

**О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ**

Сунь Цао
(Новосибирск)

В данной работе по предложению М. А. Лаврентьева рассматривается волновое движение вращающегося жидкого кольца, ограниченного снаружи твердой стенкой. Здесь, так же как и в работе [1], речь идет опять о волне на поверхности завихренной жидкости. Рассмотрение этого вопроса позволит нам понять некоторые несимметричные характеристики волн, вызванных центробежной силой (объемная сила), которая играет такую же роль, как гравитация в случае гравитационных волн.

§ 1. Рассмотрим следующую плоскую задачу (фиг. 1). Полярная система координат (r, θ) вращается с угловой скоростью ω вместе с невесомой жидкостью, заключенной в кольце,

$$R_1 + \zeta(\theta, t) \leq r \leq R_2 \quad (1.1)$$

Скорости $u(r, \theta, t)$, $v(r, \theta, t)$ и отклонение внутренней поверхности $\zeta(\theta, t)$ считаются малыми, причем для определенности полагаем

$$\int_0^{2\pi} \zeta(\theta, t) d\theta = 0 \quad (1.2)$$

Сохраняя малые первого порядка, получим уравнения движения во вращающейся системе координат

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{\rho} P_r + 2\omega v + \omega^2 r = -\frac{1}{\rho} p_r + 2\omega v \\ v_t &= -\frac{1}{r\rho} P_\theta - 2\omega u = -\frac{1}{r\rho} p_\theta - 2\omega u \end{aligned}$$

где

$$p = P - \frac{\rho\omega^2}{2} (r^2 - R_1^2) \quad (1.4)$$

Исключая p в уравнениях (1.3), получим

$$u_{t\theta} - (v_t r)_r = 0, \quad [u_{\theta\theta} - (v_\theta r)_r]_t = 0 \quad (1.5)$$

Используя уравнение неразрывности, получим

$$v_\theta + (ur)_r = 0 \quad (1.6)$$

$$[u_{\theta\theta} + r^2 u_{rr} + 3ru_r + u]_t = 0 \quad (1.7)$$

Граничные условия принимаем следующие:

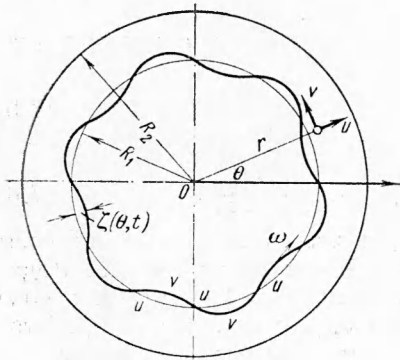
$$u = 0 \quad \text{при } r = R_2 \quad (1.8)$$

$$\zeta_t = u \quad \text{при } r = R_1 + \zeta = R_1 \quad (\text{ввиду пренебрежения } O(2)) \quad (1.9)$$

$$P = 0 \quad \text{при } r = R_1 + \zeta \quad (1.10)$$

из (1.10) вытекает

$$p = -\rho\omega^2 R_1 \zeta \quad \text{при } r = R_1 + \zeta = R_1$$



Фиг. 1

Дифференцируя по θ и используя (1.3), получаем

$$\omega^2 \zeta_\theta = - \frac{P_\theta}{\rho R_1} = v_t + 2\omega u \quad \text{при } r = R_1$$

или

$$\omega^2 \zeta_{t\theta} = v_{0t} + 2\omega u_{t\theta} \quad \text{при } r = R_1$$

Подставив (1.6) и (1.9) в приведенные выражения, получим граничное условие для u

$$w^2 u_{\theta\theta} = 2\omega u_{t\theta} - u_{tt} - ru_{rt} \quad \text{на границе } r = R_1 \quad (1.11)$$

Таким образом, задача свелась к отысканию решения (1.7) при граничных условиях (1.8) и (1.11).

