УДК 519.853.2+519.632

Модифицированная схема двойственности для решения упругой задачи с трещиной*

Р.В. Намм, Г.И. Цой

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск, 680000

E-mails: rnamm@yandex.ru (Намм Р.В.), tsoy.dv@mail.ru (Цой Г.И.)

Намм Р.В., Цой Г.И. Модифицированная схема двойственности для решения упругой задачи с трещиной // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 1. — С. 47–58.

Рассматривается схема двойственности для решения задачи с трещиной в перемещениях. Двойственный метод решения основан на модифицированном функционале Лагранжа. При этом сходимость метода исследуется при естественном предположении об H^1 — регулярности решения задачи с трещиной. Доказывается соотношение двойственности для исходной и двойственной задач.

DOI: 10.15372/SJNM20170105

Ключевые слова: *упругая задача с трещиной, схема двойственности, модифицированный функционал Лагранжа, функционал чувствительности, соотношение двойственности, слабая полунепрерывность снизу.*

Namm R.V., Tsoy G.I. A modified dual scheme for solving an elastic crack problem // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 1. — P. 47–58.

The dual scheme for solving a crack problem in terms of displacements is considered. The dual solution method is based on a modified Lagrangian functional. In addition, the method convergence is investigated under natural assumptions on H^1-regularity of the crack problem solution. The duality relation for the primal and dual problems has been proposed.

Keywords: *elastic crack problem, duality scheme, modified Lagrangian functional, sensitivity functional, duality relation, weak lower semicontinuity.*

Введение

Классические постановки задачи о равновесии упругого тела с трещиной состоят в том, что на берегах трещины задаются краевые условия типа равенств [1]. Как правило, эти краевые условия соответствуют нулевым поверхностным силам. Но равенство нулю поверхностных сил не исключает возможности проникновения берегов трещины друг в друга, что является неестественным с точки зрения механики. В последнее время в работах по теории трещин рассматриваются модели с нелинейными краевыми условиями вида неравенств на берегах трещины, обеспечивающие взаимное непроникновение берегов трещины [2]. Эти модели допускают вариационную постановку в виде минимизации выпуклого функционала на замкнутом выпуклом подмножестве исходного гильбертова пространства или в виде вариационных неравенств. Особенно актуальной становится разработка эффективных методов приближенного решения указанных вариационных

*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Дальневосточного отделения Российской академии наук (проект № 15-I-4-075).

неравенств. В работах [2–4] отражен опыт численного решения нелинейных вариационных задач механики, в том числе задач с трещинами.

В предлагаемой работе для решения плоской задачи теории упругости с трещиной с условиями непроникновения берегов трещины друг в друга применяется схема двойственности, построенная на основе модифицированных функционалов Лагранжа. Модифицированные функционалы Лагранжа для решения вариационных неравенств механики рассматривались в работах [5–8]. В этих работах, как правило, предполагалась достаточная регулярность решения исходной задачи, обеспечивающая разрешимость двойственной задачи. Однако для задачи теории упругости с трещиной регулярность решения в окрестности краев трещины может быть недостаточной для разрешимости двойственной задачи.

Несмотря на указанную проблему, для решения поставленной задачи в работе строится и обосновывается схема двойственности, доказывается соотношение двойственности. Приводятся численные примеры, указывающие на эффективность предложенного модифицированного метода двойственности.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей Γ, и $\gamma \subset \Omega$ — разрез (трещина) внутри Ω. Предполагаем, что $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1^+ \bigcup \Gamma_1^- \bigcup \Gamma_1^*$, где Γ_0, Γ_1, Γ_1^+, Γ_1^-, Γ_1^* — непустые открытые попарно непересекающиеся подмножества Γ и $\Gamma_1 = \Gamma_1^+ \bigcup \Gamma_1^- \bigcup \Gamma_1^*$ (см. рис. 1).

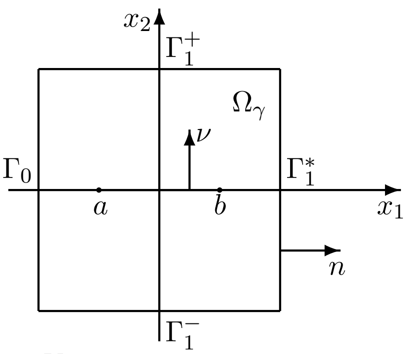

Рис. 1. Упругое тело с трещиной внутри

Считаем, что

$$\gamma = \{(x_1, x_2) \in \Omega : \ a < x_1 < b, \ x_2 = 0\},$$

предполагая, что концевые точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$ являются вершинами трещины и не выходят на внешнюю границу Γ. Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \backslash \overline{\gamma}$, $\overline{\gamma} = \{(x_1, x_2) \in \Omega : a \le x_1 \le b, \ x_2 = 0\}$. Выберем вектор единичной нормали ν на γ. В этом случае можем говорить о положительном (верхнем) γ^+ и отрицательном (нижнем) γ^- берегах трещины γ. Рассмотрим задачу теории упругости с трещиной.

