

$\beta = \beta_*$ реализуется течение с внутренней ножкой Маха (рис. 1, в). При уменьшении β_∞ от значений, при которых существует только полностью нерегулярное отражение, до исходного $\beta = \beta_*$ имеет место именно эта схема взаимодействия (рис. 1, г). Таким образом, наблюдается явление гистерезиса. Аналогичная ситуация возникает при падении УВ на ближний след ([6], гл. 6, § 1).

Рис. 2 иллюстрирует влияние интенсивности падающей УВ на геометрические характеристики дозвукового участка струи: величину расстояния $\bar{x}_A = x_A/h_0$ (сплошные кривые) и длину дозвуковой области $L = L/h_0$ (штриховые), измеряемую от сечения сильной УВ FO до сечения, в котором среднее число Маха равно единице. Расчеты проводились для схемы полностью нерегулярного отражения при $M_c = 3$. Кривые 1—3 отвечают $M_\infty = 5; 6; 7$.

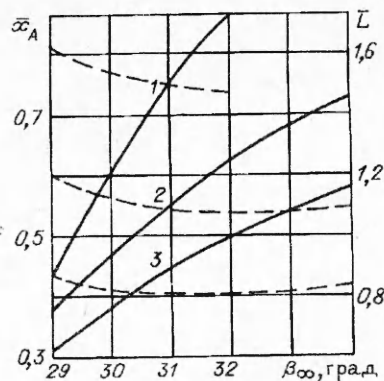


Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковец И. С., Тимошенко В. И. К расчету нерегулярного взаимодействия ударных волн // ПМТФ.— 1992.— № 6.
2. Белоцерковец И. С., Тимошенко В. И. К расчету характеристик течения при равномерном вдуве однородного газа в кормовой области тела // ПМТФ.— 1984.— № 1.
3. Тимошенко В. И. Сверхзвуковые течения вязкого газа.— Киев: Наук. думка, 1987.
4. Патанкар С., Сполдинг Д. Тепло- и массообмен в пограничных слоях.— М.: Энергия, 1971.
5. MacCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering.— N. Y., 1969.— (Pap./AIAA; N 69).
6. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Отрывные и кавитационные течения: основные свойства и расчетные модели.— М.: Наука, 1990.
7. Теория турбулентных струй.— 2-е изд., испр. и доп./Под ред. Г. П. Абрамовича.— М.: Наука, 1984.

г. Днепропетровск

Поступила 24/IV 1992 г.,
в окончательном варианте — 16/IX 1992 г.

УДК 532.59

О. А. Серебренникова, А. М. Франк

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРАЖЕНИЯ МАХА ДЛЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

Известно, что при накате уединенной поверхностной волны на вертикальную стенку, расположенную под углом к фронту волны, возможно как регулярное отражение, когда наблюдаются только две волны — падающая и отраженная, причем углы и амплитуды их одинаковы, так и отражение Маха, когда возникает тройная несимметричная конфигурация. Изучению данного феномена посвящены работы [1—5].

В работе Перрауда (см. [3, 6]) проведены эксперименты по отражению волн безразмерной амплитуды $a = 0,08—0,38$ в широком диапазоне углов падения. Перрауд получил, что для угла падения $\psi_i \geq 45^\circ$ всегда реализуется регулярное отражение, а для $\psi_i \leq 45^\circ$ — маховское. Были определены также количественные характеристики амплитуд и углов для отраженной волны и ножки Маха. По данным Перрауда, эти параметры зависят от угла падения волны на стенку и практически не зависят от ее амплитуды.

Для волн малой амплитуды существуют теоретические результаты [2] по резонансному взаимодействию трех уединенных волн, которые, в част-

© О. А. Серебренникова, А. М. Франк, 1993

ности, при $t \rightarrow \infty$ дают асимптотическое решение для задачи о маховском отражении. В этой работе получено, что критический угол падения ψ_i^* , разделяющий два типа отражения, зависит от амплитуды волны и равен $\sqrt{3}a$. Параметры тройной конфигурации тоже оказываются зависящими не только от угла падения волны, но и от ее амплитуды. Существенно отличается также от экспериментов предсказанная амплитуда волны на стенке, которая в решении Майлса достигает $4a$ при критическом угле падения $\psi_i = \sqrt{3}a$.

В [4] данное явление моделируется численно с использованием приближенных уравнений длинных волн малой амплитуды. Расчеты проведены в основном для $a = 0,05$ и в целом неплохо согласуются с теорией Майлса.

Эксперименты [3] проводились специально для проверки теоретической модели [2]. Рассмотрено отражение волн амплитуды $a = 0,1-0,15$ для различных углов. В результате обработки данных измерений автор высказывает сомнения в правомерности применения модели Майлса к этой задаче. Таким образом, следует признать, что ряд вопросов здесь по-прежнему остается открытым.

В настоящей работе представлены результаты численного исследования отражения уединенных волн от вертикальной стенки для различных амплитуд и углов падения. В качестве математических моделей используются две дискретные модели несжимаемой жидкости. Работа существенно дополняет и уточняет опубликованные в [7] предварительные результаты расчетов этой задачи, в которых использованы более грубые сетки, а решение получено при относительно небольших значениях физического времени.

