УДК 541.24;539.4

В. А. Буряченко, А. М. Липанов

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОГО ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ

Изучение закономерностей течения нелинейно-вязких микронеоднородных сред позволяет прогнозировать по свойствам компонентов эффективные параметры течения эмульгированных жидкостей, суспензий, примесных смазок и других дисперсных систем. Рассматривается многокомпонентная вязкая среда, состоящая из однородной матрицы и случайного множества эллипсоидальных включений. Вычисление макроскопических реологических постоянных среды осуществляется с помощью варианта метода эффективного поля, предложенного в [1, 2] для решения широкого класса упругих задач структурной механики. Метод основан на асимптотически точном решении задачи бинарного взаимодействия включений, находящихся в эффективном поле, в предположении однородности напряжений внутри каждого включения. Решение задачи получено в предположении однородности внутри каждого компонента тензора, характеризующего нелинейные свойства материала.

1. Общие соотношения. Рассмотрим неограниченную неоднородную среду, составляющие которой описываются локальными в точке x реологическими уравнениями связи между тензорами напряжений σ и скоростей деформации ε:

$$\sigma = L(\varepsilon)\varepsilon \tag{1.1}$$

($L(\varepsilon)$ — тензор вязкости четвертого ранга, определяющий линейные и нелинейные реологические свойства материала). С помощью тензора L возможно описание механизма объемной вязкости и анизотропии компонентов.

Пусть матрица v_0 с характеристической функцией V_0 и тензором L_0 содержит случайное множество $X = (V_k, x_k, \omega_k)$ эллипсоидов v_k с характеристическими функциями V_k, центрами x_k, образующими пуассоновское точечное поле, полуосями $a_k^i \left(i = 1, 2, 3;\ a_k^1 \geqslant a_k^2 \geqslant a_k^3\right)$, совокупностью эйлеровых углов ω_k и тензорами $L_0+L_1^{(k)}$. Здесь и ниже предполагается, что все случайные величины статистически однородны и являются эргодическими полями и их математические ожидания совпадают с осреднениями по объемам компонентов X_α:

$$\langle(\cdot)\rangle_\alpha = (\operatorname{mes} v_\alpha)^{-1}\int(\cdot)\,V_\alpha(x)\,dx,\quad \langle(\cdot)\rangle = (\operatorname{mes} w)^{-1}\int(\cdot)\,W(x)\,dx\quad(\alpha = 0, 1, \ldots),$$

$w = \bigcup\limits_{\alpha=0} v_\alpha$, $W = \sum\limits_{\alpha=0} V_\alpha$, $\langle(\cdot)|x_1\rangle$ — условное среднее по ансамблю поля X при допущении, что в точке x_1 находится включение v_1.

Предполагается, что гидродинамика компонентов описывается уравнениями ползущего течения и между включениями существует лишь гидродинамическое взаимодействие. Броуновское движение включений не учитывается. Примем, что L определяется первым инвариантом скоростей деформаций $I_1 = \varepsilon_{ii}$ и вторым инвариантом девиатора скоростей деформаций $I_2 = э_{ij}э_{ij}$, $э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0\delta_{ij}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3$. В частности, для изотропных компонентов будем использовать $L = (3L^1, 2L^2) = 3L^1N_1 + 2L^2N_2$, $N_1 = \delta_{ij}\delta_{kl}/3$, $N_2 = (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl} - 2\delta_{ij}\delta_{kl}/3)/2$. При $L^1 = \infty$, $L^2 = \mathrm{const}$ имеет место несжимаемая ньютоновская жидкость, при $2L^2 = 2\mu_0^0(I_2)^{(n-1)/2}$ — степенная жидкость.

В общем случае система (1.1) нелинейна, и, чтобы воспользоваться известными методами линейной теории упругости [1, 2] для получения эффективных реологических законов, нелинейное уравнение необходимо линеаризовать, сделав дополнительные допущения.