К задаче с начальным условием (задача Коши — Пуассона) вернемся несколько позже, а сейчас рассмотрим периодические движения, т. е. будем искать решение в виде

$$u_n(r, \theta, t) = U_n(r) \exp [i(n\theta - \sigma_n t)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в (1.7), (1.8) и (1.11), получаем

$$r^2 \frac{d^2 U_n}{dr^2} + 3r \frac{dU_n}{dr} + (1 - n^2) U_n = 0$$

$$U_n = 0 \quad \text{при } r = R_2, \quad R_1 \frac{dU_n}{dr} = \left(\frac{\omega n}{\sigma_n} + 1 \right)^2 U_n = 0 \quad \text{при } r = R_1 \quad (1.13)$$

Общим решением этого уравнения является:

$$U_n = A_n r^{-n-1} + B_n r^{n-1}$$

С учетом условия при $r = R_2$ имеем

$$U_n = B_n (r^{n-1} - R_2^{2n} r^{-n-1}) \quad (B_n - \text{произвольное число}). \quad (1.14)$$

Так как $U_0 \equiv 0$ при $n = 0$, то в дальнейшем считаем $n > 0$. Подставив (1.14) в условие на границе $r = R_1$, получим

$$\left(\frac{\omega n}{\sigma_n} + 1 \right)^2 = \frac{n - 1 + (n + 1) (R_2 / R_1)^{2n}}{(R_2 / R_1)^{2n} - 1}$$

Отсюда

$$\sigma_n^{+, -} = \frac{n\omega}{\pm \sqrt{\frac{n - 1 + (n + 1) (R_2 / R_1)^{2n}}{(R_2 / R_1)^{2n} - 1} - 1}} = \frac{n\omega}{\pm I(n) - 1} \quad (1.15)$$

Итак, окончательное решение будет

$$u_n(r, \theta, t) = B_n^+ (r^{n-1} - R_2^{2n} r^{-n-1}) \exp [i(n\theta - \sigma_n^+ t)] + B_n^- (r^{n-1} - R_2^{2n} r^{-n-1}) \exp [i(n\theta - \sigma_n^- t)] \quad (1.16)$$

Из (1.9)

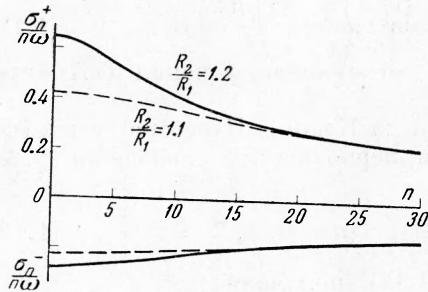
$$\zeta_n(\theta, t) = \int u_n(R_1, \theta, t) dt = \frac{iB_n^+ R_1^{n-1}}{\sigma_n^+} \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \right] \exp [i(n\theta - \sigma_n^+ t)] + \frac{iB_n^- R_1^{n-1}}{\sigma_n^-} \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \right] \exp [i(n\theta - \sigma_n^- t)] \quad (1.17)$$

Из (1.6)

$$v_n(r, \theta, t) = iB_n^+ (r^{n-1} + R_2^{2n} r^{-n-1}) \exp [i(n\theta - \sigma_n^+ t)] + iB_n^- (r^{n-1} + R_2^{2n} r^{-n-1}) \exp [i(n\theta - \sigma_n^- t)] \quad (1.18)$$

Выясним физическую картину полученного периодического решения (1.16), (1.17) и (1.18).

1. Волновое движение в направлении вращения системы координат распространяется с угловой скоростью σ_n^+/n (условно говоря, в положительную сторону, считая $\omega > 0$) или σ_n^-/n (условно говоря, в отрицательную сторону). Графики σ_n^+/n и σ_n^-/n , вычисленные по (1.15), показаны на фиг. 2.