Для вектора перемещений $v = (v_1, v_2)$ определим тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \qquad i, j = 1, 2,$$

и тензор напряжений

$$\sigma_{ij}(v) = c_{ijkm}\varepsilon_{km}(v),$$

где $c_{ijkm} = c_{jimk} = c_{kmij}$, $i, j, k, m = 1, 2$, и по повторяющимся индексам ведётся суммирование.

Пусть заданы вектор-функции $f = (f_1, f_2)$ и $p = (p_1, p_2)$ объемных и поверхностных сил соответственно. Краевая постановка задачи с трещиной выглядит так:

$$\begin{gathered} -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i \ \text{ в } \ \Omega_\gamma, \quad i = 1, 2, \\ u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0 \ , \\ \sigma_{ij} n_j = p_i \ \text{ на } \ \Gamma_1, \quad i = 1, 2, \end{gathered} \tag{1}$$

где $n = (n_1, n_2)$ — вектор единичной внешней нормали к Γ.

На участке γ ставятся следующие условия:

$$\begin{gathered} [u_\nu] \geq 0, \quad [\sigma_\nu(u)] = 0, \quad \sigma_\nu(u)[u_\nu] = 0 \ \text{ на } \ \gamma, \\ \sigma_\nu(u) \leq 0, \quad \sigma_\tau(u) = 0 \ \text{ на } \ \gamma^\pm. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $u_\nu = u\nu$, $[u_\nu] = u_\nu^+ - u_\nu^-$, $\sigma_\nu(u) = \sigma_{ij}(u)\nu_i\nu_j$, $[\sigma_\nu(u)] = \sigma_\nu^+(u) - \sigma_\nu^-(u)$, $\sigma_\tau(u) = \sigma(u) - \sigma_\nu\nu$, где $\sigma(u) = (\sigma_1(u), \sigma_2(u))$, $\sigma_i(u) = \sigma_{ij}(u)\nu_j$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим вариационную задачу для области с трещиной, соответствующую краевой задаче (1), (2). Введем множество допустимых перемещений:

$$K = \left\{ v \in [H^1(\Omega_\gamma)]^2 : \ [v_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma, \ v = 0 \text{ на } \Gamma_0 \right\},$$

где, как и ранее, $[v_\nu] = v_\nu^+ - v_\nu^-$ — скачок функции $v_\nu = v\nu$ на γ. Значение функции v_ν на трещине γ понимается в смысле значений следов функций v_ν на γ (см. [2, с. 12]), $v_\nu^\pm \in H^{1/2}(\gamma)$. Норма в пространстве $H^{1/2}(\gamma)$ определяется как

$$\|v_\nu\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} = \|v_\nu\|^2_{L^2(\gamma)} + \int\limits_\gamma \int\limits_\gamma \frac{|v_\nu(x) - v_\nu(y)|^2}{|x - y|^2}\, dx\, dy.$$

В дальнейшем нам понадобится пространство $H^{1/2}_{00}(\gamma)$ [2, с. 53]:

$$H^{1/2}_{00}(\gamma) = \left\{ w \in H^{1/2}(\gamma) : \ \frac{w}{\sqrt{\rho}} \in L_2(\gamma) \right\}$$

с нормой

$$\|w\|^2_{H^{1/2}_{00}(\gamma)} = \|w\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} + \left\| \frac{w}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(\gamma)},$$

где $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\gamma)$.

Краевая задача (1), (2) соответствует следующей вариационной задаче [2]:

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2} a(v, v) - \displaystyle\int\limits_{\Omega_\gamma} f_i v_i \, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} p_i v_i \, d\Gamma \to \min, \\ v \in K, \end{cases} \tag{3}$$

где $a(u, v) = \int\limits_{\Omega_\gamma} c_{ijpm}\varepsilon_{pm}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, d\Omega$, $f \in [L_2(\Omega_\gamma)]^2$, $p \in [L_2(\Gamma_1)]^2$.

Задача (3) равносильна вариационному неравенству

$$u \in K : \ a(u, v - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i(v_i - u_i)\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} p_i(v_i - u_i)\, d\Gamma \geq 0 \ \ \forall\, v \in K. \tag{4}$$

2. Схема двойственности для решения упругой задачи с трещиной

Для решения задачи с трещиной применим схему двойственности, основанную на модифицированном функционале Лагранжа. Сходная схема двойственности для решения скалярной модельной задачи с трещиной ранее была исследована в [9].

Определим пространство

$$W = \big\{v \in [H^1(\Omega_\gamma)]^2 :\ v = 0 \text{ на } \Gamma_0\big\}.$$

Для произвольного $m \in L_2(\gamma)$ построим множество

$$K_m = \{v \in W :\ -[v_\nu] \le m \text{ п. в. на } \gamma\}.$$

Нетрудно показать, что K_m — выпуклое замкнутое по норме $H^1(\Omega_\gamma)$ множество.