Предположим, что $L(x)$ в пределах каждого компонента зависит от средних значений по компоненту функций инвариантов I_1, I_2. Подобное допущение принимается в большинстве работ по нелинейным задачам структурной механики [3, 4]. Тогда тензор $L(x)$ является кусочно-постоянным в области w, и при анализе микронеоднородной среды может быть использован развитый в линейной теории упругости метод эффективного поля. При принятых допущениях выражение для эффективной вязкости находится осреднением локального уравнения (1.1) [1, 2]:

$$\langle\sigma\rangle = L^* \langle\varepsilon\rangle, \quad L^* = L_0 + \sum_k \langle L_1^{(k)} \bar{B}_k V_k \rangle, \tag{1.2}$$

где постоянный тензор B_k описывает среднюю концентрацию скоростей деформации на k-м включении $\langle \varepsilon V_k \rangle_k = \bar{B}_k \langle \varepsilon \rangle$. Поскольку L_1 — при принятых допущениях кусочно-постоянная функция координат, то при оценке $\bar{B}_k$ можно воспользоваться известными методами преобразования уравнения равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$ к интегральному [1, 2]:

$$\varepsilon(x) = \langle\varepsilon\rangle + \int G(x-y)\{L_1(y)\,\varepsilon(y)\,V(y) - \langle L_1 \varepsilon(y)\,V(y)\rangle\}\,dy \tag{1.3}$$

$(G(x-y) = \nabla\nabla U(x-y)$ выражается через тензор Грина U уравнения равновесия однородной среды с параметрами L_0, $V(y) = W - V_0)$. Соотношение (1.3) формально аналогично полученным в [1, 2] для задач линейно-упругих композитных материалов с той разницей, что тензоры U, L_1, L_0 — функции заранее неизвестных скоростей деформаций компонентов. Поэтому в дальнейшем подробности вывода соотношений, аналогичных [1, 2], опущены.

Фиксируем произвольную реализацию множества X и рассмотрим включение с номером i. Обозначим через $\bar{\varepsilon}_i$ локальное внешнее поле, в котором находится i-е включение; из (1.3) найдем

$$\bar{\varepsilon}_i = \langle\varepsilon\rangle + \int G(x-y)\{L_1(y)\,\varepsilon(y)\,V(y;\,x) - \langle L_1 \varepsilon V\rangle\}\,dy \tag{1.4}$$

$(V(y;\,x) = V(y) - V_i(x))$. Для вычисления среднего $\langle\bar{\varepsilon}_i\rangle$ необходимо задаться структурой композита, которую опишем бинарной функцией распределения $\varphi(x_k,\ \omega_k | x_i,\ \omega_i)$ — вероятного расположения k-го включения во множестве X при фиксированном i-м включении. Поскольку включения не пересекаются, то $\varphi(x_k,\ \omega_k|x_i,\ \omega_i) = 0$ в окрестности v'_{ik} (с характеристической функцией V'_{ik}) области v_i. Не будем учитывать ближний порядок в расположении включений [5] и характерные для включений малого размера перколяционные эффекты, связанные с образованием каркасной структуры суспензии и резким возрастанием вязкости [6]. Для простоты примем, что v'_{ik} — шар радиуса $a_{ik} = a_k^1 + a_k^3$, а φ центрально-симметрична:

$$\varphi(x_k, \omega_k | x_i, \omega_i) = \psi(\omega_k)\psi_1(|r|)(\mathrm{mes}\ w)^{-1}. \tag{1.5}$$

Здесь $|r| = |x_i - x_k|$, $\psi_1(|r|) = 0$ при $r \in v'_i$ и $\psi_1(|r|) \to n_k$ при $|r| \to \infty$; n_k — счетная концентрация включений; $c_k \equiv \langle V_k\rangle = (4\pi/3)\langle a_k^1 a_k^2 a_k^3\rangle n_k$. Для определенности примем, что $x_i = 0$, и осредним (1.4) на множестве $X(\cdot\,|x_i, \omega_i)$:

$$\langle\bar{\varepsilon}_i\rangle = \langle\varepsilon\rangle + \int G(x-y)\{\langle L_1(y)\,\varepsilon(y)\,V(y;\,0)\,|\,0\rangle - \langle L_1 \varepsilon V\rangle\}\,dy. \tag{1.6}$$

