких давлениях металлы деформируются на сотни процентов без разрушения, следовательно, можно считать, что на протяжении всего процесса деформирования металл находится в состоянии текучести и в соответствии с теорией пластичности $\sigma_i = \sigma_T$ (1.4). Поскольку $\sigma_T = \sigma_T(J, T)$, подставляя (1.5) в (1.4), получим

$$(1.8) \quad \sigma_i = \sigma_T^0 e^{D/T} J^n.$$

Условие (1.8) означает, что в пространстве главных напряжений след поверхности текучести на девiatorной плоскости есть окружность, радиус которой зависит от температуры T и интенсивности J . В теории течения [16] принято рассматривать случай, когда радиус окружности есть функция параметра q , характеризующего упрочнение. Формально (1.8) не отличается от этого случая, поскольку происхождение параметра q не существенно для вывода конечных формул. Поэтому можно сразу записать уравнения течения Сен-Венана — Леви — Мизеса:

$$(1.9) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{J}{\sigma_i} s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$. Подставляя (1.8) в (1.9), получим (1.7).

В плоском случае (1.9) записывается в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{12}^2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}} s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}},$$

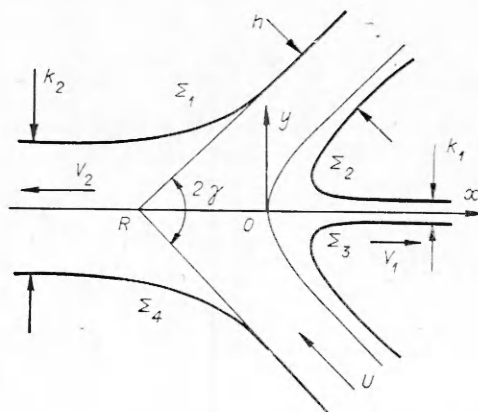
а константы A и σ_0 в (1.7) будут равны

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad A(T) = \frac{\sigma_T^0}{\sqrt{3}} e^{\frac{D}{T}}.$$

При $T = \text{const}$ среда вида (1.7) известна в литературе как обобщенная ньютоновская (степенная, Оствальда — де Вейля) жидкость; при $\alpha > 0$ жидкость называется дилатантной, при $-1 < \alpha < 0$ — псевдопластической, случай $\alpha = 0$ соответствует ньютоновской жидкости. Из (1.7) видно, что все металлы можно считать псевдопластическими жидкостями.

Как показывает анализ литературы, после ньютоновской степенная жидкость относится к одной из наиболее изученных. Степенному закону подчиняются течения многих полимеров, растворов, суспензий. Для этой жидкости известны точное решение о течении в трубах, приближенные решения для потоков вокруг сферы [17, 18], потоков в пограничных слоях вблизи твердой стенки [19, 20], потоков со смешением. Пограничные слои вблизи свободной поверхности степенной жидкости, а также применимость модели степенной псевдопластической жидкости к высокоскоростным течениям металлов, судя по известным литературным источникам, не рассматривались.

Оценки температуры в области течения показывают, что в песте нагрев не очень высок (прирост температуры примерно равен $50-80^\circ\text{C}$), а температура в кумулятивной струе не должна превышать $600-700^\circ\text{C}$. В таком диапазоне температур ($300-1000$ К) изменение $\sigma_T(\varepsilon, T)$ при $\varepsilon = \text{const}$ оказывается небольшим. Изменение же скорости деформирования в области течения велико ($\dot{\varepsilon}$ мало в набегающих струях и $\dot{\varepsilon} \sim 10^6 \text{ с}^{-1}$ вблизи критической точки). Поэтому в первом приближении возможно рассмотреть процесс соударения струй при постоянной температуре.



Ф и г. 1

2. Постановка задачи. Пусть имеется плоское установившееся движение несжимаемой жидкости в области, изображенной на фиг. 1. Две струи одинаковой толщины h движутся из бесконечности с одинаковой скоростью U навстречу друг другу под углом 2γ . Вблизи точки R пересечения асимптот внешних границ набегающих струй происходит разделение их на две расходящиеся струи, движущиеся в противоположных направлениях. На бесконечности скорости и толщины расходящихся струй равны соответственно V_1, V_2 и k_1, k_2 . Пусть течение симметрично относительно биссектрисы угла 2γ и в области течения существует единственная точка O , в которой скорость равна нулю. В силу симметрии течения точка O лежит на биссектрисе угла 2γ . Введем декартовы координаты x, y так, что точка O лежит в начале координат и ось x направлена по оси симметрии внутрь угла 2γ . Составляющие скорости по осям x, y обозначим через u, v , в сокращенной записи будем понимать $x_1 = x, x_2 = y, u_1 = u, u_2 = v$. Тензор напряжений σ_{ij} связан с тензором скоростей деформирования $\dot{\epsilon}_{ij}$ соотношением

$$(2.1) \quad \sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + A(T)I^\alpha \dot{\epsilon}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

где $I = \sqrt{\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{12}^2}$; $A(T) = \frac{\sigma_T^0}{\sqrt{3}} e^{D/T}$; $\alpha = -1 + n$; $n > 0$; $P = -\frac{1}{2} \sigma_{ii}$; T — температура; n, σ_T^0, D — постоянные материала. При $\alpha = 0, T = \text{const}$ задача рассматривалась в [21]. Поверхностного натяжения нет. Будем пренебрегать силами тяжести по сравнению с силами трения и инерционными силами. Пусть температура T среды постоянна.