1. Трехмерная дискретная модель. Данная модель является обобщением на трехмерный случай дискретной модели [8]. Рассматривается трехмерная задача о взаимодействии уединенной волны над ровным дном с жесткой вертикальной стенкой, расположенной под углом к фронту. Ось z направлена вверх, $z = 0$ соответствует уровню невозмущенной свободной поверхности. В занятой жидкостью области Ω вводится регулярная сетка

$$\Omega_h = \{r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \mid \alpha = (i, j, k), i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, L\},$$

при этом $k = 1$ и $k = L$ отвечают соответственно узлам, лежащим на дне и на свободной поверхности, $j = 1$ — узлам на вертикальной стенке. Ячейка — неправильный додекаэдр с вершинами в узлах сетки, гранями которого являются треугольники (рис. 1, а). Нетрудно видеть, что ячейки сетки разбивают всю область Ω на элементарные объемы без пустот и пересечений. При этом свободная граница представляет собой кусочно-линейную поверхность из треугольных элементов.

Будем считать, что в узлах сетки находятся материальные частицы, в которых сосредоточена вся масса среды, причем масса частицы с номером $\alpha = (i, j, k)$ определяется в виде

$$m_\alpha = \frac{\rho}{8} \sum_{\beta \in N_\alpha} V_\beta,$$

где V_α — объем ячейки с номером α ; $N_\alpha = \{(i - \gamma_1, j - \gamma_2, k - \gamma_3) \mid \gamma_s = 0, 1\}$ — множество номеров соседних с ней ячеек; ρ — плотность жидкости.

Следующий шаг — формулирование кинематического ограничения на возможные движения частиц, каким для жидкости является условие несжимаемости. В данной дискретизации естественным условием несжимаемости будет условие постоянства объемов всех ячеек сетки в процессе движения частиц:

$$(1.1) \quad V_\alpha = V_\alpha^0 = \text{const.}$$

Объем ячейки V_α выражается через координаты вершин, поэтому условия (1.1) представляют собой обычные голономные связи.

Далее, поскольку изучается задача о гравитационных волнах, не-

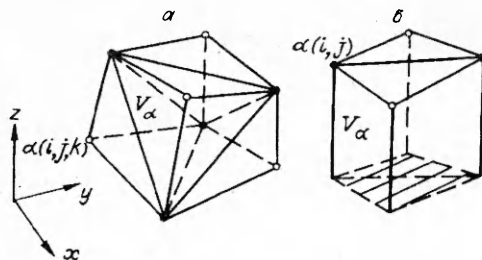


Рис. 1

обходимо каким-то образом ввести в рассмотрение силу тяжести. Наиболее простой способ, обычно используемый в лагранжевых методах, заключается в том, что сила тяжести F_α , действующая на каждую частицу, имеет вид

$$(1.2) \quad F_\alpha = m_\alpha g.$$

Однако такая сила тяжести, в отличие от континуального случая, оказывается, вообще говоря, не согласованной с условием несжимаемости (1.1) в том смысле, что, например, слой «жидкости» постоянной глубины будет находиться в равновесии только в случае прямоугольной сетки Ω_h . Для произвольной сетки равновесие нарушается, т. е. силы реакции связей (1.1) не способны компенсировать силу тяжести (1.2) для всех частиц одновременно. Применительно к уравнениям гидродинамики такая ситуация означает несогласованную аппроксимацию градиента давления и градиента гравитационного потенциала. Поэтому в данной работе аналогично двумерному случаю [8] сила тяжести вводится следующим образом. Потенциальная энергия системы частиц полагается равной потенциальной энергии слоя жидкости со свободной границей:

$$(1.3) \quad \Pi = \frac{\rho g}{2} \iint \eta^2 dx dy.$$

Здесь η — возвышение от спокойного уровня кусочно-линейной свободной поверхности дискретной среды. Ясно, что при таком определении потенциальная энергия зависит только от координат поверхностных частиц (причем вид этой функции выписывается явно) и что минимум потенциальной энергии, т. е. устойчивое равновесие слоя, достигается при $\eta = 0$ для любой сетки.

Таким образом, в качестве модели исходной задачи получается конечная система материальных частиц с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + w_\alpha^2),$$

потенциальной энергией (1.3) и голономными связями (1.1), движение которой описывается классическими уравнениями Лагранжа. В силу условия непротекания частицы, лежащие на дне и на стенке, имеют в отличие от внутренних только две степени свободы в плоскости соответственно дна и стенки.

Вводя для всех частиц обобщенные координаты q_n , которые для внутренних частиц совпадают с декартовыми, лагранжиан системы можно записать как

$$L = \frac{1}{2} \sum_n m_n \dot{q}_n^2 - \Pi + \sum_\alpha \lambda_\alpha (V_\alpha - V_\alpha^0),$$

где λ_α — множители Лагранжа. Уравнения Лагранжа имеют вид

$$(1.4) \quad m_n \dot{v}_n = \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial V_\alpha}{\partial q_n} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_n}, \quad \dot{q}_n = v_n, \quad V_\alpha = V_\alpha^0.$$

Заметим, что в силу соответствующих теорем классической механики система (1.4) при любом количестве степеней свободы сохраняет полную энергию $H = T + \Pi = \text{const}$. Далее, в отсутствие жестких стенок и при $g = 0$ система обладает также законами сохранения импульса и момента импульса в силу инвариантности связей (1.1) относительно пространственного сдвига и вращения. Сохранение суммарного объема жидкости гарантируется условиями (1.1).