2. Решение задачи для одного и двух включений. Для определения $\langle\bar{\varepsilon}_i\rangle$ в (1.6) рассмотрим сначала частную задачу об изолированном включении v_i в бесконечной матрице с заданным на бесконечности однородным полем $\varepsilon^0 = L_0^{-1}\sigma^0 = \mathrm{const}$. Поскольку L_0, $L_1 = \mathrm{const}$ в матрице и включении, то ε^0, согласно теореме о полиномиальной консервативности [7], однозначно определяет однородное поле скоростей деформаций внутри i-го включения:

$$\varepsilon_i(x) = A_i\varepsilon^0, \quad A_i = (I + P_i L_1^{(i)})^{-1}, \quad \sigma_i = \tag{2.1}$$
$$= \bar{B}_i\sigma^0, \quad \bar{B}_i = (L_0 + L_1^{(i)})\,A_i L_0^{-1}\sigma^0,$$

где $x \in v_i$ и постоянный тензор $P_i = -\int G(x-y)V_i(y)dy$ ($x \in v_i$ для рассматриваемого в данной работе изотропного L_0 известен [7]). Поскольку L_0, L_1 зависят от ε, то (2.1) можно решить, подобно [8], методом последовательных приближений. Как показали численные примеры, сходимость появляется через 5—7 итераций.

Для двух включений v_i, v_j в бесконечной матрице из (1.3) в предположении однородности полей ε^0 в окрестности каждого включения методом последовательных приближений получим [1]

(2.2) $$L_1(y_i)\varepsilon(y_i)\,\mathrm{mes}\,v_i = R_i J_{ij}\varepsilon^0, \quad SL_1(y_i)\varepsilon(y_i)\,\mathrm{mes}\,v_i = (J_{ij}-I)\varepsilon^0;$$

(2.3) $$J_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{1}(SR_jSR_i)^n(SR_j)^l,$$

$$S = (\mathrm{mes}\,v_i\,\mathrm{mes}\,v_j)^{-1}\int V_i(y)\,dy\int V_j(x)\,G(x-y)\,dx, \quad R_i = L_1(y_i)A_i\,\mathrm{mes}\,v_i.$$

Таким образом, включение v_i находится в однородном поле, зависящем от геометрических и реологических свойств рассматриваемого включения.

В дальнейшем нам понадобится оценка $\langle\langle J_{ij}\rangle\rangle_{ij}$ среднего значения тензора J_{ij} по ω_i, ω_j на сфере радиуса $|r| = |x_i - x_j|$ с центром в x_i. Заметим, что $S(|r|) \to G(|r|)$ при $|r| \to \infty$, поэтому примем точечное приближение включений $S(|r|) = G(|r|)$ [1, 2]. Для трех членов разложения (2.3) $\langle\langle J_{ij}\rangle\rangle_{ij} = I + J^0(|r|) \equiv I + \langle\langle SR_jSR_i\rangle\rangle_{ij}$. Для изотропной матрицы и равновероятной ориентации включений тензор J^0 оказывается изотропным:

$$J^0(|r|) = 3J_1^0N_1 + 2J_2^0N_2, \quad 3J_1^0 = 2\xi^2(3\bar{k}_j)(2\bar{\mu}_i)|r|^{-6},$$

$$2J_2^0 = (2/5)[\xi^2(3\bar{k}_i)(2\bar{\mu}_j) + (2\bar{\mu}_i)(2\bar{\mu}_j)(7\gamma^2 - \eta^2/4 + 2\xi\eta)]|r|^{-6},$$

$$\xi = (3k_0+4\mu_0)^{-1}, \ \eta = (3\mu_0)^{-1}, \ \gamma = (3k_0+4\mu_0)[3\mu_0(3k_0+4\mu_0)]^{-1},$$

$$(3\bar{k}_i, 2\bar{\mu}_i) = \int L_1(y_i)\,A_i\,d\omega_i\prod_{n=1}^{3}a_i^n, \quad L_0 = (3k_0, 2\mu_0).$$