Исключив из уравнений движения среды в напряжениях σ_{ij} с помощью (2.1) и произведя нормировку

$$(2.2) \quad x \rightarrow x/h, \quad y \rightarrow y/h, \quad u \rightarrow u/U, \quad v \rightarrow v/U, \quad P \rightarrow P/\rho U^2, \quad I = Ih/U,$$

можно получить при $T = \text{const}$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{I^\alpha}{B} \left\{ \Delta u + \frac{\alpha}{I} \left(\dot{\epsilon}_{11} \frac{\partial I}{\partial x} + \dot{\epsilon}_{12} \frac{\partial I}{\partial y} \right) \right\}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{I^\alpha}{B} \left\{ \Delta v + \frac{\alpha}{I} \left(\dot{\epsilon}_{12} \frac{\partial I}{\partial x} + \dot{\epsilon}_{22} \frac{\partial I}{\partial y} \right) \right\}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad B = \frac{\rho U^{1-\alpha} h^{1+\alpha}}{A}. \end{aligned}$$

Граничные условия для (2.3) поставим, потребовав обращения в нуль вектора напряжений на свободных границах Σ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) и непротекания жидкости через Σ_k . Введя единичные векторы τ_1 и τ_2 внешней нормали и касательной к свободной границе, запишем

$$(2.4) \quad \mathbf{V}|_{\Sigma} \cdot \tau_1 = 0, \quad \tau_1 \cdot \sigma|_{\Sigma} \cdot \tau_2 = 0, \quad \tau_1 \cdot \sigma|_{\Sigma} \cdot \tau_1 = 0, \quad \Sigma = \Sigma_k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Форма свободных границ предполагается неизвестной. Основной задачей будем называть задачу о нахождении неизвестных функций u, v, P и формы свободных границ Σ_k ($k = 1, 2, 3, 4$), удовлетворяющих (2.3), (2.4).

Найти решение основной задачи в настоящее время представляется затруднительным. Поэтому в данной работе рассмотрим упрощенную задачу, для чего введем *Дополнительное предположение*. Предположим, что во всякой содержащей точку O конечной внутренней подобласти G_1 области течения G функции u, v имеют ограниченные третьи производные, функция $I(x, y)$ ограничена снизу и

$$(2.5) \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } B \rightarrow \infty.$$

Упрощенная задача состоит в определении неизвестных функций u, v, P , удовлетворяющих (2.3)–(2.5), и формы свободных границ $\Sigma_k, k = 1, 2, 3, 4$. Упрощенную задачу будем решать приближенно при достаточно больших B ($B \gg 1$).

Обсуждение дополнительного предположения. Продифференцируем первое уравнение (2.3) по y , второе — по x . Взяв их разность, получим

$$(2.6) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} &= |\mathbf{V}| \frac{d\omega}{ds} = \frac{I^\alpha}{B} \left\langle \Delta \omega + \frac{\alpha(\alpha-1)}{I^2} \left\{ \dot{\epsilon}_{12} \left[\left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\dot{\epsilon}_{11} \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial y} \right\} + \frac{\alpha}{I} \left\{ \dot{\epsilon}_{12} \left[\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \right] + 2\dot{\epsilon}_{11} \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \right\} \right\rangle, \end{aligned}$$

где $d\omega/ds$ есть производная от завихренности вдоль линии тока. Так как u, v по предположению имеют ограниченные третьи производные и $I(x, y) \geq \kappa > 0$, то произведе-

дение $I^\alpha \langle \dots \rangle$ в (2.6) ограничено. Поэтому при $B \rightarrow \infty$ на внутренних линиях тока, не содержащих точку O , $d\omega/ds \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \text{const}$. Поскольку в набегающих струях задан плоскопараллельный поток ($\omega = 0$), правдоподобно, что $\omega \rightarrow 0$ в области G_1 при $B \rightarrow \infty$. С другой стороны, если $\omega \rightarrow 0$ при $B \rightarrow \infty$ в области G_1 , то функции $u, v \rightarrow u_0, v_0$ (u_0, v_0 — гармонические функции). Но u_0, v_0 бесконечно дифференцируемы, а $I_0 = 2\sqrt{(\partial u_0/\partial x)^2 + (\partial v_0/\partial y)^2}$ обращается в нуль только в бесконечности. Поэтому дополнительное предположение непротиворечиво и представляется правдоподобным. Обращение σ_{12} на свободной границе в нуль означает, что

$$(2.7) \quad \varepsilon_{12}|_\Sigma = 0, \quad \Sigma = \Sigma_k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Из условия (2.7) следует [21], что при $B \rightarrow \infty$

$$\omega|_\Sigma \rightarrow -U/R \neq 0,$$

где R — радиус кривизны свободной границы в рассматриваемой точке. Следовательно, при $B \rightarrow \infty$ вблизи свободной границы должен формироваться пограничный слой завихренности. Таким образом, дополнительное предположение (2.5) эквивалентно предположению о пограничном слое при достаточно больших B . Вне пограничного слоя завихренность будем считать пренебрежимо малой, а течение совпадающим с невязким течением.