Из описанного выше способа введения ячеек видно, что узлы сетки неравноправны. Так, светлые узлы (рис. 1, а) при своем движении изменяют объем одного тетраэдра в каждой ячейке, в то время как темные — четырех. Поэтому в расчетах использовалась симметризация условия несжимаемости — темные и светлые узлы на каждом шаге по времени меняются ролями.

2. Дискретная модель мелкой воды. Эта модель является обобщением на пространственный случай одномерной нелинейно-дисперсионной модели

мелкой воды [9]. В отличие от п. 1 здесь сетка состоит из одного слоя ячеек по глубине. Каждая ячейка V_α , $\alpha = (i, j)$, представляет собой объединение двух треугольных призм с перпендикулярными дну боковыми гранями (рис. 1, б). Лагранжевы частицы, служащие одновременно вершинами ячеек, расположены только на свободной поверхности. Основное предположение заключается в том, что горизонтальные компоненты скорости жидкости не зависят от глубины, тогда в силу уравнения неразрывности вертикальная скорость линейно изменяется от нуля на дне до некоторого значения на свободной поверхности. В этом случае кинетическую энергию дискретной системы можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (u_{\alpha}^2 + v_{\alpha}^2 + \frac{1}{3} w_{\alpha}^2),$$

где $m_{\alpha} = \frac{\rho}{4} \sum_{\beta \in N_{\alpha}} V_{\beta}$, а множитель $1/3$ появляется вследствие интегрирования линейной функции по z . Условие несжимаемости имеет тот же вид (1.1), хотя зависимость V_{α} от координат частиц, естественно, уже другая. Введение потенциальной энергии, постановка граничных условий на жестких стенках и симметризация схемы производятся здесь точно так же, как в п. 1. Уравнения Лагранжа отличаются от (1.4) только наличием множителя $1/3$ при \dot{w}_{α} . Для одномерной дискретной модели мелкой воды [9] показано, что в случае ровного дна она фактически представляет собой полностью консервативную аппроксимацию уравнений Green — Naghdi [10] в лагранжевых координатах. Для приведенной здесь двумерной модели можно показать, что для ровного дна она представляет собой полностью консервативную схему расщепления для тех же уравнений, причем законы сохранения выполняются на каждом полушаге. В дальнейшем дискретные модели пп. 1, 2 будем обозначать как модели 1 и 2. Для численной реализации этих моделей использовался алгоритм [11].

3. Результаты расчетов. Все приведенные ниже расчеты проводились для значений глубины $H = 1$, плотности $\rho = 1$, ускорения $g = 1$, что эквивалентно введению безразмерных переменных с помощью масштабов H, \sqrt{gH}, ρ , при этом число Фруда $Fr = 1$. Прежде всего обе модели были опробованы на задаче о бегущем над ровным дном солитоне. Расчеты показали, что здесь, как и в случае дискретных моделей меньшей размерности, даже на достаточно грубой сетке реализуются уединенные волны, которые в силу консервативности дискретной модели и численного алгоритма распространяются с постоянными средними амплитудой, энергией и фазовой скоростью. Амплитуда волны определялась с помощью квадратичной интерполяции по трем соседним частицам, а средняя фазовая скорость — по расстоянию, проходимому волной за $\Delta t = 20$. Для солитона амплитуды $a = 0,2$ на сетке с размерами ячеек $h_1 = h_2 = 1, h_3 = 0,5$ (для модели 1) при шаге по времени $\tau = 0,5$ форма установившегося солитона и его средняя фазовая скорость отличаются от соответствующих величин для классического солитона Рэлея не более чем на 3 и 0,1 % (для модели 1), 0,5 и 0,03 % (для модели 2). Небольшие колебания мгновенных значений амплитуды и фазовой скорости, связанные с дискретным представлением волны, не превышают 1 % и не имеют тенденции к росту. В дальнейших расчетах значения пространственных и временных шагов выбирались близкими к приведенным выше.

В качестве следующего этапа моделировался эксперимент [3], в котором изучалась начальная стадия отражения уединенных волн от косої стенки. В эксперименте эта стенка примыкала под изменяемым углом к боковой стенке бассейна на некотором расстоянии от волнопродуктора. Ось x направлена вдоль косої стенки, $x = 0$ соответствует точке излома. В численных расчетах была повторена схема эксперимента в части, касающейся геометрии бассейна (кроме начального участка с волнопродуктором), расстановки датчиков уровня жидкости и обработки результатов. Отличие заключалось только в генерации начальной волны, которая здесь просто задавалась на входном участке в качестве начальных данных из приближенного решения [12]. Ниже приводятся результаты сравнения расчетных и экспериментальных данных.

