

А. Г. Бершадский

## КАСКАДНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ФРАКТАЛЫ В ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Идея однородности сейчас уступает место менее ограничительному предположению о фрактальном самоподобии (см., например, [1—4]). Каскадные модели, которыми с успехом пользовались при изучении однородной турбулентности, могут быть полезными и при изучении фрактальной. С другой стороны, учет фрактальной структуры реальной турбулентности позволяет сделать эти каскадные модели более адекватными. В настоящее время накоплен большой экспериментальный материал, который нуждается в упорядочении и осмыслении. В данной работе рассмотрены некоторые аспекты протекания каскадных процессов с учетом фрактальной структуры турбулентности. Во-первых, устанавливается связь между видом спектральной плотности энергии на скайлинговом интервале масштабов и фрактальной размерностью поверхности гидродинамических полей. Эта связь имеет значение, в частности, для атмосферной турбулентности и подтверждается прямыми наблюдениями за атмосферными гидродинамическими полями, выполненными различными авторами. Аналогичное исследование проведено и для двумерной турбулентности, результаты расчетов в этой области подтверждаются сравнением с данными океанологических наблюдений. Во-вторых, с помощью учета фрактальной структуры устанавливается связь между постоянной в спектральном законе Колмогорова — Обухова и коэффициентом перемежаемости.

Представим, что при возникновении турбулентность имеет пятнистый характер, т. е. в нетурбулизованной области есть отдельные подобласти, занятые турбулизованной жидкостью [5] (о критериях различия этих подобластей см., например, [6]). Учитывая стремление жидких частиц в турбулентной жидкости к взаимному удалению [7, 8], можно ожидать, что эти области с течением времени будут в среднем расширяться. Более того, такое свойство жидких частиц в турбулентной жидкости должно вообще приводить к стремлению турбулентной части жидкости постоянно увеличивать суммарную площадь границы, отделяющей ее от жидкости нетурбулизованной. Является ли этот процесс неограниченным или может выйти на насыщение? Если установится автомодельная ситуация, то суммарная площадь поверхности, отделяющей турбулизованную жидкость от нетурбулизованной, будет стремиться к бесконечности, когда эта поверхность станет фракталом с фрактальной размерностью  $D_\sigma > 2$  (в трехмерном пространстве).

Введем плотность вероятности  $\rho(l)$ , чтобы встретить турбулизованную подобласть с характерным размером  $l$ . По определению плотности вероятности суммарная площадь раздела турбулизованных и нетурбулизованных областей в интервале самоподобия

$$(1) \quad S \sim \int_{\eta}^L \rho(l) l^2 dl,$$

где  $L$  и  $\eta$  — верхняя и нижняя границы интервала самоподобия. Если в этом интервале распределение  $\rho(l)$  степенное, т. е.

$$(2) \quad \rho(l) \sim l^{-x},$$

то из (1) получаем

$$(3) \quad S \sim \frac{L^{3-x}}{(3-x)} \left[ 1 - \left( \frac{\eta}{L} \right)^{3-x} \right].$$

Так как нас интересуют только значения степенных показателей, а соображения размерности не используются, то будем применять оценочную запись формул там, где это возможно, в целях упрощения записи. На точности определения показателей степеней это не скажется.

Обычно  $L \gg \eta$ . Поэтому при  $x < 3$

$$(4) \quad S \sim L^{3-x}/(3-x),$$

а при  $x > 3$

$$(5) \quad S \sim (L/\eta)^{x-3}/(x-3),$$

т. е. при  $x > 3$  в автомодельной асимптотике, когда  $\eta/L \rightarrow 0$ ,  $S \rightarrow \infty$ . Иными словами, суммарная площадь раздела турбулизованной и нетурбулизованной жидкости в интервале масштабов самоподобия при  $x > 3$  станет фрактальной. При распределении турбулизованных областей по масштабам вида (2) с  $x > 3$  будет формироваться (в интервале масштабов самоподобия) поверхностная фрактальная структура.