Скорости u_0, v_0 невязкого течения удовлетворяют уравнениям движения ньютоновской жидкости (уравнениям Навье — Стокса). Несоответствие возникает лишь при попытке удовлетворить граничным условиям (2.4). Это несоответствие является формальным основанием для введения пограничного слоя вблизи свободных поверхностей в случае вязкой жидкости. В случае псевдопластической жидкости u_0, v_0 , вообще говоря, не являются решениями системы (2.3), этому мешают члены в скобках при α/I в правых частях уравнений.

Расхождение будет большим в области с большими скоростями деформирования. Однако вблизи критической точки поверхность $I(x, y)$ имеет максимум и члены при α/I обращаются в нуль. Отличия же псевдопластического течения от невязкого вблизи свободных границ и вдали от критической точки при $B \gg 1$ попытаемся описать ниже приближением пограничного слоя. Поэтому будем предполагать, что вне пограничного слоя псевдопластические поправки к невязким характеристикам течения пренебрежимо малы в сравнении с поправками внутри пограничного слоя.

Уравнения пограничного слоя вблизи твердых стенок могут быть получены с помощью асимптотического разложения решения по малому параметру $1/B^l$ [19], а также оценкой членов в уравнениях движения по порядку величин [20]. Трудно отдать предпочтение какому-либо из этих способов с точки зрения строгости изложения. Для вывода уравнений пограничного слоя в нашем случае используем метод оценки членов по порядку величин.

3. Упрощение уравнений движения. Согласно условию (2.5), в пределе при $B \rightarrow \infty$

$$(3.1) \quad \partial u/\partial y - \partial v/\partial x = 0$$

на внутренних линиях тока. Условие (3.1) вместе с третьим уравнением из (2.3) представляет собой условия Коши — Римана для аналитической функции $u_0 - iv_0$. Решение задачи о соударении несжимаемых плоских струй при условии (3.1) известно [1, 2], оно находится методом конформных отображений. Поскольку при $B \gg 1$ существует пограничный слой вблизи границ Σ_k , область реального течения приближенно совпадает с областью невязкого течения. Поэтому вместо декартовых координат x, y можно выбрать криволинейные ортогональные координаты φ, ψ , соответствующие невязкому течению, $d(\varphi + i\psi)/d(x + iy) = u_0 - iv_0$, i — мнимая единица.

Пометим координату φ индексом 1, ψ — индексом 2. Следуя [22], запишем уравнения движения в напряжениях:

$$(3.2) \quad \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \omega \times V = -\nabla P + \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (s_{11} H_2 \eta_1 + s_{12} H_2 \eta_2) + \frac{\partial}{\partial \psi} (s_{21} H_1 \eta_1 + s_{22} H_1 \eta_2) \right\}.$$

Здесь V — скорость ($V = w\eta_1 + g\eta_2$); ω — завихренность, перпендикулярная плоскости течения; H_1, H_2 — коэффициенты Ламэ; η_1, η_2 — орты вдоль координат φ, ψ . Путем геометрического анализа можно убедиться, что

$$(3.3) \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial \varphi} = -\frac{\eta_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial \psi} = \frac{\eta_2}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \varphi} = \frac{\eta_1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial \psi} = -\frac{\eta_1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \varphi}.$$

Взяв значения s_{ij} из (2.1) и учитывая (3.3), уравнения (3.2) можно записать в виде

$$(3.4) \quad \frac{w}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{g}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{g}{H_1 H_2} \left(w \frac{\partial H_1}{\partial \psi} - s \frac{\partial H_2}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{I^\alpha}{B} \left\{ \Delta w + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha}{I^2} \left[\frac{e_{11}^2}{H_1} \frac{\partial e_{11}}{\partial \varphi} + \frac{e_{11}e_{12}}{H_1} \frac{\partial e_{12}}{\partial \varphi} + \frac{e_{11}e_{12}}{H_2} \frac{\partial e_{11}}{\partial \psi} + \frac{e_{12}^2}{H_2} \frac{\partial e_{12}}{\partial \psi} \right], \\
\frac{g}{H_2} \frac{\partial g}{\partial \psi} + \frac{w}{H_1} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \frac{w}{H_1 H_2} \left(g \frac{\partial H_2}{\partial \varphi} - w \frac{\partial H_1}{\partial \psi} \right) &= - \frac{1}{H_2} \frac{\partial P}{\partial \psi} + \frac{I^\alpha}{B} \left\{ \Delta g + \right. \\
& + \frac{\alpha}{I^2} \left[\frac{e_{11}e_{12}}{H_1} \frac{\partial e_{11}}{\partial \varphi} + \frac{e_{12}^2}{H_1} \frac{\partial e_{12}}{\partial \varphi} - \frac{e_{11}^2}{H_2} \frac{\partial e_{11}}{\partial \psi} - \frac{e_{11}e_{12}}{H_2} \frac{\partial e_{12}}{\partial \psi} \right] \left. \right\}, \\
\frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial w H_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial g H_1}{\partial \psi} \right\} &= 0, \\
e_{11} = \frac{2}{H_1 H_2} \left(H_2 \frac{\partial w}{\partial \varphi} + g \frac{\partial H_1}{\partial \psi} \right) = -e_{22}, \quad e_{12} = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{H_1 \partial w - w \partial H_1}{\partial \psi} + \right. & \\
& \left. + \frac{H_2 \partial g - g \partial H_2}{\partial \varphi} \right), \quad I = \sqrt{e_{11}^2 + e_{12}^2}.
\end{aligned}$$