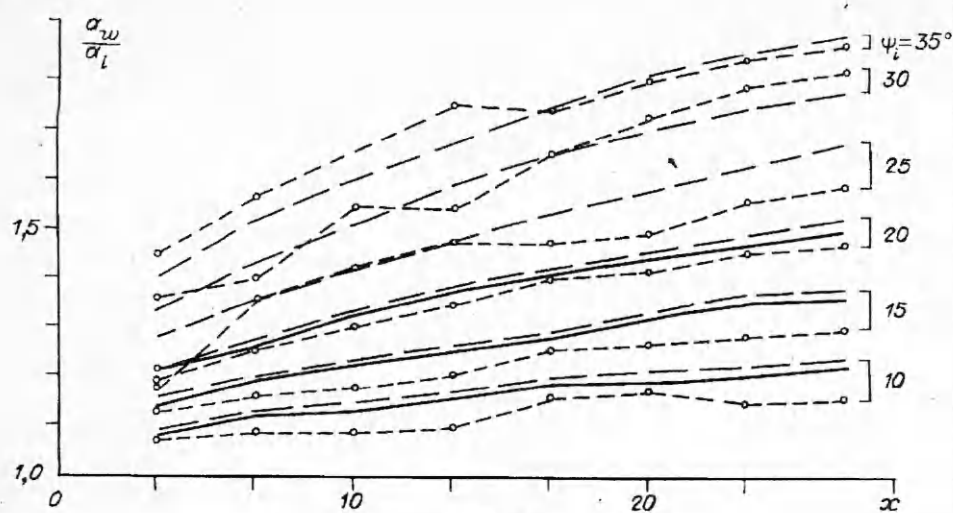


Рис. 2

На рис. 2 представлены зависимости амплитуды волны на стенке a_w , отнесенной к амплитуде падающей волны a_i , от x для $a_i = 0,1$ и различных углов падения волны ψ_i . На рис. 2—4 точки, соединенные короткими штрихами, — эксперимент, сплошные и штриховые линии — модель 1 и 2. Здесь и далее под углом падения ψ_i и углом отражения ψ_r понимается угол между волновым вектором соответствующей волны и нормалью к стенке. Видно, что количественное отличие составляет не более 7%, хотя для малых углов расчетные значения амплитуды оказываются систематически больше экспериментальных. С целью дополнительной проверки точности вычислений были проведены расчеты по модели 2 при $\psi_i = 10$ и 35° на вдвое более мелкой сетке (153×53 узла вместо 77×27) и с вдвое меньшим шагом по времени