На пространстве L_2 определим функционал чувствительности

$$\chi(m) = \begin{cases} \inf\limits_{v\in K_m} J(v), & \text{если } K_m \ne \varnothing, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что задача $\inf_{v\in K_m} J(v)$ при условии $K_m \ne \varnothing$ разрешима в силу коэрцитивности $J(w)$ на $H^1(\Omega_\gamma)$. Если функция $m \in L_2(\gamma) \setminus H^{1/2}_{00}(\gamma)$, то множество K_m может быть пустым [2].

Функционал $\chi(m)$ является собственным выпуклым функционалом на $L_2(\gamma)$, но его эффективная область $\mathrm{dom}\chi = \{m \in L_2(\gamma) :\ \chi(m) < +\infty\}$ не совпадает с $L_2(\gamma)$. Заметим, что $\mathrm{dom}\chi$ является выпуклым, но не замкнутым множеством в $L_2(\gamma)$, причем в нашем случае $\overline{\mathrm{dom}\chi} = L_2(\gamma)$.

На пространстве $W \times L_2(\gamma) \times L_2(\gamma)$ определим функционал

$$Q(v,l,m) = \begin{cases} J(v) + \int\limits_\gamma lm\,d\Gamma + \dfrac{r}{2}\int\limits_\gamma m^2 d\Gamma, & \text{если } -[v_\nu] \le m \text{ п. в. на } \gamma, \\ +\infty & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и модифицированный функционал Лагранжа $M(v,l)$ на пространстве $W \times L_2(\gamma)$:

$$M(v,l) = \inf_{m\in L_2(\gamma)} Q(v,l,m) = J(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_\gamma \Big\{\big[(l - r[v_\nu])^+\big]^2 - l^2\Big\}\,d\Gamma,$$

где $(l - r[v_\nu])^+ \equiv \max\{0, l - r[v_\nu]\}$, $r > 0$ — const.

Введем модифицированный двойственный функционал

$$\underline{M}(l) = \inf_{v\in W} M(v,l) = \inf_{v\in W}\left\{J(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_\gamma \Big\{\big[(l - r[v_\nu])^+\big]^2 - l^2\Big\}\,d\Gamma\right\}.$$

Так как $\inf_{v\in W}\inf_{m\in L_2(\gamma)} Q(v,l,m) = \inf_{m\in L_2(\gamma)}\inf_{v\in W} Q(v,l,m)$, то для $\underline{M}(l)$ имеет место и другое представление [7]:

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\gamma} \left\{ \chi(m) + \int\limits_\gamma lm \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_\gamma m^2 d\Gamma \right\}.$$

Легко видеть, что для любых $l \in L_2(\gamma)$ справедлива оценка

$$\underline{M}(l) \le \chi(0) = \inf_{v \in K} J(v). \tag{5}$$

Для функционала $\underline{M}(l)$ определим двойственную задачу:

$$\begin{cases} \underline{M}(l) - \sup, \\ l \in L_2(\gamma). \end{cases} \tag{6}$$

В работах [7, 8] модифицированные функционалы Лагранжа и связанные с ними двойственные методы решения исследовались в предположении разрешимости задачи (6). Отметим, что разрешимость двойственной задачи имеет место, если решение u исходной задачи принадлежит пространству $[H^2(\Omega_\gamma)]^2$. Однако для задачи (1), (2) с внутренней трещиной предположение о большей регулярности решения, чем $[H^1(\Omega_\gamma)]^2$, является неестественным. Ниже исследуется двойственный метод решения задачи с трещиной, в котором разрешимость двойственной задачи (6) заранее не предполагается. Сходное исследование двойственного метода для решения скалярной модельной задачи с трещиной ранее проведено в [9].

Исследуем функционал чувствительности $\chi(m)$ и связанный с ним двойственный функционал $\underline{M}(l)$.

Теорема 1. *Пусть $\overline{m} \in L_2(\gamma)$ не принадлежит* $\mathrm{dom}\chi$. *Тогда для любой последовательности $\{m_i\} \subset \mathrm{dom}\chi$ такой, что $\lim_{i\to\infty} \|m_i - \overline{m}\|_{L_2(\gamma)} = 0$, имеет место предельное равенство $\lim_{i\to\infty} \chi(m_i) = +\infty$.*

Доказательство. Для функции $\overline{m} \notin \mathrm{dom}\chi$ рассмотрим произвольную последовательность $\{m_i\} \subset \mathrm{dom}\chi$ такую, что $\lim_{i\to\infty} \|m_i - \overline{m}\|_{L_2(\gamma)} = 0$. Так как $K_{m_i} \ne \varnothing$ и функционал $J(v)$ коэрцитивен на W, то существует единственный элемент $v^i = \arg\min_{v \in K_{m_i}} J(v)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ [2]. Покажем, что $\lim_{i\to\infty} \|v^i\|_W = +\infty$.