Нетрудно связать ее количественную характеристику — фрактальную размерность поверхности раздела  $D_\sigma$  — с распределением (2). С одной стороны, известна асимптотика фрактальных поверхностей

$$(6) \quad S \sim (L/\eta)^{D_\sigma - 2}$$

(в трехмерном пространстве), а с другой — из (5) вытекает

$$S \sim (L/\eta)^{x-3}$$

Следовательно,

$$(7) \quad x = D_\sigma + 1,$$

т. е. в интервале самоподобия распределение турбулизованных областей по их масштабам имеет вид

$$(8) \quad \rho(l) \sim l^{-(D_\sigma + 1)}.$$

По определению плотности вероятности  $\rho(l)$  суммарный объем, занимаемый турбулизованными подобластями с характерными размерами, лежащими в интервале самоподобия, дается формулой

$$(9) \quad V = \int_{\eta}^L \rho(l) l^3 dl.$$

Подставляя (8) в (9), получаем

$$(10) \quad V \sim L^{3-D_\sigma} [1 - (\eta/L)^{3-D_\sigma}].$$

Если в интервале самоподобия есть аддитивность суммарной энергии турбулизованной жидкости  $W$  по турбулизованным областям, то  $W \sim V$  и, значит,

$$(11) \quad W \sim L^{3-D_\sigma} [1 - (\eta/L)^{3-D_\sigma}].$$

С другой стороны, если в интервале самоподобия спектральная плотность энергии

$$(12) \quad E(k) \sim k^{-\alpha},$$

то

$$(13) \quad W \sim \int_{L^{-1}}^{\eta^{-1}} E(k) dk \sim L^{\alpha-1} [1 - (\eta/L)^{\alpha-1}].$$

Тогда из (11) и (12) находим

$$(14) \quad 4 - \alpha = D_\sigma.$$

Эта формула связывает скейлинговый показатель в спектральной плотности энергии с фрактальной размерностью поверхности раздела турбулизованной и нетурбулизованной жидкостей в интервале самоподобия.

Для  $\alpha$  наиболее известно значение  $5/3$  (закон Колмогорова — Обухова [7, 8]), для него из (14) имеем

$$(15) \quad D_\sigma = 7/3.$$

В ряде экспериментов измерялась фрактальная размерность поверхности полей облаков вплоть до размеров  $\sim 10^6$  км<sup>2</sup> (с очень большими значениями числа Рейнольдса [9]). В различных экспериментах, проводимых с помощью спутника в инфракрасной области спектра и радио-

локационных наблюдений,  $D_\sigma \approx 7/3$ . Это может служить как подтверждением изложенного выше, так и свидетельством выполнимости закона Колмогорова — Обухова ( $\alpha = 5/3$ ) в атмосферных процессах (см. (14)).

В последнее время интенсивно изучается двумерная турбулентность [10, 11], для которой формулы, связывающие  $D$  и  $\alpha$ , несколько изменяются. Если аддитивна энергия турбулентности, то аналогично тому, как была получена формула (14), находим

$$(16) \quad D_\sigma = 3 - \alpha.$$

Тогда при  $\alpha = 5/3$  для двумерной турбулентности граница раздела турбулизованной и нетурбулизованной жидкости имеет фрактальную размерность  $D_\sigma = 4/3$ . В экспериментах, проведенных в течении Курисио, наблюдалась именно такая фрактальная размерность [12]\*. В двумерной турбулентности большой интерес представляет также ситуация, когда аддитивность имеет место не для кинетической энергии, а для энтропии (среднего квадрата завихренности, в двумерном случае энтропия также является интегралом движения [10]).

Часть энтропии, сосредоточенная в масштабах, принадлежащих интервалу самоподобия:

$$(17) \quad \bar{\Omega}_* \sim \int_{L^{-1}}^{\eta^{-1}} k^2 E(k) dk \sim L^{\alpha-3} [1 - (\eta/L)^{\alpha-3}].$$

Если энтропия в этом интервале аддитивна, то

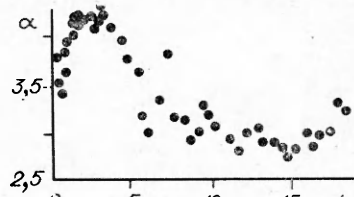
$$(18) \quad \bar{\Omega}_* \sim \int_{\eta}^L \rho(l) l^3 dl \sim L^{2-D_\sigma} [1 - (\eta/L)^{2-D_\sigma}].$$