Третье уравнение в (3.4) есть условие несжимаемости. Нетрудно проверить что $H_1 = H_2 = 1/w_0$, где w_0 — скорость вдоль линии тока вязкого течения. Через Δw , Δg обозначены выражения:

$$\begin{aligned}
\Delta w &= \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{1}{H_1} \frac{\partial e_{11} H_1 H_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial e_{12} H_1 H_2}{\partial \psi} \right\} + \frac{e_{11}}{H_2} \frac{\partial H_2 / H_1}{\partial \varphi} + \frac{e_{12}}{H_1} \frac{\partial H_1 / H_2}{\partial \psi}, \\
\Delta g &= \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{1}{H_2} \frac{\partial e_{22} H_1 H_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial e_{21} H_1 H_2}{\partial \psi} \right\} + \frac{e_{22}}{H_1} \frac{\partial H_1 / H_2}{\partial \psi} + \frac{e_{21}}{H_2} \frac{\partial H_2 / H_1}{\partial \varphi}.
\end{aligned}$$

В уравнениях (3.4) проведем оценку членов по порядку величин внутри пограничного слоя аналогично тому, как это было сделано в [21, 23] для ньютоновской жидкости. Введем поправки z, g к скорости w_0 и давлению P_0 вязкого течения: $w = w_0(1+z)$, $P = P_0 + p$, g перпендикулярна линии тока вязкого течения.

Обозначим толщину пограничного слоя через δ . Будем считать, что $z, g, p, \delta \ll 1$ и вне пограничного слоя z и g имеют высший порядок малости. Внутри пограничного слоя $w_0 \sim 1$,

$$(3.5) \quad \begin{aligned}
\partial w_0 / \partial \varphi &= O(\delta), \quad \partial w_0 / \partial \psi = O(1), \quad \partial^2 w_0 / \partial \varphi^2 = O(\delta), \\
\partial^2 w_0 / \partial \varphi \partial \psi &= O(1), \quad \partial^2 w_0 / \partial \psi^2 = O(1).
\end{aligned}$$

Оценки (3.5) можно получить, используя аналитичность функции $\varphi + i\psi$ от аргумента $\ln w_0 - i\theta$, а также выражения $\partial \psi / \partial \theta$, $\partial \psi / \partial \ln w_0$ [24]. Так, для $\partial w_0 / \partial \varphi$, $\partial w_0 / \partial \psi$ при $|1 - w_0| \ll 1$ имеем

$$(3.5a) \quad \left(\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right)_\psi = - \frac{\left(\frac{\partial \psi / \partial \theta}{\partial \psi / \partial \ln w_0} \right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\partial \psi / \partial \theta}{\partial \psi / \partial \ln w_0} \right)^2 + 1 \right]} = (1 - w_0) f_1(\theta, \gamma),$$

$$(3.5b) \quad \left(\frac{\partial w_0}{\partial \psi} \right)_\varphi = \frac{1}{\frac{\partial \psi}{\partial \ln w_0} \left[\left(\frac{\partial \psi / \partial \theta}{\partial \psi / \partial \ln w_0} \right)^2 + 1 \right]} = f_2(\theta, \gamma),$$

причем $|f_1| \rightarrow \pi$, $|f_2| \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow \pm \infty$, а при конечных φ $|f_1|, |f_2| < f_0(\gamma)$. При не очень малых γ величина f_0 порядка нескольких единиц, поэтому $f_1, f_2 = O(1)$, а так как $(1 - w_0) \approx \delta(\partial w_0 / \partial \psi)|_\Sigma$, то получаем первые две оценки (3.5). Аналогично получаются оценки для вторых производных.

Чтобы оценить производные от поправок, рассмотрим третье уравнение в (3.4)

$$\frac{\partial(1+z)}{\partial \varphi} + \frac{\partial g / w_0}{\partial \psi} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} + g \frac{\partial(1/w_0)}{\partial \psi} + \frac{1}{w_0} \frac{\partial g}{\partial \psi} = 0.$$

Изменение поправок z, g вдоль φ происходит на расстоянии порядка 1, вдоль ψ — на расстоянии порядка δ , поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} + g \frac{\partial(1/w_0)}{\partial \psi} + \frac{1}{w_0} \frac{\partial g}{\partial \psi} \sim z + g + \frac{g}{\delta} = 0,$$

откуда

$$(3.6) \quad g = O(z\delta),$$

т. е. g является более малой величиной высшего порядка, чем δ или z . Следовательно,