Допустим противное, т. е. пусть у последовательности $\{v^i\}$ существует ограниченная подпоследовательность $\{v^{i_j}\}$, $\left\|v^{i_j}\right\|_W \le c$ для всех i_j, где $c > 0$ — const. Из теоремы о следах функций вытекает, что $\left\|[v_\nu^{i_j}]\right\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} \le c_1$, где $c_1 > 0$ — const [2, с. 14]. Тогда $\{[v_\nu^{i_j}]\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\gamma)$. Пусть $t \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$ есть слабая предельная точка этой последовательности. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что t есть слабый предел $\{[v_\nu^{i_j}]\}$ в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$. Тогда $\{[v_\nu^{i_j}]\}$ сходится к t по норме в $L_2(\gamma)$. Так как $-[v_\nu^{i_j}] \le m_i$, то $-t \le \overline{m}$ на γ. Тем самым $K_{\overline{m}} \ne \varnothing$ или $\overline{m} \in \mathrm{dom}\chi$. Полученное противоречие показывает, что $\lim_{i\to\infty} \|v^i\|_W = +\infty$. Так как функционал $J(v)$ коэрцитивен на W, то $\lim_{i\to\infty} \chi(m_i) = \lim_{i\to\infty} J(v^i) = +\infty$. □

Теорема 2. *Пусть $\overline{m} \in L_2(\gamma)$ принадлежит* $\mathrm{dom}\chi$. *Тогда для любой последовательности $\{m_i\} \subset \mathrm{dom}\chi$, сходящейся к $\overline{m}$ в $L_2(\gamma)$, справедливо неравенство*

$$\varliminf_{i\to\infty} \chi(m_i) \ge \chi(\overline{m}).$$

Доказательство. Пусть теперь $\{m_i\} \subset \mathrm{dom}\chi$ и $\lim_{i\to\infty} \|m_i - \overline{m}\|_{L_2(\gamma)} = 0$, где $\overline{m} \in \mathrm{dom}\chi$. Из последовательности $\{m_i\}$ выделим подпоследовательность $\{m_{i_j}\}$, для которой

$$\lim_{i\to\infty} \chi(m_{i_j}) = \varliminf_{i\to\infty} \chi(m_i).$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{v_{i_j}\}$, где $v^{i_j} = \arg\min_{v\in K_{m_{i_j}}} J(v)$. Последовательность $\{v_{i_j}\}$ является ограниченной последовательностью в W (иначе $\lim_{i\to\infty} \chi(m_{i_j}) = +\infty$ и требуемое неравенство доказано). Так как $W \subset [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, то $\|v_{i_j}\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \le c$, где $c > 0$ — const. Более того, $\{v_{i_j}\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\Gamma)$. Пусть $\hat{v} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ есть слабая предельная точка этой последовательности. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\hat{v}$ есть слабый предел $\{v_{i_j}\}$. Тогда $\{v_{i_j}\}$ сходится к $\hat{v}$ в $L_2(\Gamma)$. Из теоремы о следах [2, с. 14] также следует, что последовательность $\{[v_{i_j}]\}$ слабо компактна в $H^{1/2}_{00}(\gamma)$. Пусть $t \in H^{1/2}_{00}(\gamma)$ — слабая предельная точка этой последовательности. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $\{[v_{i_j}]\}$ является слабо сходящейся последовательностью, т. е. t есть слабый предел $\{[v_{i_j}]\}$ в $H^{1/2}_{00}(\gamma)$.

Так как пространство $H^{1/2}_{00}(\gamma)$ компактно вкладывается в $L_2(\gamma)$, а $L_2(\gamma)$ вкладывается в $H^{-1/2}_{00}(\gamma)$, то $[v_{i_j}]$ сходится к t по норме в $L_2(\gamma)$. Здесь $H^{-1/2}_{00}(\gamma)$ — пространство, двойственное к $H^{1/2}_{00}(\gamma)$. Из сходимостей m_{i_j} к $\overline{m}$ в $L_2(\gamma)$, $[v_{i_j}]$ к t в $L_2(\gamma)$ и условия $-[v_{i_j}] \le m_{i_j}$ получаем $-t \le \overline{m}$ на γ.