3. Оценка эффективных реологических параметров L^*. При получении явного выражения для $\langle\bar{\varepsilon}_i\rangle$ из (1.6) примем гипотезы эффективного поля [1, 2], согласно которым i-е включение находится в однородном поле $\bar{\varepsilon}_i$, зависящем от геометрических и реологических свойств v_i, а также каждая пара включений v_i, v_j существует в однородном поле $\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\varepsilon} = \mathrm{const}$, не зависящем от свойств рассматриваемой пары. Тогда для вычисления условных средних в (1.6) воспользуемся соотношениями (2.1), (2.2) с тремя членами ряда и заменой в них $\varepsilon^0(x)$ на $\bar{\varepsilon}(x)$. Из (1.2), (1.6), (2.1) получим

(3.1) $$\langle\bar{\varepsilon}(x_i)\rangle = D\langle\varepsilon\rangle, \quad D = \left\{I(1-c) + \langle AV\rangle - \int\langle\langle J_{ij}(1-V_{ij}^0)\rangle\rangle_{ij}\,dx\right\}^{-1},$$

$$L^* = L_0 + \langle R\rangle D, \quad \bar{B}_k = A_kD.$$

До сих пор полагали, что L_0, L_1 известны, но по предположению зависят от неизвестных полей скоростей деформаций в компонентах. Поэтому сделаем ряд допущений. Пусть $L_i = L_{i0}g(I_1, I_2)$, где g — скалярная функция инвариантов I_1, I_2, и, подобно [3], примем гипотезу об отсутствии флуктуаций g не только в пределах компонента X_α, но и во всем объеме w: $g(I_1, I_2) = \mathrm{const}$. Тогда GL_1, A, GR_i, D — постоянные тензоры, не зависящие от скоростей деформаций, а задача оценки эффективных свойств среды линейна:

$$L^* = L_0^*g(I_1, I_2), \quad L_0^* = L_{00} + \sum_{i=1}^{N}L_{i0}A_iDc_i$$

(в качестве I_1, I_2 естественно принять инварианты тензора $\langle\varepsilon\rangle$).

Ослабим допущение об однородности функции, учитывающей нелинейные свойства среды, и будем считать, подобно [4], что L_0, L_1 определяются средними значениями инвариантов тензора ε в пределах рассматриваемого компонента. При этом в силу однородности полей ε_i внутри включений для второго инварианта примем приближенно $I_{2k} = \langle э_{ij} \rangle_k \langle э_{ij} \rangle_k$. Выражение для второго инварианта в матрице I_{20} находим с помощью очевидных соотношений

$$\langle V_k' \varepsilon' \rangle = c_k (\langle \varepsilon \rangle_k - \langle \varepsilon \rangle),$$
$$(1-c) \langle (L_0 \varepsilon) \varepsilon \rangle_0 = \langle L_0 \varepsilon \rangle \langle \varepsilon \rangle + \langle L_0 \varepsilon' \varepsilon' \rangle - \sum c_k \langle L_0 \varepsilon \rangle_k \langle \varepsilon \rangle_k$$

(штрихом отмечены флуктуации $q' = q - \langle q \rangle$). Тогда, учитывая, что при преобразовании объемного интеграла по первой формуле Грина значение поверхностного интеграла по ∂w, отнесенное к $\operatorname{mes} w$, стремится к нулю при $\operatorname{mes} w \to \infty$, имеем

$$\langle L_0 \varepsilon' \varepsilon' \rangle = - \sum c_k \langle L_1^{(k)} \varepsilon \rangle_k (\langle \varepsilon \rangle_k - \langle \varepsilon \rangle).$$

Таким образом, инварианты $I_{1\alpha}$, $I_{2\alpha}$ зависят только от однородных полей и могут быть выражены с помощью соотношений

$$I_{2k} = (N_2 A_k D \langle \varepsilon \rangle)(N_2 A_k D \langle \varepsilon \rangle), \tag{3.2}$$
$$I_{20} = (2\mu_0)^{-1} \{ [(L^* \langle \varepsilon \rangle) \langle \varepsilon \rangle - (\langle (L_0 + L_1) ADV \rangle \langle \varepsilon \rangle)(\langle A_k D \rangle \langle \varepsilon \rangle)] (1-c)^{-1} - 3^{-1} k_0 I_{10}^2 \},$$
$$I_{1k} = \delta A_k D \langle \varepsilon \rangle, \ I_{10} = \delta (I - \langle AV \rangle D) \langle \varepsilon \rangle / (1-c), \ \delta = \delta_{ij}.$$