смещением линий тока можно пренебречь и считать, что в первом приближении области реального и невязкого течений совпадают. Рассуждая аналогично, оценим e_{11} , e_{12} и их производные по порядку величин:

$$(3.7) \quad e_{11} \approx \frac{\partial w_0^2}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial z}{\partial \varphi} = O(\delta + z), \quad e_{12} \approx \frac{\partial w_0^2}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \psi} = O\left(1 + \frac{z}{\delta}\right),$$

$$\frac{\partial e_{11}}{\partial \varphi} \approx \frac{\partial^2 w_0^2}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = O(\delta + z), \quad \frac{\partial e_{12}}{\partial \psi} \approx \frac{\partial^2 w_0^2 (1+z)}{\partial \psi^2} = O\left(\frac{z}{\delta^2}\right).$$

Для Δw , Δg справедливы оценки

$$(3.8) \quad \Delta w = O(z/\delta^2), \quad \Delta g = O(z/\delta).$$

С учетом (3.5)–(3.8) можно оставить только главные члены в (3.4)

$$(3.9) \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{I^\alpha}{B} \left(1 + \alpha \frac{e_{12}^2}{I^2}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}, \quad z \frac{\partial w_0^2}{\partial \psi} = \frac{\partial p}{\partial \psi}.$$

Первое граничное условие (2.4) в первом приближении удовлетворяется тождественно, из второго следует

$$(3.10) \quad e_{12} \Big|_\Sigma \approx \left(\frac{\partial w_0^2}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \psi} \right) \Big|_\Sigma = 0,$$

а третье дает $P \Big|_\Sigma - \sigma_{22} \Big|_\Sigma = 0$, или

$$(3.11) \quad p \Big|_\Sigma = -\frac{I^\alpha}{B} e_{11} \Big|_\Sigma = -\frac{\left(2 \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^{1+\alpha}}{B} \Big|_\Sigma.$$

Таким образом, приближенное решение упрощенной задачи (2.3)–(2.5) при достаточно больших B сводится к поиску неизвестных функций z , p из уравнений (3.9) с граничными условиями (3.10), (3.11) в известной области $G_0(\varphi, \psi)$ невязкого течения в плоскости комплексного потенциала. Область $G_0(\varphi, \psi)$ есть двулистая полоса с точкой ветвления в критической точке. Соответствие приближенного решения реальному течению должно достигаться при $B \gg 1$ таких, что в окрестности критической точки $|z(0, 0)| \ll |z(0, \psi_\Sigma)|$, т. е. пограничный слой не должен захватывать критическую точку. Тогда область $G_0(\varphi, \psi)$ можно разделить, разрезав листы $G_0(\varphi, \psi)$ вдоль отрицательной полуоси φ , и склеить их, чтобы получились две несвязанные полосы, соответствующие пестровой и кумулятивной струям. Поскольку упрощенные уравнения движения уже не являются эллиптическими, необходимо поставить начальное условие для z . Такое условие можно выбрать, отступив достаточно далеко от критической точки вверх по потоку и положив

$$(3.12) \quad z(\varphi_0, \psi) = 0,$$

где φ_0 есть расстояние от критической точки.

Для режима соударения ($2\gamma = 45^\circ$, $h = 0,4$ см, $U = 1,0 \cdot 10^5$ см/с) медных пластин расчет параметра подобия B дает значения $B = 45$ при $T = 300$ К и $B = 69$ при $T = 1100$ К, т. е. условие $B \gg 1$ выполняется. Варьированием B в этом интервале можно грубо учесть температуру. В случае $\alpha = 0$ (ньютоновская жидкость) число B совпадает с числом Рейнольдса $Re = \rho U h / \mu$, а уравнения (3.9) с условиями (3.10)–(3.12) совпадают с уравнениями и граничными и начальными условиями, полученными в [21] для случая малой постоянной вязкости.

4. Численный счет упрощенных уравнений движения и сравнение результатов расчета с экспериментом. Аналитическое исследование уравнения на z в (3.9) осложнено ввиду зависящего от $\partial z / \partial \varphi$, $\partial z / \partial \psi$ коэффициента при $\partial^2 z / \partial \psi^2$. Поэтому исследование этого уравнения проводилось численно на ЭВМ. При расчете поправки z использовалась следующая неявная конечно-разностная схема:

$$(4.1) \quad \frac{z_m^{n+1, l+1} - z_m^n}{\tau} = \frac{I^\alpha(l)}{B} \left[1 + \alpha \frac{e_{12}^2(l)}{I^2(l)} \right] \frac{z_{m+1}^{n+1, l+1} - z_m^{n+1, l+1} + z_{m-1}^{n+1, l+1}}{h^2},$$

$$e_{12}(l), I(l) = e_{12}, I \left(\frac{z_m^{n+1, l} - z_m^n}{\tau}, \frac{z_{m+1}^{n+1, l} - z_{m-1}^{n+1, l}}{2h} \right),$$

где τ , h — шаг по φ , ψ соответственно. На свободной границе ставилось условие

$$(4.2) \quad \frac{z_{M+1}^{n+1, l} - z_{M-1}^{n+1, l}}{h} = -\frac{\partial w_0^2}{\partial \psi} \Big|_\Sigma^{n+1},$$