Обозначим $\widetilde{t} = \arg\min_{v\in W_t} J(v)$, где $W_t = \{v \in W:\ [v_\nu] = t \text{ на } \gamma,\ v = \hat{v} \text{ на } \Gamma_1\}$. Имеем

$$\begin{aligned} J(v^{i_j}) - J(\widetilde{t}) &= a(\widetilde{t}, v^{i_j} - \widetilde{t}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f_s(v^{i_j}_s - \widetilde{t}_s)\, d\Omega + \frac{1}{2} a(v^{i_j} - \widetilde{t}, v^{i_j} - \widetilde{t}) - \int\limits_{\Gamma_1} p_s(v^{i_j} - \hat{v}_s)\, d\Gamma \\ &= \langle \mu_1, v^{i_j} - \hat{v}\rangle + \langle \mu_2, [v^{i_j}_\nu] - t\rangle - \int\limits_{\Gamma_1} p_s(v^{i_j} - \hat{v}_s)\, d\Gamma + \frac{1}{2} a(v^{i_j} - \widetilde{t}, v^{i_j} - \widetilde{t}), \end{aligned}$$

где $\mu_1 \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$, $\mu_2 \in H^{-1/2}_{00}(\gamma)$. Здесь

$$\langle \mu_1, v^{i_j} - \hat{v}\rangle + \langle \mu_2, [v^{i_j}_\nu] - t\rangle = a(\widetilde{t}, v^{i_j} - \widetilde{t}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f_s(v^{i_j}_s - \widetilde{t}_s)\, d\Omega$$

и при этом $\mu_1 + \mu_2 \in ([H^{1/2}(\Gamma)]^2 \times H^{1/2}_{00}(\gamma))^*$, где $([H^{1/2}(\Gamma)]^2 \times H^{1/2}_{00}(\gamma))^*$ — двойственное к $[H^{1/2}(\Gamma)]^2 \times H^{1/2}_{00}(\gamma)$ пространство.

Так как $\{v_{i_j}\}$ слабо сходится к $\hat{v}$ в $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$, а $\{[v_{i_j}]\}$ слабо сходится к t в $H^{1/2}_{00}(\gamma)$, то в силу единственности слабого предела имеем

$$\lim_{j\to\infty} \langle \mu_1, v^{i_j} - \hat{v}\rangle + \lim_{j\to\infty} \langle \mu_2, [v^{i_j}_\nu] - t\rangle = 0.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\lim_{j\to\infty} \chi(m_{i_j}) = \lim_{j\to\infty} J(v^{i_j}) \ge J(\widetilde{t}) \ge \chi(\overline{m})$$

и, следовательно,

$$\varliminf_{i\to\infty} \chi(m_i) \ge \chi(\overline{m}). \qquad \square$$

Из теорем 1, 2 следует, что функционал чувствительности χ является полунепрерывным снизу на $L_2(\gamma)$ функционалом. Легко показать, что $\chi(m)$ — выпуклый функционал. Отсюда вытекает слабая полунепрерывность снизу функционала чувствительности на $L_2(\gamma)$.

Для произвольного фиксированного $l \in L_2(\gamma)$ рассмотрим функционал

$$F_e(m) = \chi(m) + \int\limits_\gamma lm\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\gamma m^2 d\Gamma, \quad r > 0 \ \text{— const.}$$

Легко видеть, что $F_e(m)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал на $L_2(\gamma)$.

Так как $\chi(m)$ полунепрерывен снизу в $L_2(\gamma)$, то его надграфик epiχ есть выпуклое замкнутое множество в $L_2(\gamma) \times R$, $R = (-\infty, +\infty)$. По теореме отделимости Мазура [10, с. 164] существуют такие $\alpha \in L_2(\gamma)$ и $\beta \in R$, что

$$\chi(m) + \int\limits_\gamma \alpha m\, d\Gamma + \beta \geq 0 \ \ \forall\ m \in \mathrm{dom}\chi.$$

Следовательно, для функционала $F_e(m)$ справедлива оценка снизу

$$F_e(m) \geq -\int\limits_\gamma \alpha m\, d\Gamma + \int\limits_\gamma lm\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\gamma m^2 d\Gamma \ - \beta \geq 0 \ \ \forall\ m \in L_2(\gamma).$$

Поэтому $F_e(m) \to +\infty$ при $\|m\|_{L_2(\gamma)} \to +\infty$, т. е. $F_e(m)$ коэрцитивен в $L_2(\gamma)$.

Из слабой полунепрерывности снизу и коэрцитивности $F_e(m)$ следует существование для любого $l \in L_2(\gamma)$ элемента $m(l) \in L_2(\gamma)$ такого, что $m(l) = \arg\min_{m \in L_2(\gamma)} F_e(m)$. Из сильной выпуклости $F_e(m)$ на domχ [11] вытекает, что для любого $l \in L_2(\gamma)$ элемент $m(l)$ единственный.

Сформулируем для двойственного функционала $\underline{M}(l)$ несколько характеристических утверждений, доказательства которых повторяют доказательства теорем 2–4 в [12].

Теорема 3. *Двойственный функционал $\underline{M}(l)$ непрерывен в $L_2(\gamma)$.*

Теорема 4. *Двойственный функционал $\underline{M}(l)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\gamma)$, и его производная $\bigtriangledown \underline{M}(l)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\dfrac{1}{r}$, т. е. выполняется неравенство*

$$\| \bigtriangledown \underline{M}(l^{'}) - \bigtriangledown \underline{M}(l^{''})\|_{L_2(\gamma)} \leq \frac{1}{r}\|l^{'} - l^{''}\|_{L_2(\gamma)} \quad \forall\, l^{'}, l^{''} \in L_2(\gamma).$$

Можно показать, что $\bigtriangledown \underline{M}(l) = m(l) = \max\left\{ -[u_\nu], -\dfrac{l}{r}\right\} \ \forall\, l \in L_2(\gamma)$.