Фиг. 2

Так как

$$\frac{\sigma_n^+}{n} > \left| \frac{\sigma_n^-}{n} \right|$$

то волна распространяется в положительную сторону быстрее, чем в отрицательную. Кроме того,

$$\omega + \frac{\sigma_n^-}{n} > 0$$

поэтому относительно неподвижной системы координат оба типа волн распространяются в сторону вращения потока.

2. При больших n справедлива следующая асимптотическая формула, вместо (1.15),

$$\frac{\sigma_n^{+,-}}{n} = \frac{\omega}{\pm \sqrt{n}} \quad (1.19)$$

При очень больших n имеем

$$\frac{\sigma_n^{+,-}}{n} = \pm \frac{\omega}{\sqrt{n}} \quad (1.20)$$

Так как

$$n = \frac{2\pi R_1}{\lambda_n}, \quad c_n^{+,-} = R_1 \frac{\sigma_n^{+,-}}{n}$$

где λ_n — длина волны, $c_n^{+,-}$ — касательная скорость распространения волн, то

$$c_n^{+,-} = \pm \sqrt{\frac{R_1 \omega^2 \lambda_n}{2\pi}} \quad \left(c = \pm \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \right) \quad (1.21)$$

Отличие полученной формулы от известной формулы для скорости c распространения гравитационных волн (приведена для сравнения рядом в скобках) заключается в том, что в (1.21) вместо ускорения силы тяжести g под корнем стоит центробежное ускорение $R_1 \omega^2$. Известно, что формула для c справедлива, когда λ меньше глубины воды; физически это значит, что волновое возмущение на дне ничтожно. В рассматриваемом же случае (1.21) справедливо при очень больших n , т. е. очень малых λ_n . Это значит, что $\lambda_n \ll R_2 - R_1$, или волновое возмущение ничтожно мало на стенке $r = R_2$. Следовательно, все волновое движение концентрируется у свободной поверхности и зависит только от центробежного ускорения на границе $r = R_1$, равно $R_1 \omega^2$.

Другим предельным случаем является $\lambda_n \gg R_2 - R_1$. Из (1.15) следует

$$c_n^{+,-} = \frac{\sigma_n^{+,-}}{n} R_1 = \pm \sqrt{R_1 \omega^2 (R_2 - R_1)} \quad (1.22)$$

что аналогично формуле для случая длинных гравитационных волн

$$c = \pm \sqrt{gh}$$

3. Рассмотрим решение (1.16), (1.17) и (1.18) более детально. Пусть

$$B_n^- = 0, \quad B_n^+ = \frac{a\sigma_n^+}{R_1^{n-1}[1 - (R_2/R_1)^{2n}]}$$

Тогда

$$\zeta(\theta, t) = -a \sin(n\theta - \sigma_n^+ t) \quad (1.23)$$

$$u(r, \theta, t) = \frac{a\sigma_n^+}{[(R_2/R_1)^{2n} - 1]} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-1} \left[\left(\frac{R_2}{r}\right)^{2n} - 1\right] \cos(n\theta - \sigma_n^+ t)$$

$$v(r, \theta, t) = \frac{a\sigma_n^+}{[(R_2/R_1)^{2n} - 1]} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-1} \left[\left(\frac{R_2}{r}\right)^{2n} + 1\right] \sin(n\theta - \sigma_n^+ t)$$

где a — амплитуда волн. На свободной поверхности имеем

$$\begin{aligned} u(R_1, \theta, t) &= a\sigma_n^+ \cos(n\theta - \sigma_n^+ t) \\ v(R_1, \theta, t) &= a\sigma_n^+ \frac{R_2^{2n} + R_1^{2n}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} \sin(n\theta - \sigma_n^+ t) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Для иллюстрации на фиг. 1 приведены результаты вычислений для значений

$$\frac{R_2}{R_1} = 1.4, \quad \frac{a}{R_1} = 0.08, \quad n = 6$$

Нетрудно видеть, что $|u|$ и $|v|$ пропорциональны a и ω .