на линии $\psi = 0$ — условие

$$(4.3) \quad z_0^{n+1, l} = z_1^{n+1, l}$$

α	-0,990			-0,970			-0,950			-0,930			-0,870		
B	$2\gamma, \text{ град.}$														
	45	60	75	45	60	75	45	60	75	45	60	75	45	60	75
32	0,77	0,59	0,48	0,80	0,61	0,49	0,82	0,62	0,50	0,84	0,63	0,51	0,91	0,69	0,55
64	0,41	0,31	0,23	0,43	0,32	0,24	0,44	0,32	0,25	0,45	0,33	0,25	0,49	0,35	0,27
96	0,28	0,20	0,15	0,30	0,21	0,16	0,32	0,22	0,16	0,31	0,22	0,17	0,33	0,23	0,18
128	0,24	0,15	0,10	0,23	0,16	0,12	0,22	0,16	0,12	0,22	0,16	0,12	0,25	0,18	0,13
160	0,19	0,13	0,09	0,19	0,13	0,09	0,18	0,13	0,09	0,19	0,13	0,10	0,20	0,14	0,10

Счет начинался от значения φ_0 , где полагалось

$$(4.4) \quad z_m^0 = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M.$$

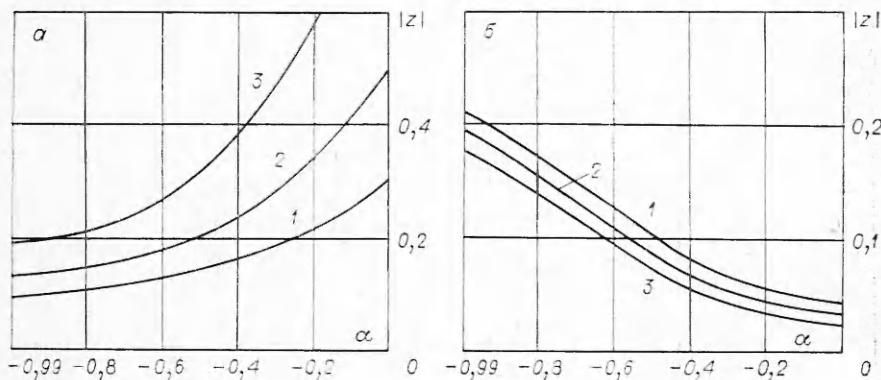
Значение φ_0 варьировалось от $-0,5$ до $-8,0$. Решение (4.1) — (4.4) находилось методом прогонки. На каждом шаге по φ последовательно улучшались вычисленные значения z подстановкой новых производных $\Delta z/\tau$, $\Delta z/h$ в коэффициент $(I^\alpha/B)(1 + \alpha e_{1/2}^2/I^2)$.

Количество итераций l варьировалось от 3 до 15. После седьмой итерации значения z^{l+1} и z^l не отличались в шестой значащей цифре. Схема (4.1) устойчива. Шаг τ изменялся по закону $\tau = \tau_1 + |\varphi/\varphi_0| \times (\tau_0 - \tau_1)$, где τ_0 — начальный шаг при $\varphi = \varphi_0$, τ_1 — шаг при $\varphi = 0$. При расчете z в кумулятивной струе $\tau_0 = 0,01 - 0,02$, $\tau_1 = 0,00038 - 0,0019$. При расчете в пестовой струе $\tau_0 = 0,01 - 0,08$, $\tau_1 = 0,005 - 0,08$. Число слоев по ψ варьировалось от 20 до 50.

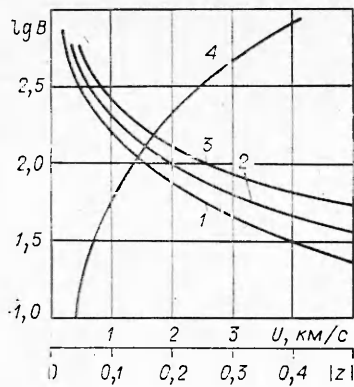
Счет обрывался при $\varphi_* > 0$ таким, чтобы значения $z(\varphi_*, \psi)$ по сечению $\varphi_* = \text{const}$ различались в третьей значащей цифре. Для кумулятивной струи при $\gamma = 22,5; 30; 37,5^\circ$ $\varphi_* = 1,0$, для пестовой струи $\varphi_* = 8,0$. Время счета одного варианта на ЭВМ М4030 ≈ 30 мин.

Проводились расчеты величины z в зависимости от параметров γ , B и α . Результаты расчетов поправки z в кумулятивной струе сведены в таблицу. Значения z находятся на пересечении строки со значением B и столбца со значением 2γ в каждой из групп из трех столбцов при заданном значении α . Качественный ход зависимости $|z(\alpha)|$ для кумулятивной струи и песта изображен на фиг. 2, а, б соответственно (линии 1—3 соответствуют $2\gamma = 75; 60; 45^\circ$ при $B = 32$). Зависимости $|z|$ от $\lg B$ при $\alpha = -0,97$ приведены на фиг. 3 (кумулятивная струя) и фиг. 4 (пест). По графику на фиг. 3 приближенно можно определить значение $|z|$ для меди. Для этого нужно по значению U определить значение $\lg B$ (кривая 4), а затем по значению $\lg B$ найти значение $|z|$ (нижняя ось абсцисс) для углов $75; 60; 45^\circ$ по кривым соответственно 1—3.