Для решения двойственной задачи (6) рассмотрим градиентный метод [12]:

$$l^{k+1} = l^k + \theta_k m(l^k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

с любым начальным значением $l^0 \in L_2(\gamma)$, $\theta_k \in [\beta, 2r - \beta]$, $\beta \in (0, r]$.

Теорема 5. *Для последовательности* $\{l^k\}$, *построенной по методу* (7), *имеет место предельное равенство* $\lim_{k\to\infty}\|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)}=0$.

Градиентный метод (7) порождает следующий алгоритм метода Удзавы решения задачи (3):

1) на начальном шаге $k=0$ задается произвольная функция $l^0\in L_2(\gamma)$;

2) для каждого $k=0,1,2,\dots$ последовательно вычисляются [12]:

$$\text{(i)}\qquad u^{k+1}=\operatorname*{arg\,min}_{v\in W}\left\{J(v)+\frac{1}{2r}\int\limits_{\gamma}\left\{\left[(l^k-r[v_\nu])^+\right]^2-(l^k)^2\right\}d\Gamma\right\}; \tag{8}$$

$$\text{(ii)}\qquad l^{k+1}=l^k+\theta_k\max\left\{-[u_\nu^{k+1}],-\frac{l^k}{r}\right\},\quad \theta_k\in[\beta,2r-\beta],\ \ \beta\in(0,r]. \tag{9}$$

Теорема 6. *Имеет место равенство двойственности*

$$\sup_{l\in L_2(\gamma)}\underline{M}(l)=\inf_{v\in K}J(v).$$

Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 2 в [9].

Отметим, что при условии разрешимости двойственной задачи (6) можно доказать, что последовательность $\{l^k\}$ ограничена в $L_2(\gamma)$ [7, 8]. Вместе с теоремой 5 это означает, что справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\gamma}l^k m(l^k)\,d\Gamma=0.$$

Отсюда сразу вытекает сходимость метода (8), (9) по функционалу задачи (3), т. е.

$$\lim_{k\to\infty}\chi(m(l^k))=\lim_{k\to\infty}J(u^{k+1})=J(u),$$

где u — решение задачи (3).

С учетом сильной выпуклости функционала $J(v)$ это означает, что

$$\lim_{k\to\infty}\|u^{k+1}-u\|_W=0\ .$$

При этом последовательность $\{l^k\}$ слабо сходится к решению двойственной задачи (6).

3. Численное решение задачи методом конечных элементов

Область Ω выбиралась в виде единичного квадрата с параметрами трещины $a=-0.3$, $b=0.3$. Согласно предложенному алгоритму (8), (9), на каждом шаге итерационного процесса рассматривается задача минимизации сильно выпуклого функционала. Для нахождения решения задачи (8) воспользуемся методом конечных элементов. Для этого мы разбиваем область Ω треугольниками T_k с помощью триангуляции Делоне (рис. 2), так что $\Omega=\bigcup_1^{N_t}T_k$, где N_t — количество треугольников. Таким образом, мы получаем конечный элемент, состоящий из треугольников, имеющих общую вершину в узле триангуляции. Вблизи трещины γ происходит сгущение триангуляции.

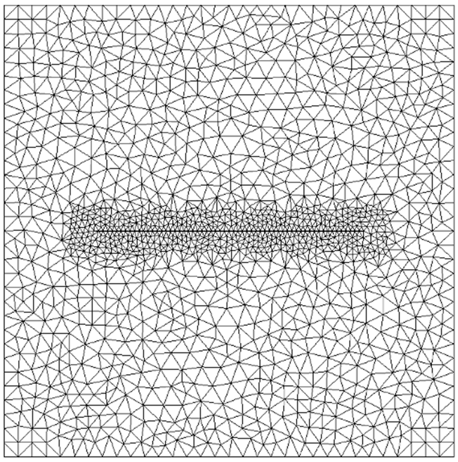

Рис. 2. Триангуляция Делоне области Ω

Пронумеруем узлы триангуляции сверху вниз от 1 до N. Для каждого узла i определена базисная функция $\varphi_i(x,y)$, такая что $\varphi_i(x^i,y^i)=1$, а для всех соседних узлов j: $\varphi_i(x^j,y^j)=0$. В качестве базисных возьмем кусочно-линейные функции (см. [13]).