Тогда из (17) и (18) получаем

$$(19) \quad D_\sigma = 5 - \alpha.$$

В двумерном случае  $1 \leq D_\sigma \leq 2$ . По мере развития турбулентности можно ожидать, что будет увеличиваться  $D_\sigma$  от 1 до 2, т. е. от максимальной гладкости до максимальной негладкости. Тогда из (19) выводим, что по мере развития двумерной турбулентности значение  $\alpha$  будет уменьшаться от 4 до 3 вслед за увеличением  $D_\sigma$  от 1 до 2. В этом смысле интересен численный эксперимент, описанный в [11]. Эволюция показателя в нем представлена на рисунке, взятом из [11]. Рассмотрим автомодельный процесс каскадного дробления вихрей [8, 13]. Некоторый ламинарный гидродинамически неустойчивый [8] вихрь, образовавшийся в результате дробления более крупномасштабного вихря (на промежуточной стадии такого процесса) будет сам распадаться на более мелкие вихри. При этом продолжается дробление масштаба с кратностью  $q$  [13]. Часть образовавшихся в результате такого дробления вихрей турбулизованы (они поэтому более устойчивы и не подвержены распаду). Остальные образовавшиеся ламинарные вихри неустойчивы и распадаются на более мелкие. У тех, в свою очередь, все повторяется снова и т. д., пока масштаб образующихся вихрей не станет достаточно мал, чтобы стабилизироваться молекулярной вязкостью. Эта схема в грубой форме учитывает перемежаемость, так как на любом этапе автомодельного каскада есть турбулизованные и ламинарные вихри (конкретный механизм турбулизации вихрей при распаде для дальнейшего несуществен).

Если кратность дробления масштаба  $q$ , то после первого дробления образуется примерно  $q^d$  вторичных вихрей ( $d$  — размерность пространства, в котором происходит процесс). Из них  $\gamma q^d$  вихрей турбулизованы



\* Выражаю благодарность А. Провенсале за информацию об экспериментах [12].

и устойчивы, а  $(1 - \gamma)q^d$  вихрей ламинарны и неустойчивы. Неустойчивые вихри распадаются с той же кратностью дробления масштаба  $q$  и с тем же коэффициентом перемежаемости  $\gamma$ . При этом образуется уже  $\gamma q^d(q^d - \gamma q^d)$  турбулизованных вихрей следующего порядка, аналогично  $\gamma q^d(q^d - \gamma q^d)^2$  турбулизованных вихрей следующего за этим порядка по каскаду и т. д. Вообще же масштабу  $l_n/L = q^{-n}$  ( $L$  — исходный масштаб длины) соответствует  $\gamma q^d(q^d - \gamma q^d)^{n-1}$  турбулизованных вихрей. Таким образом, устанавливается распределение турбулизованных вихрей по масштабу

$$(20) \quad N(l_n) \sim l_n^{-f},$$

где

$$(21) \quad f = \ln q^d(1 - \gamma)/\ln q.$$

Если перейти к непрерывному распределению ( $l_n \rightarrow l$ , а  $N(l_n) \rightarrow \rho(l)$ ), то

$$(22) \quad \rho(l) \sim l^{-f-1}.$$

Из (8), (21) и (22) получаем

$$(23) \quad D_\sigma = \ln q^d(1 - \gamma)/\ln q,$$

т. е. в данной модели оказались связанными  $D_\sigma$ ,  $q$  и  $\gamma$ . Если фиксированы  $D_\sigma$  и  $\gamma$ , то по формуле (23) может быть найдена кратность дробления масштаба этого каскадного процесса в виде

$$(24) \quad q = (1 - \gamma)^z.$$

Здесь

$$(25) \quad z = 1/(D_\sigma - d).$$

Формулы (24) и (25) могут оказаться полезными для выявления зависимости между постоянной  $c$  в спектральном законе Колмогорова — Обухова

$$(26) \quad E(k) = c \bar{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3}$$

и коэффициентом перемежаемости  $\gamma$ . В [13] получена связь между  $c$  и  $q$ :

$$(27) \quad c = q^{4/9} \frac{q^{2/2}}{(q^{2/3} - 1)} 3^{-2/3}.$$

Подставляя в (27) формулы (24), (25), находим

$$(28) \quad c = (1 - \gamma)^{4z/9} \frac{(1 - \gamma)^{2z/3}}{[(1 - \gamma)^{2z/3} - 1]} 3^{-2/3}.$$

Для случая, когда имеет место спектральный закон Колмогорова — Обухова, ранее получено  $D_\sigma = 7/3$  при  $d = 3$ . Подставляя эти значения в (28), имеем