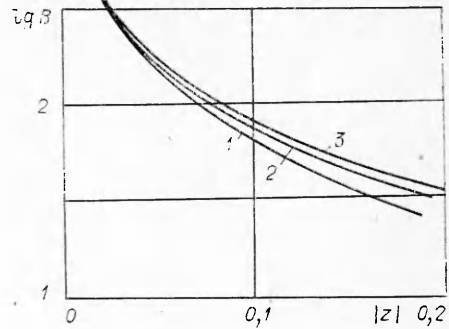
Режиму соударения ($U = 1$ км/с, $h = 0,4$ см) медных пластин ($\rho = 8,9$ г/см³, $\sigma_T = 25$ кг/мм², $\alpha = -0,97$) соответствует значение $B = 45$ при $T = 300$ К и $B = 69$ при $T = 1100$ К. Для сравнения расчетных и экспериментальных результатов можно выбрать среднее значение $B = 55$. Значение расчетной поправки z при $2\gamma = 45^\circ$, $B = 55$ равно $z = -0,52$. В [4] получено экспериментальное значение $z \approx -0,40$ для этого же режима соударения, т. е. совпадение расчетного и экспериментального значений z оказывается неплохим.



Ф и г. 2



Ф и г. 3

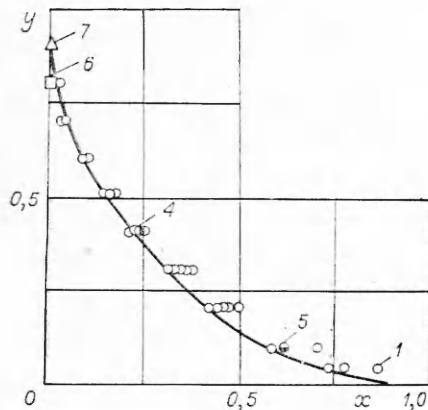


Ф и г. 4

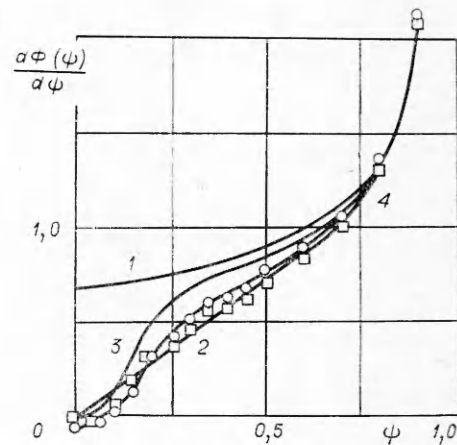
Рассчитывалась также форма индикаторной линии по методике [25]. Результаты расчета при $B = 55$, $2\gamma = 45^\circ$, $\alpha = -0,97$ (медь, $U = 1$ км/с, $h = 0,4$ см) в сравнении с экспериментальными данными в этом же режиме соударения приведены на фиг. 5 (цифры рядом со значками означают кратность повторения). Согласно расчетных и экспериментальных смещений линии хорошее. Можно видеть, что одному и тому же значению $B = 55$ неплохо соответствуют экспериментальные характеристики течения как в струе, так и в пластинах, в то время как ньютоновская жидкость описывает эти характеристики при существенно различных числах Рейнольдса ($Re^0 \approx 350$ и $Re_* \approx 25$ соответственно). В отличие от числа Рейнольдса, вычисляемого при обработке опытов по соударению пластин, для вычисления B достаточно знать объективные характеристики материала ρ , σ_r , α , которые могут быть получены независимо от опытов по соударению пластин. Оценочное значение B можно найти по формуле $B \approx \sqrt{3} \rho U^2 / \sigma_r$.

Представляет интерес сравнить также расчетную и экспериментальную производные $\delta(\psi) = d\Phi(\psi)/d\psi$ установившейся формы индикаторной линии. По модели вязкой жидкости производная $\delta(\psi)$ нарастает линейно от свободной границы (фиг. 6, кривая 2, $Re = 70$). Значение $Re = 70$ взято из сравнения расчета формы линии с экспериментом по соударению медных пластин при $U = 2,0$ км/с, $h = 0,4$ см, $2\gamma = 45^\circ$ [25]. В этом режиме соударения $B = 170$ при $T = 300$ К и $B = 270$ при $T = 1100$ К, среднее значение $B = 220$. Зависимость $\delta(\psi) = d\Phi(\psi)/d\psi$, рассчитанная по модели степенной псевдопластической жидкости для среднего значения B , имеет точку перегиба вблизи свободной границы (кривая 3, $\alpha = -0,97$, $B = 220$).

Проводилось измерение экспериментального наклона меток в опыте при $2\gamma = 45^\circ$, $U = 2,0$ км/с, $h = 0,4$ см. Измерение проводилось на микроскопе; угол наклона измерялся с точностью до 20 мин, затем вычислялась производная как тангенс угла наклона. Результаты измерения приведены на фиг. 6, где кривая 4 аппроксимирует экспериментальные значения производной, кривая 1 — наклон по идеальной жидкости. На экспериментальной зависимости $\delta(\psi)$ можно видеть точку перегиба (характерную для псевдопластической жидкости), которой нет на расчетной кривой $\delta(\psi)$ по модели вязкой жидкости. Неплохое численное совпадение экспериментальных и расчетных значений $\delta(\psi)$ достигается при $B = 170$ (а не при среднем значении $B = 220$),



Ф и г. 5



Ф и г. 6

что, вероятно, соответствует известному экспериментальному факту незначительного нагрева пластин ($\Delta T \approx 50-100^\circ\text{C}$) в этом режиме соударения.