Введем следующие обозначения: h — максимальная длина стороны среди всех T_k, $P_h=\{D_1,\ldots,D_N\}$ — множество всех узлов триангуляции, $I_h=\{M_1,\ldots,M_R\}$ — множество узлов триангуляции на γ, W_h — линейная оболочка базисных функций $\varphi_i(x,y)$, $u_h=(u_1^h,u_2^h)$ — кусочно-линейное восполнение точного решения u:

$$u_i^h(x,y)=\sum_{j=1}^{N} t_j^{(i)}\varphi_j(x,y) \quad \text{для } i=1,2 \text{ и } t_j^{(i)}\in R.$$

Отметим, что так как Ω — многоугольник, обеспечено вложение $W_h\subset W$. Таким образом заменим задачу (8) конечно-элементной задачей:

$$u^{k+1}=\arg\min_{v\in W_h}\left\{J(v)+\frac{1}{2r}\int\limits_{\gamma}\left\{\Big[(l^k-r[v_\nu])^+\Big]^2-(l^k)^2\right\}d\Gamma\right\}. \qquad (10)$$

Введем вектор $t=(t_1,t_2,\ldots,t_{2N})$, такой что первые его N компонент соответствуют значениям $u_1^h(D_i(x^i,y^i))$, а последние N компонент соответствуют $u_2^h(D_i(x^i,y^i))$. Тогда задача минимизации (10) сводится к нахождению оптимальных значений t_i. Причем для узлов на трещине делаем замену переменных: $v_2^-=v_2^++\tau$, где $\tau=-[v_\nu]$, и находим оптимальное значение τ. Для решения задачи (10) в конечно-элементном приближении осуществлялась аппроксимация граничного интеграла по γ с помощью квадратурной формулы трапеций. После этого задача решалась методом покоординатного спуска.

Итерации для метода покоординатного спуска заканчиваем, как только выполнится критерий

$$\max_i|t_i^{s+1}-t_i^s|<10^{-10},\quad i=\overline{1,2N}.$$

Для метода Удзавы условие останова имеет следующий вид:

$$\max_i|l_i^{m+1}-l_i^m|<10^{-8},\quad i=\overline{1,R}.$$

Приведем результаты численного решения поставленной задачи. Значения параметров брались следующими: $f = (f_1, f_2) = (0, 0)$, поверхностное усилие с правой $p_1|_{\Gamma_1^*} = g(1-2|x_2|)$, $p_2|_{\Gamma_1^*} = 0$ МПа, верхней $p_1|_{\Gamma_1^+} = 0$ МПа, $p_2|_{\Gamma_1^+} = -1$ МПа и нижней $p_1|_{\Gamma_1^-} = 0$ МПа, $p_2|_{\Gamma_1^-} = 1$ МПа сторон, коэффициент трения $F = 0.3$, модуль упругости Юнга $E = 73000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$, константа $r = 10^8$, параметр h на трещине равен 0.01. Следует отметить, что в работах [14, 15] подробно исследуется численное решение задачи теории упругости с трещиной, выходящей на границу области. Причем в [15] рассматривается применение классических методов двойственности.

На рис. 3 представлены значения u_ν на берегах трещины $\gamma^\pm$ при разных боковых усилиях с правой стороны: $g = \{-27$ МПа; -24.3 МПа; -21.6 МПа; -18.9 МПа$\}$.

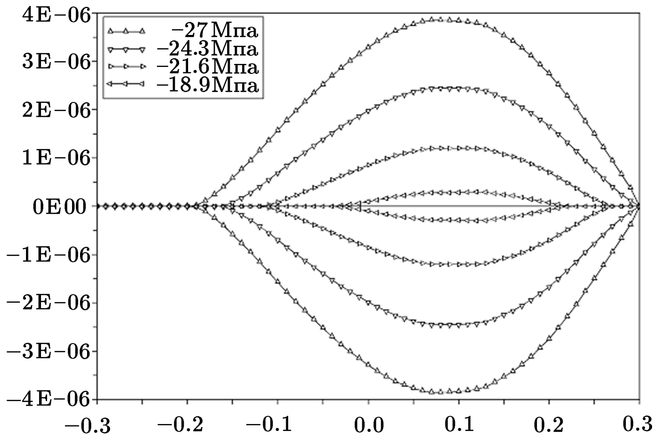

Рис. 3. Графики функции u_ν на $\gamma^\pm$

На графиках видно, что взаимное проникание берегов в нелинейной задаче о равновесии тела с трещиной отсутствует. Численные расчеты показывают, что быстрая сходимость алгоритма (8), (9) по двойственной переменной l обеспечивается малым числом шагов (ii). В примере, приведенном выше, выполняется всего 8 итераций по двойственной переменной. Таким образом, численные расчеты подтвердили, что модифицированные функционалы Лагранжа позволяют эффективно решать математические модели с нелинейными краевыми условиями вида неравенств.