§ 2. Вернемся к задаче с начальным условием (задача Коши — Пуассона). Как обычно, начальное условие задается следующим образом:

$$\zeta(\theta, 0) = f(\theta), \quad \pi(R_1, \theta) = F(\theta) R_1 \rho \quad (2.1)$$

где $\pi(R_1, \theta)$ — импульс давления на свободной поверхности в начальный момент.

Построим решение на основании (1.16), (1.17) и (1.18) методом Фурье

$$\begin{aligned} \zeta(\theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{iB_n^+ R_1^{n-1}}{\sigma_n^+} \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \right] e^{i(n\theta - \sigma_n^+ t)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{iB_n^- R_1^{n-1}}{\sigma_n^-} \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \right] e^{i(n\theta - \sigma_n^- t)} \right\} \\ u(r, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad v(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь B_n^+ и B_n^- определяются при помощи (2.1). Так как

$$v(r, \theta, 0) = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \pi}{\partial \theta}$$

то

$$v(R_1, \theta, 0) = -\frac{dF}{d\theta}$$

или

$$F(\theta) - \int v(R_1, \theta, 0) d\theta = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(B_n^+ + B_n^-) R_1^{n-1}}{n} \left[1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \right] e^{in\theta} + \text{const} \quad (2.3)$$

Из (2.1) и (2.2) следует

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} i \left(\frac{B_n^+}{\sigma_n^+} + \frac{B_n^-}{\sigma_n^-} \right) R_1^{n-1} \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \right] e^{in\theta} \quad (2.4)$$

Отсюда получим

$$-\frac{(B_n^+ + B_n^-)R_1^{n-1}}{n} \left[1 + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\theta) e^{-in\theta} d\theta = F_n$$

$$i \left(\frac{B_n^+}{\sigma_n^+} + \frac{B_n^-}{\sigma_n^-} \right) R_1^{n-1} \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = f_n \quad (2.5)$$

Определяя B_n^+ , B_n^- из (2.5) и подставляя найденные выражения в (2.2), при помощи (1.15) получим

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{i n F_n}{2\omega I_n} + \frac{\sigma_n^- f_n}{\sigma_n^- - \sigma_n^+} \right) \exp [i(n\theta - \sigma_n^+ t)] + \right. \\ \left. + \left(\frac{n F_n}{2i\omega I_n} + \frac{\sigma_n^+ f_n}{\sigma_n^+ - \sigma_n^-} \right) \exp [i(n\theta - \sigma_n^- t)] \right\} \quad (2.6)$$

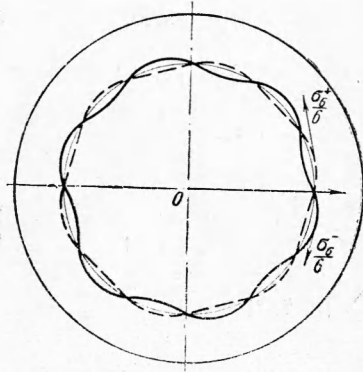
На фиг. 3а показан пример

$$F(\theta) = 0, \quad f(\theta) = a \cos 6(\theta - \theta_0)$$

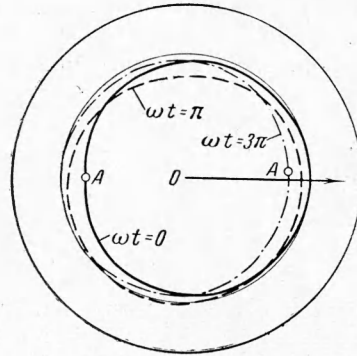
Из (2.5) и (2.6) имеем (2.7)

$$\zeta(\theta, t) = \frac{\sigma_6^-}{\sigma_6^- - \sigma_6^+} a \cos 6 \left(\theta - \theta_0 - \frac{\sigma_6^+}{6} t \right) + \frac{\sigma_6^+}{\sigma_6^+ - \sigma_6^-} a \cos 6 \left(\theta - \theta_0 - \frac{\sigma_6^-}{6} t \right)$$