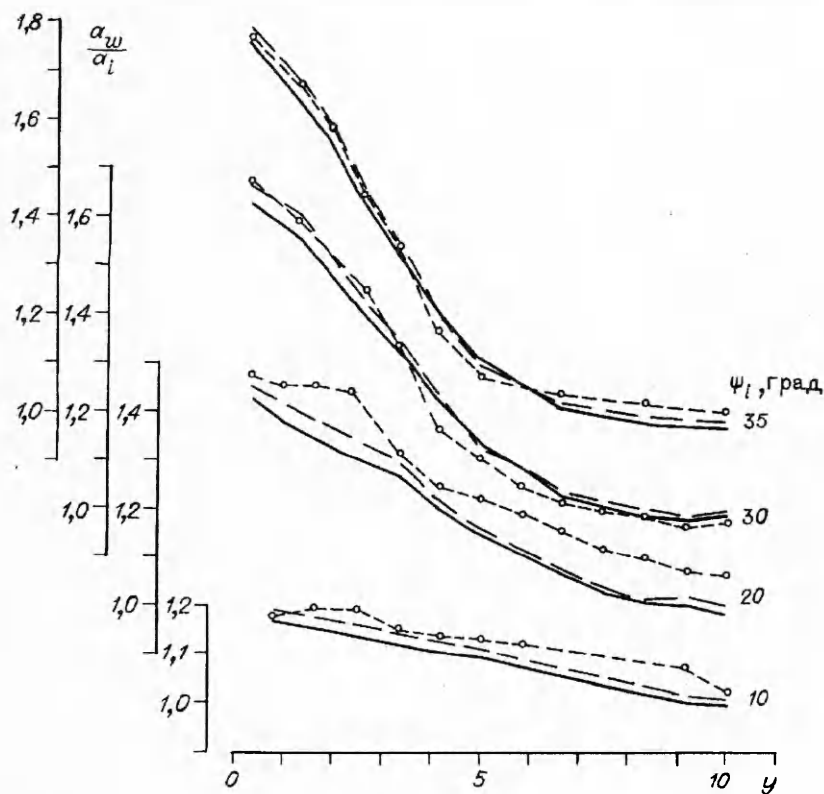


Рис. 3

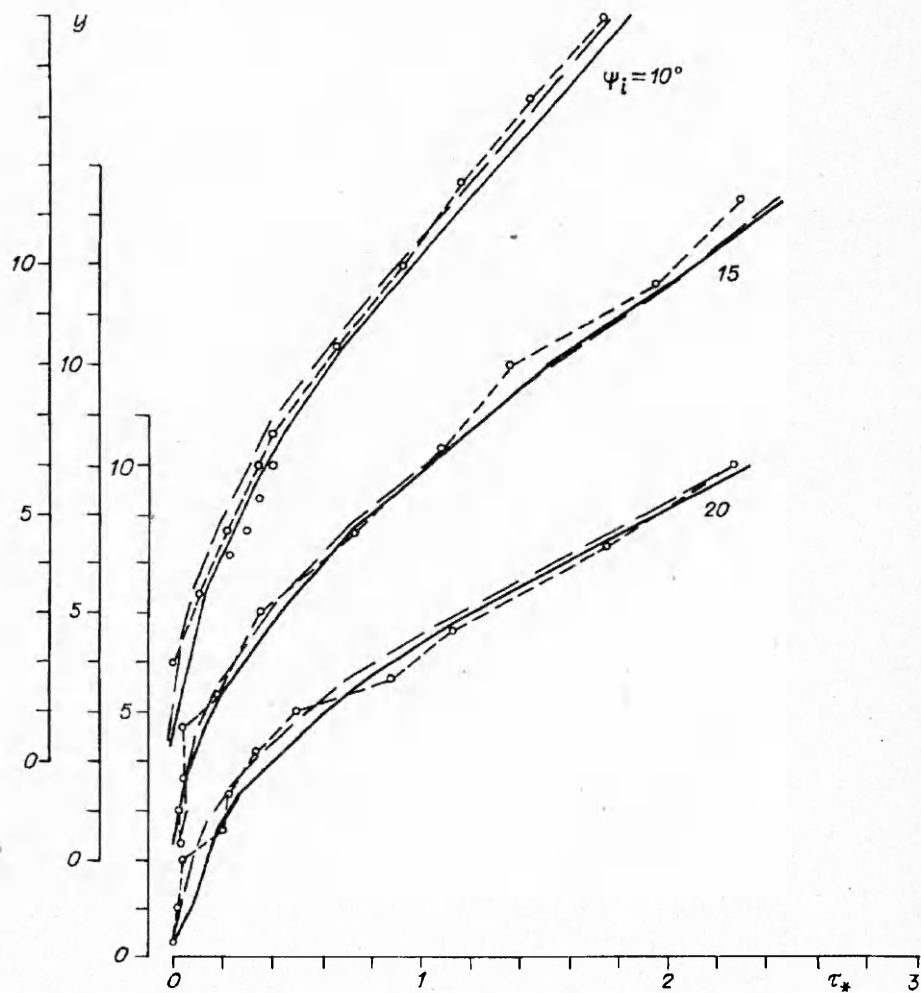


Рис. 4

($\tau = 0,25$). Полученные при этом зависимости отличались от приведенных расчетных менее чем на 1 %. На рис. 3 для $a_i = 0,15$ представлены зависимости от y максимального возвышения свободной поверхности, отнесенного к a_i , построенные по показаниям неподвижных датчиков, расположенных на прямой, перпендикулярной стенке, при $x = 16,7$. Видно, что при $\psi_i = 30$ и 35° совпадение расчетов и экспериментов очень хорошее, при малых углах отличие доходит до 10 %. Заметим, что при малых углах экспериментальные профили почему-то имеют негладкую форму. В [3] это никак не комментируется, хотя разрешение датчиков на порядок выше масштаба данных флуктуаций. На рис. 4 приведены зависимости, характеризующие форму возникающей при отражении конфигурации волн. В расчетах, как и в эксперименте, гирлянда датчиков уровня расположена на прямой, перпендикулярной стенке, при $x = 23,3$. Через τ_* обозначена разница во времени между прохождением гребня волны через датчик с координатой y_i и датчик на стенке при $y_0 = 0$. Здесь, следуя [3], τ_* определяли с помощью корреляционной функции

$$R_i(\tau) = \sum_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} \eta_0(t) \eta_i(t + \tau), \quad R_i(\tau_*) = \max_{\tau} R_i(\tau),$$

где $\eta_0(t)$, $\eta_i(t)$ — записи уровня на соответствующих датчиках; $t_0 = \arg \max_t \eta_0(t)$; размер окна $T = 3,65$. Экспериментальные точки приведены для $a_i = 0,15$ при трех значениях ψ_i . В целом можно констатировать, что

результаты расчетов по обеим моделям удовлетворительно согласуются между собой и с результатами экспериментов.

Следующая большая серия расчетов посвящена изучению эволюции конфигурации волн во времени вплоть до установления. При этом, как вытекает из теории [2] и численных расчетов, в случае регулярного отражения существует действительно стационарная V-образная конфигурация, движущаяся вдоль стенки с постоянной скоростью. Для тройной конфигурации Маха выход на стационар имеет место только для угла отражения ψ_r и амплитуд волн, длина ножки Маха со временем продолжает расти. Время установления изменяется от нескольких десятков безразмерных единиц для регулярного отражения до тысячи и более для тройной конфигурации. Поэтому в расчетах использовалась подвижная расчетная область в виде параллелограмма, которая смещалась вдоль стенки вслед за волной, а начальные данные ставились в виде уединенной волны, падающей на косую стенку. На рис. 5 приведен пример развития во времени тройной конфигурации для волны с амплитудой $a_i = 0,3$ при $\psi_i = 20^\circ$. Здесь на стенке ставилось условие непротекания, на части верхней границы задавалась бегущая уединенная волна из параллельного решения задачи на единицу меньшей размерности, а на остальных границах не ставилось никаких дополнительных условий, что с точки зрения уравнений гидродинамики соответствует границе с заданным гидростатическим давлением.