Следует заметить, что лучшее совпадение расчетных и экспериментальных характеристик $|z|$ в кумулятивной струе при режиме соударения ($2\gamma = 45^\circ$, медь, $U = 1 \text{ км/с}$, $h = 0,4 \text{ см}$) достигается при $B = 64$ (а не среднем значении $B = 55$), что соответствует нагреву на 700°C . В этом случае расчетное значение $|z| = 0,41$ (см. таблицу), а экспериментальное, как уже говорилось, $|z| \approx 0,40$. Хотя, конечно, столь хорошее совпадение при использовании весьма приближенной модели течения, какой является приближение пограничного слоя при конечных значениях B , и при известной экспериментальной погрешности может быть и случайным.

Таким образом, модель степенной псевдопластической жидкости, основанная на модели высокоскоростного деформирования металлов Витмана — Златина, позволяет избежать присущих вязкой жидкости затруднений, связанных с разными расчетными параметрами подобия в тонкой и толстой струях при описании экспериментальных фактов. Предположение о пограничном слое вблизи свободной поверхности позволяет упростить уравнения движения и добиться неплохого количественного совпадения расчетных и экспериментальных характеристик процесса плоской кумуляции для меди на стадии формирования кумулятивной струи.

Поступила 13 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. Кумулятивный заряд и принцип его работы. — УМН, 1957, т. 12, вып. 4 (76).
2. Birkhoff G., McDougall D., Pugh E., Taylor G. Explosives with lined cavities. — J. Appl. Phys., 1948, vol. 19, p. 563.
3. Годунов С. К., Дерибас А. А., Мали В. П. О влиянии вязкости материала на процесс образования струй при соударениях металлических пластин. — ФГВ, 1975, № 1.
4. Лаптев В. П., Рубцов М. В., Тришин Ю. А. Об использовании модели вязкой жидкости для описания высокоскоростных струйных течений металлов. — ФГВ, 1983, № 4.
5. Taylor G. J., Quinney H. The plastic distortion of metals. — Phil. Trans. Royal Soc., ser. A., 1931, vol. 230, N A689.
6. Лоде В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов. — В кн.: Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948.
7. Жуков А. М. Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряженном состоянии. — В кн.: Инженерный сборник. Т. 20. М.: Изд.-во АН СССР, 1954.
8. Витман Ф. Ф., Златин Н. А., Поффе Б. С. Сопротивление деформированию металлов при скоростях $10^{-6} - 10^2$ м/сек. I. — ЖТФ, 1949, т. 19, вып. 3.
9. Витман Ф. Ф., Златин Н. А. Сопротивление деформированию металлов при скоростях $10^{-6} - 10^2$ м/сек. II. — ЖТФ, 1949, т. 19, вып. 3.
10. Campbell J. D., Ferguson W. G. The temperature and strain-rate dependence of the shear strength of mild steel. — Philos. Mag., 1970, vol. 21, N 169.
11. Кацитадзе О. П., Маркелов П. В., Варварюк В. В. Измерение динамического предела текучести при ударном сжатии. — Сообщ. АН СССР, 1974, т. 75, № 1.
12. Nadai A., Manjoine M. High-speed tension tests at elevated temperatures — parts II and III. — Trans. ASME. Ser. E. J. of Appl. Mech., 1941, vol. 8, N 2.
13. Витман Ф. Ф., Степанов В. А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара $10^2 - 10^3$ м/сек. — В кн.: Некоторые проблемы прочности твердого тела. М. — Л.: Изд.-во АН СССР, 1959.
14. Витман Ф. Ф., Златин Н. А. Сопротивление деформированию металлов при скоростях $10^{-6} - 10^2$ м/сек. III. — ЖТФ, 1950, т. 20, вып. 10.
15. Бриджмен П. В. Новейшие работы в области высоких давлений. М.: ИЛ, 1948.
16. Малинин Н. П. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975.
17. Skelland A. H. P. Non-Newtonian flow and heat transfer. N. Y., Wiley, 1967.
18. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978.
19. Шульман З. П., Берковский Б. М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск: Наука и техника, 1966.
20. Артюшков Л. С. Динамика неньютоновских жидкостей. Л.: ЛКИ, 1979.
21. Рубцов М. В. О пограничном слое при соударении плоских струй с малой вязкостью. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 51. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1981.
22. Слезкин П. А. Динамика вязкой жидкости. М.: Изд.-во техн.-теор. лит-ры, 1955.
23. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
24. Рубцов М. В. Деформация жидкой линии при соударении струй. — ПМТФ, 1977, № 6.
25. Лаптев В. П., Рубцов М. В., Тришин Ю. А. Исследование свойств вязкого течения при соударении металлических пластин, ускоренных взрывом. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 55. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1982.