Эта формула показывает, что амплитуда волны, распространяющейся в отрицательную сторону с меньшей скоростью $\frac{1}{6} \sigma_6^-$ (сплошная линия на фиг. 3а), будет много больше, чем амплитуда волны, распростра-



Фиг. 3а



Фиг. 3б

няющейся в положительную сторону (пунктирная линия). На фиг. 3б приведены результаты вычислений для $F(\theta) = 0$, $f(\theta) = a\theta^2$. Согласно (2.6) были вычислены $\zeta(\theta, t)$ в моменты времени $\omega t = 0$, $\omega t = \pi$ и $\omega t = 3\pi$. Видно, что вершина волны A , возникшая в момент $\omega t = 0$ при $\theta = \pi$, непрерывно распространяется в отрицательную сторону.

§ 3. Рассмотрим теперь волны конечной амплитуды. Предполагаем, что движение является установившимся в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω , и что поле скоростей выражается следующим образом:

$$u = \varphi_r, \quad v = \sigma r + \frac{1}{r} \varphi_\theta \quad (3.1)$$

где $\varphi(r, \theta)$ — потенциал скоростей волнового движения. Из уравнения

неразрывности следует

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{или} \quad (r\varphi_r)_r + \frac{1}{r} \varphi_{\theta\theta} = 0 \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1) в уравнения движения

$$\begin{aligned} uu_r + \frac{v}{r} u_\theta - \frac{1}{r} v^2 &= -\frac{1}{\rho} p_r + 2\omega v + r\omega^2 \\ \frac{1}{r} uv + uv_r + \frac{v}{r} v_\theta &= -\frac{1}{r\rho} p_\theta - 2\omega u \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \varphi_r^2 + \sigma \varphi_\theta + \frac{1}{2r^2} \varphi_\theta^2 \right]_r - \frac{2(\omega + \sigma)}{r} \varphi_\theta - r(\omega + \sigma)^2 &= -\frac{1}{\rho} p_r \\ \left[\frac{1}{2} \varphi_r^2 + \sigma \varphi_\theta + \frac{1}{2r^2} \varphi_\theta^2 \right]_\theta + 2(\omega + \sigma) r \varphi_r &= -\frac{1}{\rho} p_\theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

При помощи (3.2) определяем функцию ψ следующим образом:

$$r\varphi_r = \psi_\theta, \quad \varphi_\theta = -r\psi_r \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3), получим

$$\frac{1}{2} \psi_r^2 + \sigma \varphi_\theta + \frac{1}{2r^2} \varphi_\theta^2 + 2(\omega + \sigma) \psi - \frac{r^2}{2} (\omega + \sigma)^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (3.5)$$

Давление p определяется из (3.5) после того, как φ найдена из (3.2). Таким образом, задача свелась к отысканию гармонической функции φ , удовлетворяющей граничным условиям

$$\varphi_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2 \quad (3.6)$$

$$p = 0 \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{u}{v} = \frac{\varphi_r}{\sigma r + \varphi_\theta / r} \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad r = R_1 + \xi(\theta) \quad (3.8)$$

Здесь $\xi(\theta)$ — отклонение свободной поверхности от $r = R_1$.

Считаем $\varphi \approx \psi \approx \xi \approx O(1)$ и рассматриваем второе приближение, пренебрегая $O(3)$. Решение ищем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= D_1 a (r^n + R_2^{2n} r^{-n}) \sin n\theta + D_2 a^2 (r^{2n} + R_2^{4n} r^{-2n}) \sin 2n\theta \\ \xi(\theta) &= a \cos n\theta + e_2 a^2 \cos 2n\theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