Расчеты проводились на неравномерных сетках от $50 \times 41 \times 3$ (модель 1) до 131×131 (модель 2) узлов. Размеры расчетной области в зависимости от типа модели и параметров задачи выбирались от 48×104 до 197×220 единиц. Время расчета одного варианта до установления составляло от 2 до 20 ч на РС АТ 386/33. Амплитуда падающей волны изменялась в основном от 0,1 до 0,3. Для сравнения с результатами [4] были также проведены два расчета при $a_i = 0,05$. Большие амплитуды не рассматривались, так как даже для $a_i = 0,3$ при некоторых углах падения амплитуда ножки Маха значительно превышает критическую высоту для уединенной волны 0,83, что по идее должно в реальности приводить к ее обрушению. Аккуратный расчет волн с амплитудой, меньшей, чем 0,05, требует слишком большой расчетной области, растет также время установления, так что общее время счета вырастает до неприемлемых величин.

Основная задача в этой серии — выяснение зависимостей для амплитуды волны на стенке a_w , амплитуды отраженной волны a_r и угла отражения ψ_r от амплитуды падающей волны a_i и угла падения ψ_i . На рис. 6 приведены рассчитанные зависимости ψ_r от ψ_i . Для модели 1 $a_i = 0,097; 0,186$ (точки 1, 2). Для модели 2 $a_i = 0,05; 0,097; 0,186; 0,3$ (точки 3—6). Точками 7 приведены результаты расчетов [4] для $a_i = 0,05$. Штриховыми линиями для каждого из рассмотренных значений a_i изображены теоретические зависимости Майлса [2]:

$$\psi_r = \begin{cases} \sqrt{3a_i} & \text{для } \psi_i < \sqrt{3a_i}, \\ \psi_i & \text{для } \psi_i \geq \sqrt{3a_i}. \end{cases}$$

Видно, что при $a_i = 0,05$ два расчета по модели 2, представляющие оба типа отражения, хорошо совпадают с результатами [4] и все вместе неплохо согласуются с теорией Майлса. При больших амплитудах теория дает завышенное значение угла отражения, хотя и для $a_i = 0,097$ теоретическая оценка угла отражения еще вполне приемлема. Более сильная нелинейность приводит также к характерной немонотонной зависимости угла отражения от угла падения. При этом минимумы кривых отвечают тройной конфигурации с максимальной амплитудой ножки Маха (рис. 7).

На рис. 7 представлены рассчитанные зависимости амплитуд отраженной волны a_r и ножки Маха на стенке a_w , отнесенные к a_i , в зависимости от переменной $\psi_i/\sqrt{3a_i}$. Здесь также приведены результаты из [4] при $a_i = 0,05$