$$(29) \quad c(\gamma) = 3^{-2/3} \gamma (1 - \gamma)^{2/3}.$$

Ясно, что эта формула не применима на краях интервала изменения  $\gamma$ , т. е. вблизи  $\gamma = 0$  и  $\gamma = 1$ . Однако при наличии минимума  $c = 1,48$  при  $\gamma = 0,6$  функция (29) возрастает на интервале  $0,4 < \gamma < 0,8$  всего на 15 %, т. е. на интервале  $0,4 < \gamma < 0,8$  связь (29) может оказаться работоспособной. А так как  $c$  и  $\gamma$  — измеряемые величины, то (29) на указанном интервале может быть проверена экспериментально. Отметим, что измерения зависимости  $c(\gamma)$  в пограничном слое, следах и струях не подходят для проверки (29), так как в них существенна перемежаемость, связанная с «внешней» границей турбулентности (см., например, [14]). А вот измерения в атмосфере и океане были бы весьма интересны для проверки (29).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фракталы в физике // Тр. VI Междунар. симпоз. по фракталам в физике/Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти.— М.: Мир, 1988.
2. Procaccia I. Fractal structures in turbulence // J. Statist. Phys.— 1984.— V. 36, N 5—6.
3. Бершадский А. Г. Фрактальная структура турбулентных вихрей // ЖЭТФ.— 1989.— Т. 96, вып. 2.
4. Levich E., Tsinober A. On dynamical fractal models of homogeneous turbulence // Phys. Lett.— 1984.— V. A101, N 5—6.
5. Бершадский А. Г. О затухании турбулентности во вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1988.— Т. 24, № 4.
6. Townsend A. A. The mechanism of entrainment in free turbulent flows // J. Fluid Mech.— 1966.— V. 26, N 4.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.— М.: Наука, 1988.
8. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1967.— Т. 2.
9. Рис Ф., Вальдфогель А. Анализ фрактальной размерности облаков с мощными конвективными токами // Фракталы в физике.— М.: Мир, 1988.
10. Мирабель А. П., Монин А. С. Двумерная турбулентность // Успехи механики.— 1979.— Т. 2, № 3.
11. Kida S. Numerical simulation of two-dimensional turbulence with high-symmetry // J. Phys. Soc. Jap.— 1985.— V. 54, N 8.
12. Osborne A. R., Kirwan A. D., Provenzale A., Bergamasco L. Fractal drifter trajectories in the Kuroshio extension // Tellus.— 1989.— V. 41A.
13. Гледзер Е. Б. О законе 2/3 теории турбулентности и оценке содержащейся в нем постоянной на основе редукции уравнений гидродинамики // ЖЭТФ.— 1986.— Т. 91, вып. 3.
14. Кузнецов В. Р., Прасковский А. А., Сабельников В. А. Локальная структура турбулентности в свободных течениях с сильной перемежаемостью // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 6.

г. Донецк

Поступила 5/1 1990 г.,  
в окончательном варианте — 3/VIII 1990 г.

УДК 532.55

М. А. Гольдштик, С. С. Дашин

### О ГИДРАВЛИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ВИХРЕВЫХ КАМЕР С ГАЗОЖИДКОСТНЫМ СЛОЕМ

Промышленное использование вихревых камер (ВК) сдерживается недостаточной изученностью ряда вопросов, к которым относится определение гидравлического сопротивления  $\Delta P_0$  ВК с газожидкостным слоем. В литературе данный вопрос неоднократно обсуждался. Так, в [1—3] предложены следующие соотношения для ВК с неподвижным корпусом при закрутке газожидкостного слоя газом:

$$(1) \quad \Delta P = 2\Delta P_0 / (\rho'' W''^2) = 1$$

( $\rho''$  — плотность газа,  $W''$  — скорость газа в щелях направляющего аппарата);

$$(2) \quad \Delta P = 0,8;$$

$$(3) \quad \Delta P = 23k$$

( $k = s\eta$ ,  $s$  — относительное проходное сечение,  $\eta = h/r_0$ ,  $h$  и  $r_0$  — высота и радиус направляющего аппарата).

Сопоставления значений гидравлических сопротивлений, рассчитанных по (1)—(3), с экспериментальными данными [1, 2] провести не удастся, так как там не указаны геометрические размеры ВК. В то же время эти значения отличаются от экспериментальных данных [3], как правило, в несколько раз.

Применительно к ВК с закруткой газожидкостного слоя газом и вращающимся корпусом в [4] даны соотношения для расчета гидравлического сопротивления газожидкостного слоя:

$$(4) \quad \Delta P_0 = 2\rho' g_+ h_0$$

( $\rho'$  — плотность жидкости,  $g_+ = v_0^2/r_0$  — центробежное ускорение слоя,  $r_0$  — радиус камеры,  $h_0$  — высота исходного слоя,  $v_0$  — скорость вращения слоя);

$$(5) \quad \text{EuFr} = 1700$$

( $\text{Eu} = \Delta P_0 / (\rho' v_0^2)$ ,  $\text{Fr} = v_0^2 / (g_+ h_0)$  — критерии Эйлера и Фруда). Из (5) получаем  $\Delta P_0 = 1700\rho' g_+ h_0$ , что противоречит (4).