При выводе (3.2) сделано допущение $\langle \varepsilon_{ii} \sigma_{jj} \rangle_0 = 3 k_0 I_{10}^2$, точное для несжимаемой матрицы. Поскольку в формулах (2.1), (3.1) A_k, D зависят от инвариантов $I_{1\alpha}$, $I_{2\alpha}$ ($\alpha = 0, 1, \ldots$), то в общем случае $I_{1\alpha}$, $I_{2\alpha}$ могут быть найдены методом последовательных приближений. Именно на нулевой итерации полагаем, что $I_{1\alpha} = \langle \varepsilon_{ii} \rangle$, $I_{2\alpha} = \langle э_{ij} \rangle \langle э_{ij} \rangle$, затем последовательно находим нулевое приближение для A_k, D, первое приближение для $I_{1\alpha}$, $I_{2\alpha}$, L_0, L_1, A_k, D и т. д.

4. Пример. Рассмотрим практически важные случаи, когда удается построить L^* в явном виде. Сюда относятся среды с абсолютно жесткими включениями и порами, когда I_{11}, $I_{21} = 0$ и $L_0 + L_1 = 0$.

Пусть жесткие шаровые включения одного размера находятся в несжимаемой матрице. Тогда

$$I_{20} = I_2(\langle \varepsilon \rangle)(1-c)^{-1} f(c), \tag{4.1}$$

где $f(c) = 1 + 5c(1 - 31c/16)^{-1}/2$, и, например, для степенной матрицы с $L_0^1 = \infty$, $2L_0^2 = 2\mu_0^0 (I_{20})^{(n-1)/2}$

$$L^* = \left(\infty,\ 2\mu_0^0 f(c)^{(n+1)/2} (1-c)^{(1-n)/2} (\langle э_{ij} \rangle \langle э_{ij} \rangle)^{(n-1)/2}\right). \tag{4.2}$$

Для ньютоновской жидкости $n = 1$ и (4.2) совпадает с аналогичным соотношением [2]. Сравним (4.2) с результатами исследований других авторов. В частности, из [3] вытекает

$$L^* = \left(\infty,\ 2\mu_0^0 f_1(c) (\langle э_{ij} \rangle \langle э_{ij} \rangle)^{(n-1)/2}\right) \tag{4.3}$$

($f_1(c) = 1 + 5c(1-c)^{-1}/2$). Выражение (4.3) в отличие от (4.2) противоречит соотношению $L^* = \left(\infty,\ 2\mu_0^0 f_2(n, c) (\langle э_{ij} \rangle \langle э_{ij} \rangle)^{(n-1)/2}\right)$, полученному в [9] методом анализа размерностей ($f_2(n, c)$ — функция, зависящая только от n и c). В [10] найдено выражение

$$L^* = \left(\infty,\ 2\mu_0^0 \left[\frac{(c/c_{\max})^{1/3}}{(1 - c/c_{\max})^{1/3}} \right]^{2n-1} (\langle э_{ij} \rangle \langle э_{ij} \rangle)^{(n-1)/2} \right),$$

приводящее к противоречивым результатам при $n < 0{,}5$ (вязкость падает с ростом c); $c_{\max}$ — максимальная степень упаковки включений для данного фракционного состава.

Проведем сравнение расчетных кривых $L^* = L^*(c, n)$ по разным методам с экспериментом [11, 12]. Для ньютоновской матрицы $n = 1$ в [2]