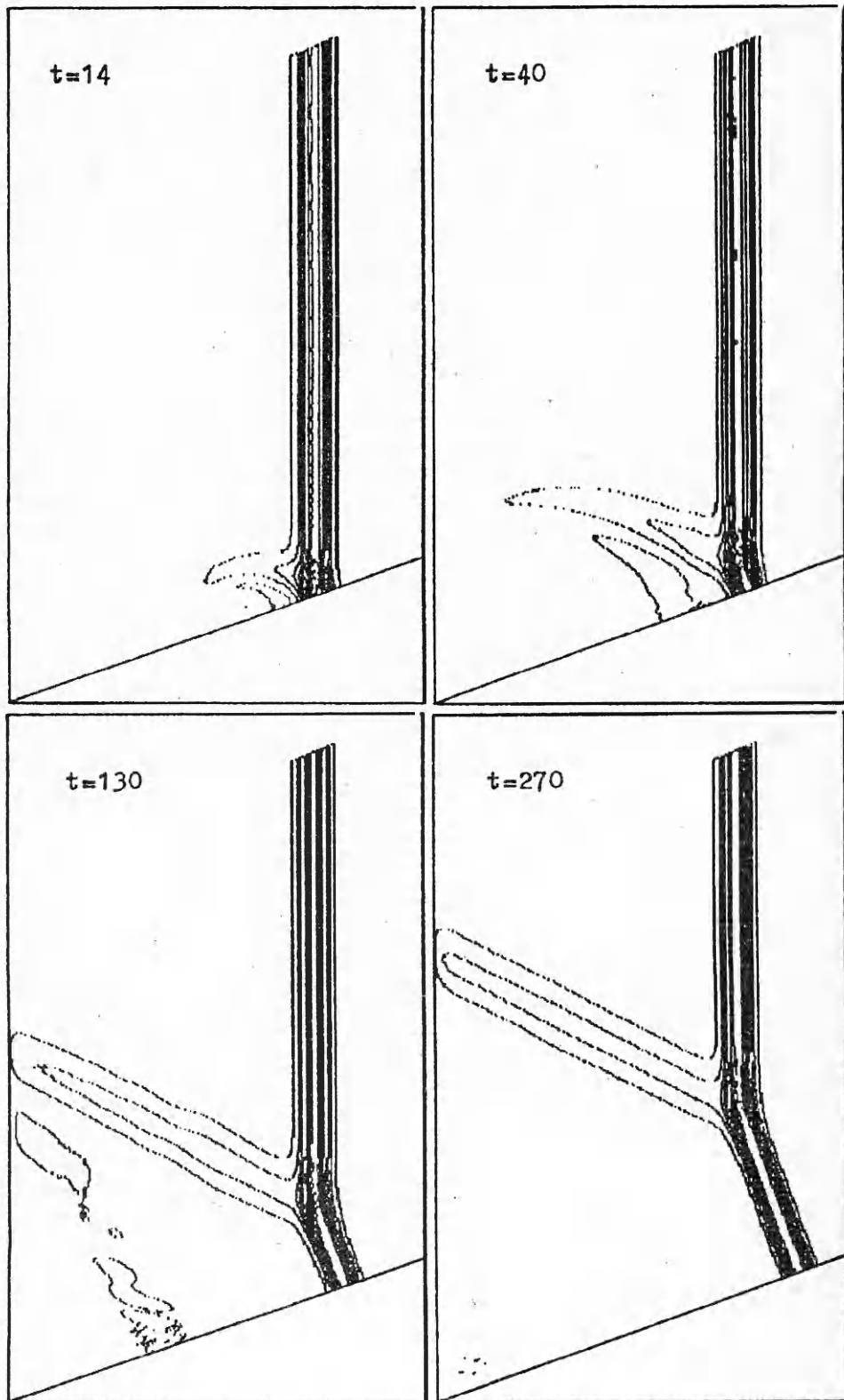


Рис. 5

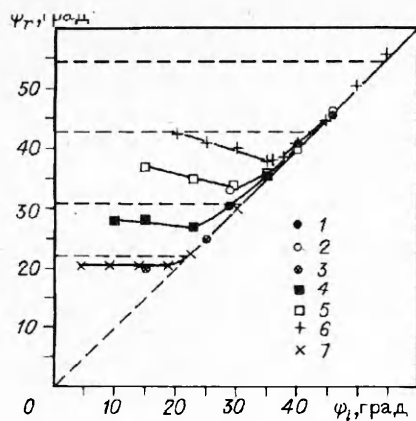


Рис. 6

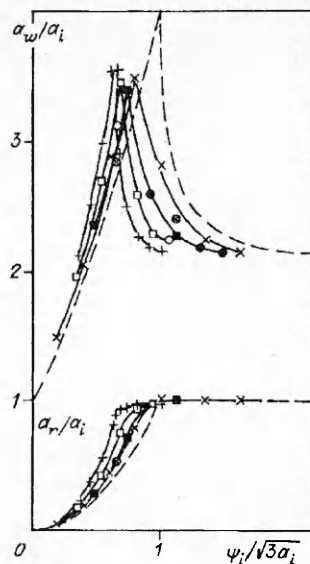


Рис. 7

и результаты теории [2], которая в этих переменных дает универсальные зависимости (штриховые линии). Обозначения те же, что и на рис. 6. Из рис. 7 видно, что увеличение нелинейности приводит к заметному количественному отклонению от универсальных зависимостей Майлса, но качественный характер остается. Наиболее интересен здесь эффект резонансного усиления амплитуды волны на стенке, которая в расчетах достигает значения $3,5a_i$. Следует отметить, что, поскольку пики очень острые, не исключено, что при малых амплитудах в расчетах получены не самые большие значения. Тем не менее значение $3,5a_i$ существенно превышает величину максимального заплеска волны при обычном накате на вертикальную стенку под прямым углом, которая для рассматриваемых значений амплитуд, как известно, практически совпадает с результатом линейной теории $2a_i$. В экспериментах Перрауда (см. [3, 6]) для тройных конфигураций отношение a_w/a_i не превышало 2. В [3] отмечается, что в этих экспериментах явно присутствуют капиллярные эффекты, а также обрушение волн. Другой причиной отсутствия наблюдения такого эффекта наиболее вероятно служит то обстоятельство, что, судя по настоящим расчетам, тройная конфигурация с максимальной амплитудой ножи Маха устанавливается дольше всех остальных и это время в зависимости от амплитуды составляет 500 и более безразмерных единиц. За такое время падающая волна проходит более 500 глубин, что вряд ли возможно реализовать в лабораторных условиях. Более того, в данных расчетах минимальное время установления параметров тройной конфигурации было около 200 при $a_i = 0,3$, $\psi_i = 20^\circ$ (см. рис. 5), так что получить в лабораторном эксперименте полностью установившуюся тройную конфигурацию, по-видимому, вообще проблематично. С другой стороны, в натуральных условиях такое соотношение масштабов вполне реально, так что предсказанный в [2] эффект резонансного усиления при накате волны на берег под углом может иметь и практический интерес, скажем, в связи с волнами цунами.