Видно, что (3.9) удовлетворяет уравнению Лапласа (3.2) и граничному условию (3.6). Поэтому теперь задача сводится к выбору величин σ , D_1 , D_2 , e_2 так, чтобы решение (3.9) удовлетворяло граничному условию (3.7) и (3.8). Из (3.4) и (3.9) следует

$$\psi(r, \theta) = -D_1 a (r^n - R_2^{2n} r^{-n}) \cos n\theta - D_2 a^2 (r^{2n} - R_2^{4n} r^{-2n}) \cos 2n\theta \quad (3.10)$$

Подставив (3.7), (3.9), (3.10) в (3.5), получим

$$La \cos n\theta + Ma^2 \cos 2n\theta = 0 \quad (3.11)$$

Точно так же подставив (3.9) в (3.8), получим

$$Ra \sin n\theta + Sa^2 \sin 2n\theta = 0 \quad (3.12)$$

Здесь L, M, R, S являются функциями параметров σ, D_1, D_2, e_2 . Отсюда

$$L = 0, \quad M = 0, \quad R = 0, \quad S = 0 \quad (3.13)$$

Решая (3.13), найдем

$$\begin{aligned} \sigma &= \pm \omega \sqrt{\frac{R_{21}^{2n} - 1}{(n+1)R_{21}^{2n} + n - 1}}, \quad D_1 = \frac{\sigma}{R_1^{n-1}[R_{21}^{2n} - 1]} \\ D_2 &= -3n\sigma R_{21}^{2n} R_1^{-2n} [R_{21}^{2n} - 1]^{-4} \quad \left(R_{21} = \frac{R_2}{R_1}\right) \\ e_2 &= \frac{(2n+1)R_{21}^{6n} + (10n-3)R_{21}^{4n} + (10n+3)R_{21}^{2n} + (2n-1)}{4R_1[-R_{21}^{2n} + 1]^3} \end{aligned} \quad (3.14)$$

В случае $R_2 = \infty$ решение более обозримо. Рассмотрим третье приближение.

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= a\sigma_0 R_1 \left[1 - \frac{(n^2 + 6n + 1)a^2}{8R_1^2} \right] \left(\frac{R_1}{r} \right)^n \sin n\theta - \\ &\quad - \frac{(2n+1)a^3\sigma_0(\omega + \sigma_0)}{8R_1(\omega - \sigma_0)} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{3n} \sin 3n\theta \quad \left(\sigma_0 = \pm \frac{\omega}{\sqrt{n+1}} \right) \\ \zeta(\theta) &= a \cos n\theta - \frac{(2n+1)a^2}{4R_1} \cos 2n\theta + \\ &\quad + \frac{a^3}{8R_1^2(\omega/\sigma_0 - 1)} \left[n(3n+2)\frac{\omega}{\sigma_0} - (3n^2 + 6n + 2) \right] \cos 3n\theta \end{aligned} \quad (3.15)$$

Как в случае гравитационных волн конечной амплитуды, теперь σ зависит от a

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{n^2 a^2}{2R_1^2} \right) \quad (3.16)$$

Заметим, что из (3.16) вытекает

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left[1 + n^2 \frac{a^2}{R_1^2} + O\left(\frac{a^4}{R_1^4}\right) \right] = \sigma_0^2 \left(1 + \frac{4\pi^2 a^2}{\lambda_n^2} \right) \quad (3.17)$$

Здесь $\lambda_n = 2\pi R/n$ — длина волны. Эта формула напоминает известную формулу зависимости скорости распространения от амплитуды нелинейных гравитационных волн

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \left(1 + \frac{4\pi^2 a^2}{\lambda^2} \right)$$

Заметим также, что амплитуды третьей гармоники имеют разные величины в случаях

$$\sigma_0 = \omega / \sqrt{n+1}, \quad \sigma_0 = -\omega / \sqrt{n+1}$$

(см. (3.15)). Здесь также имеет место явление несимметрии.

Некоторые результаты, приведенные выше, были получены также А. Б. Шабатом.

Поступила
1 VI 60

ЛИТЕРАТУРА

1. Сунь Цао. О волнах на поверхности равномерно завихренной жидкости. ПМТФ, 1960, № 2.