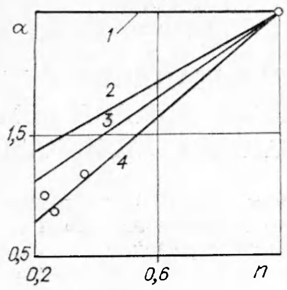

Рис. 1

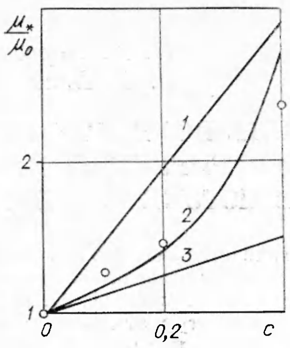

Рис. 2

приведено сравнение с экспериментом до $c = 0{,}43$; было показано, что расчетные оценки модуля сдвига по методу эффективного поля [1, 2] в 2 раза точнее по сравнению с теоретическими результатами других авторов. Рассмотрим противоположный случай $n \neq 1$, $c \to 0$. На рис. 1 представлены экспериментальные [12] и расчетные данные в координатах $\beta = [\mu^*/\mu_0 - 1]/c \sim n$. Кривые *1—4* рассчитаны по формулам (4.3), [13], (4.2) и [12] соответственно; соотношения работ [12, 13] получены в предположении бесконечной малости концентраций c. Формула (4.2), правомерная в широком диапазоне значений c, дает удовлетворительное совпадение с экспериментом. На рис. 2 показано сравнение экспериментальных данных [12] ($n = 0{,}41$) с расчетными кривыми *1—3* по методам [9], (4.2), [11].

Для шаровых пор одного размера в несжимаемой степенной матрице

$$L^* = 2\mu_0^0 [f_3 (1-c)^{-1} \langle \varepsilon_{ii} \rangle^2 + 2f_4 (1-c)^{-1} \langle э_{ij} \rangle \langle э_{ij} \rangle]^{(n-1)/2} (3f_3, 2f_4),$$

$$3f_3 = 2(1 - 29/24c)/c, \quad 2f_4 = (1 - 35/24c)(1 + 5/24c)^{-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Буряченко В. А., Липанов А. М.** Концентрация напряжений на эллипсоидальных включениях и эффективные термоупругие свойства композитных материалов // Прикл. механика.— 1986.— № 11.
2. **Буряченко В. А.** Корреляционная функция полей напряжений в матричных композитах // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 3.
3. **Игнатьев В. А., Сараев Л. А.** Прогнозирование эффективных параметров нелинейного течения реономных двухкомпонентных смесей // Теоретико-экспериментальный метод исследования ползучести в конструкциях.— Куйбышев: КАИ, 1984.
4. **Дудукаленко В. В., Лысач Н. Н.** О пластических свойствах материала, содержащего пластинчатые включения // Изв. АН СССР. МТТ.— 1980.— № 1.
5. **Головин А. М., Чижов В. Е.** К расчету бинарной коррелятивной функции в двухфазной системе // ПММ.— 1977.— Т. 41, вып. 6.
6. **Wildemuth C. R., Williams M. C.** A new interpretation of viscosity and yield stress in dense slurries coal of the irregular particles // Rheologica Acta.— 1985.— V. 24, N 11.
7. **Кунин И. Я., Соснина Э. Г.** Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной среде // ПММ.— 1973.— Т. 37, вып. 2.
8. **Маслов Б. П., Хорошун Л. П.** Эффективные характеристики упругих, физически нелинейных, неоднородных сред // Изв. АН СССР. МТТ.— 1977.— № 2.
9. **Иванов В. М.** Расчет сдвиговой вязкости концентрационной суспензии жестких сферических частиц в неньютоновской жидкости // Механика композит. материалов.— 1984.— № 5.
10. **Tanaka H., While J. L.** A cell model theory of the shear viscosity of a concentrated suspension of interacting spheres in non-newtonian fluid // J. non.-newt. Fluid Mech.— 1980.— N 4.
11. **Kremesec V. J., Slattery J. C.** The apperent stress-deformation of spheres in a power model fluid // J. Rheology.— 1977.— V. 21, N 4.
12. **Han C. D.** Rheological properties of calcium carbonate filled polypropylene melts // J. Appl. Pol. Sci.— 1974.— V. 18, N 3.
13. **Шмаков Ю. И., Шмакова Л. М.** Реологическое поведение суспензий жестких сферических частиц со степенной дисперсионной средой // Механика жидкости и газа.— Ташкент: Фан, 1980.

г. Москва

Поступила 24/III 1987 г., в окончательном варианте — 25/I 1988 г.