Литература

1. **Морозов Н.Ф.** Математические вопросы теории трещин. — М.: Наука, 1984.
2. **Хлуднев А.М.** Задачи теории упругости в негладких областях. — М.: Физматлит, 2010.
3. **Кравчук А.С.** Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. — М.: МГАПИ, 1997.
4. **Khludnev A.M., Kovtunenko V.A.** Analysis of crack in solids. — Southhampton-Boston: WIT Press, 2000.
5. **Ву Г., Намм Р.В., Сачков С.А.** Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2006. — Т. 46, № 1. — С. 26–36.

6. **Вихтенко Э.М., Намм Р.В.** Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2007. — Т. 47, № 12. — С. 2023–2036.
7. **Вихтенко Э.М., Максимова Н.Н., Намм Р.В.** Функционалы чувствительности в вариационных неравенствах механики и их приложение к схемам двойственности // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 1. — С. 43–52.
8. **Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В.** Функционалы чувствительности в контактных задачах теории упругости // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2014. — Т. 54, № 7. — С. 1218–1228.
9. **Вихтенко Э.М., Намм Р.В.** О методе двойственности для решения модельной задачи с трещиной // Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 1. — С. 36–43.
10. **Куфнер А., Фучик С.** Нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1988.
11. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
12. **Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В.** Методы решения полукоэрцитивных вариационных неравенств механики на основе модифицированных функционалов Лагранжа // Дальневосточ. мат. журн. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 6–17.
13. **Марчук Г.И., Агошков В.И.** Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Физматлит, 1981.
14. **Hintermuller M., Kovtunenko V.A., and Kunisch K.** The primal–dual active set method for a crack problem with non-penetration // IMA J. Appl. Math. — 2004. — Vol. 69, № 1. — P. 1–26.
15. **Ворушин Е.В.** Численное исследование модельной задачи деформирования упругопластического тела с трещиной при условии возможного контакта берегов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2006. — Т. 9, № 4. — С. 335–344.

Поступила в редакцию 31 мая 2016 г.,
в окончательном варианте 7 июля 2016 г.

Литература в транслитерации

1. **Morozov N.F.** Matematicheskie voprosy teorii treshchin. — M.: Nauka, 1984.
2. **KHludnev A.M.** Zadachi teorii uprugosti v negladkikh oblastyakh. — M.: Fizmatlit, 2010.
3. **Kravchuk A.S.** Variatsionnye i kvazivariatsionnye neravenstva v mekhanike. — M.: MGAPI, 1997.
4. **Khludnev A.M., Kovtunenko V.A.** Analysis of crack in solids. — Southhampton-Boston: WIT Press, 2000.
5. **Vu G., Namm R.V., Sachkov S.A.** Iteratsionnyy metod poiska sedlovoy tochki dlya polukoertsitivnoy zadachi Sin'orini, osnovannyy na modifitsirovannom funktsionale Lagranzha // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2006. — T. 46, № 1. — S. 26–36.
6. **Vikhtenko E.M., Namm R.V.** Skhema dvoystvennosti dlya resheniya polukoertsitivnoy zadachi Sin'orini s treniem // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2007. — T. 47, № 12. — S. 2023–2036.
7. **Vikhtenko E.M., Maksimova N.N., Namm R.V.** Funktsionaly chuvstvitel'nosti v variatsionnykh neravenstvakh mekhaniki i ikh prilozhenie k skhemam dvoystvennosti // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2014. — T. 17, № 1. — S. 43–52.
8. **Vikhtenko E.M., Vu G., Namm R.V.** Funktsionaly chuvstvitel'nosti v kontaktnykh zadachakh teorii uprugosti // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2014. — T. 54, № 7. — S. 1218–1228.

9. **Vikhtenko E.M., Namm R.V.** O metode dvoystvennosti dlya resheniya model'noy zadachi s treshchinoy // Tr. IMM UrO RAN. — 2016. — T. 22, № 1. — S. 36–43.

10. **Kufner A., Fuchik S.** Nelineynye differentsial'nye uravneniya. — M.: Nauka, 1988.

11. **Vasil'ev F.P.** Metody resheniya ekstremal'nykh zadach. — M.: Nauka, 1981.

12. **Vikhtenko E.M., Vu G., Namm R.V.** Metody resheniya polukoertsitivnykh variatsionnykh neravenstv mekhaniki na osnove modifitsirovannykh funktsionalov Lagranzha // Dal'nevostoch. mat. zhurn. — 2014. — T. 14, № 1. — S. 6–17.

13. **Marchuk G.I., Agoshkov V.I.** Vvedenie v proektsionno-setochnye metody. — M.: Fizmatlit, 1981.

14. **Hintermuller M., Kovtunenko V.A., and Kunisch K.** The primal–dual active set method for a crack problem with non-penetration // IMA J. Appl. Math. — 2004. — Vol. 69, № 1. — P. 1–26.

15. **Vtorushin E.V.** Chislennoe issledovanie model'noy zadachi deformirovaniya uprugoplasticheskogo tela s treshchinoy pri uslovii vozmozhnogo kontakta beregov // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2006. — T. 9, № 4. — S. 335–344.