Некоторое качественное отличие приведенных результатов от асимптотической теории [2] заключается в том, что при увеличении угла ψ_i после прохождения пика кривой на рис. 7 конфигурация волн хотя и не развивается со временем в тройную, но остается еще слегка несимметричной и лишь при дальнейшем увеличении ψ_i переходит в симметричную. Как видно из рис. 6, 7, угол отражения ψ_r в этих случаях на $1-2^\circ$ превышает ψ_i , а амплитуда отраженной волны несколько меньше a_i .

Зависимость амплитуды отраженной волны a_r от угла падения для тройной конфигурации также качественно, а при малых амплитудах и количественно близка к квадратичной зависимости Майлса $a_r = \psi_i^2/3$, хотя и с некоторым зависящим от амплитуды коэффициентом. Например, при $a_i = 0,3$ расчетные точки хорошо ложатся на кривую $a_r = 0,62\psi_i^2$. Умень-

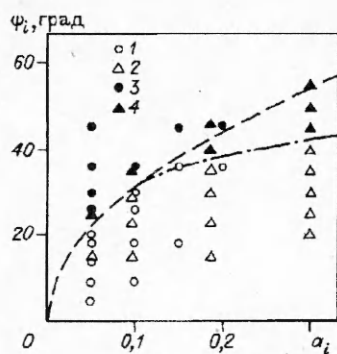


Рис. 8

шение амплитуды a , с уменьшением ψ_i наблюдалось и в экспериментах Перрауда.

Наконец, на рис. 8 представлена диаграмма в плоскости параметров a_i , ψ_i из [4], дополненная настоящими расчетами. Здесь точки 1, 2 соответствуют нерегулярному отражению, 3, 4 — регулярному (точки 1, 3 — [4], 2, 4 — настоящая работа). В данной работе отражение считалось нерегулярным, если установившееся значение a , было меньше $0,95a_c$. Штриховой линией приведена теоретическая кривая [2] для критического угла, разделяющего два типа отражения $\psi_i^* = \sqrt{3a_i}$. Видно, что для амплитуд $a_i < 0,1$ совпадение с теорией

хорошее. При больших a_i штрихпунктирная кривая отвечает результатам расчетов. Эта зависимость растет существенно медленнее квадратного корня и для умеренных амплитуд дает величины критического угла, похожие на приведенные в [6] экспериментальные данные Чена и Перрауда, в которых были получены значения 40 и 45° соответственно, причем у Перрауда эта оценка не зависела от a_i .

Приведенные результаты численных экспериментов помимо подтверждения факта существования тройных конфигураций в случае существенно нелинейных уравнений, а также выявления некоторых количественных зависимостей являются, как нам кажется, дополнительными аргументами в пользу применимости асимптотической теории [2] к описанию маховского отражения уединенных волн при небольших амплитудах. Сомнения на этот счет высказывались, в частности, в [3]. Главный аргумент — отсутствие в экспериментах резонансного усиления амплитуды волны на стенке. В настоящей работе получено неплохое согласие с результатами экспериментов [3]. Как видно из рис. 2, зависимость a_w от ψ_i при фиксированном значении x в расчетах тоже монотонно возрастающая, однако, как следует из результатов расчетов, это свидетельствует только о малости рассматриваемых времен. Резонансное усиление проявляется существенно позже, и для его наблюдения размеры экспериментального бассейна надо увеличить на порядок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Perroud P. H. The solitary wave reflection along a straight vertical wall at oblique incidence // PhD thes. — Berkeley: Univ. Calif., 1957.
2. Miles J. W. Resonantly interacting solitary waves // J. Fluid Mech. — 1977. — V. 79, pt 1.
3. Melville W. K. On the Mach reflexion of a solitary wave // J. Fluid Mech. — 1980. — V. 98, pt 2.
4. Funakoshi M. Reflexion of obliquely incident solitary waves // J. Phys. Soc. Japan. — 1980. — V. 49, N 6.
5. Хакимзянов Г. С. О численном моделировании на адаптивных сетках трехмерных течений жидкости с поверхностными волнами // Тр. Всесоюз. совещ. по числ. мет. в задачах волновой гидродинамики. — Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1991.
6. Wiegel R. L. Oceanographical engineering. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.
7. Исаев В. Г., Карев В. Ю., Компаниец Л. А. и др. Численное моделирование в задачах волновой гидродинамики. — Красноярск, 1990. — (Препр./ВЦ СО АН СССР; № 1).
8. Франк А. М. Численное моделирование уединенных поверхностных волн в рамках дискретной модели несжимаемой жидкости // ПМТФ. — 1989. — № 3.
9. Frank A. M. Discrete shallow water model // Intern. Workshop «Lab. modelling of dynamic proc. in ocean», Vladivostok, 1991: Abstrs. — Vladivostok, 1991.
10. Green A. E., Naghdí P. M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // J. Fluid Mech. — 1976. — V. 78. — P. 237—246.
11. Франк А. М. Полностью консервативный численный алгоритм для дискретных моделей несжимаемой жидкости // Моделирование в механике. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР; ИТПМ СО АН СССР. — 1987. — Т. 1(18), № 5.
12. Овсянников Л. В. Параметры кноидальных волн // Проблемы математики и механики. — Новосибирск: Наука, 1983.

г. Красноярск

Поступила 24/VIII 1992 г.