

## ТОЛЩИНА СЛОЯ СМАЗКИ И СОПРОТИВЛЕНИЕ КАЧЕНИЮ В УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КОНТАКТЕ ЦИЛИНДРОВ

*М. А. Галахов, К. И. Запаров, А. Г. Патраков*  
(Москва)

Известны формулы для вычисления средней толщины слоя смазки в упруго-гидродинамическом контакте цилиндров, полученные тремя различными способами: 1) методом [1], 2) численным решением уравнений упруго-гидродинамической теории смазки в областях входа и выхода и дальнейшим согласованием результатов с распределением давления в средней части контакта [2], 3) обработкой экспериментальных результатов. Обзор большинства известных формул и новые формулы третьей группы приведены в [3]. Вопрос о сопротивлении качению двух упругих цилиндров, разделенных слоем вязкой жидкости, сравнительно мало изучен.

В данной работе предложены формулы для средней и минимальной толщины слоя смазки, а также для сопротивления качению, полученные обработкой результатов прямого численного решения уравнений изотермической упруго-гидродинамической задачи.

1. Уравнения одномерной изотермической задачи упруго-гидродинамической теории смазки имеют вид [4]

$$(1.1) \quad \frac{d}{dx} \left[ h^3 \exp(-Qp) \frac{dp}{dx} \right] = \frac{V}{H_0^2} \frac{dh}{dx};$$

$$(1.2) \quad H_0(h-1) = x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(t) \ln \frac{c-t}{|t-x|} dt.$$

Граничные условия:

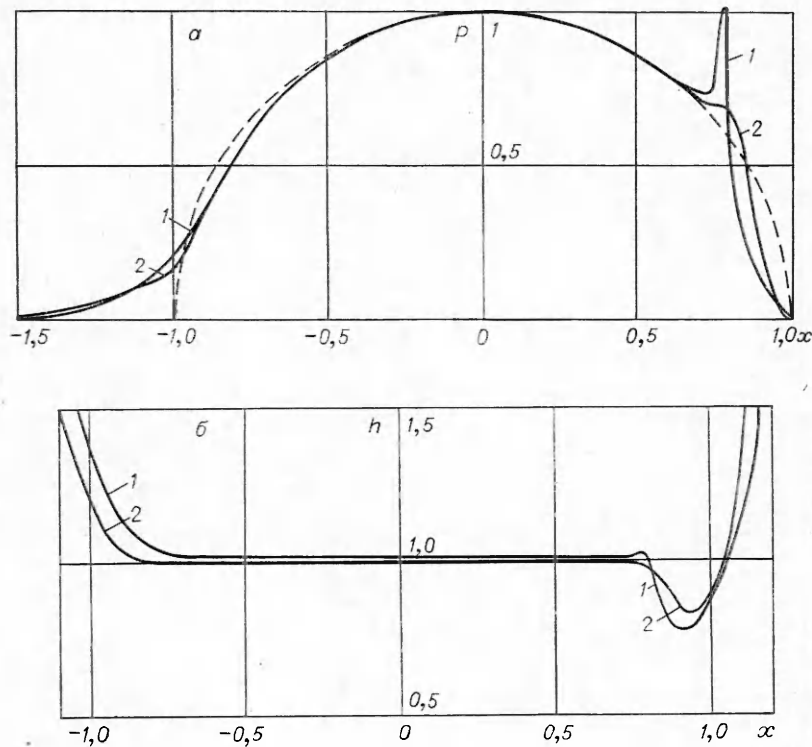
$$(1.3) \quad p(a) = p(c) = (dp/dx)(c) = 0.$$

Кроме того,

$$(1.4) \quad \int_a^c p(t) dt = \pi/2.$$

В (1.1)–(1.4)  $x$ ,  $t$ ,  $a$ ,  $c$  отнесены к полуширине герцева контакта  $b = [8qR/(\pi E')]^{1/2}$ ,  $q$  — нагрузка на единицу длины цилиндра,  $E' = E/(1-\nu^2)$ ,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  — радиусы цилиндров. Неизвестное контактное давление  $p(x) \geq 0$  отнесено к максимальному герцеву давлению  $p_0 = [qE'/2\pi R]^{1/2}$ , профиль зазора  $h(x) > 0$  — к толщине слоя смазки  $h_0 = h(c)$  на выходе из области контакта;  $H_0 = 2h_0R/b^2$ ;  $V = 3\pi^2[\mu_0(u_1 + u_2)/(2E'R)](E'R/q)^2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  — скорости поверхностей цилиндров,  $\mu_0$  — вязкость смазки при комнатном давлении;  $Q = \alpha p_0$ ,  $\alpha$  — пьезокоэффициент в формуле для вязкости  $\mu = \mu_0 \exp(\alpha \bar{p})$ ,  $\bar{p}$  — физическое давление,  $a$  и  $c$  — координаты начала и конца области положительного давления. Параметры  $H_0$  и  $c$  неизвестны и должны определяться в ходе решения из дополнительных условий (1.3), (1.4).

В [4] для решения (1.1)–(1.3) предложен численный метод, в котором используется сплайновая аппроксимация давления  $p(x)$ . Уравнения (1.1)–(1.3) при этом сводятся к системе нелинейных уравнений, которые



Ф и г 1

решаются методом Ньютона. Расчеты [4] показали эффективность метода.

При решении (1.1)–(1.3) в широком диапазоне изменения параметров  $V$ ,  $Q$  и  $a$  возникают трудности, связанные с большими затратами машинного времени. При числе узлов разностной сетки  $N = 90$  расчет одного варианта на БЭСМ-6 занимает около двух часов.

При  $Q \gg 1$  допустима линейризация уравнения (1.1) [5]

$$(1.5) \quad \frac{d}{dx} \left[ h_0^3(x) \exp(-Qp_0 \sqrt{1-x^2}) \frac{dp}{dx} \right] = \frac{V}{H_0^2} \frac{dh}{dx},$$

где  $h_0(x) = 1 + H_0^{-1} [ |x| \sqrt{x^2 - 1} - \ln(|x| + \sqrt{x^2 - 1}) ] \theta(x^2 - 1)$  ( $\theta$  — функция Хевисайда). Применение метода [4] к (1.5), (1.2), (1.3) приводит к системе линейных уравнений. Сопоставление решений (1.1)–(1.4) и (1.5), (1.2)–(1.4) для  $Q = 7,5$ ,  $V = 0,11$  дано на фиг. 1 ( $a$  — распределение давления,  $b$  — профиль зазора). Кривые 1 и 2 — решения нелинейной и линейной задач. Штриховая линия на фиг. 1,  $a$  соответствует герцеву распределению давления. В таблице приведено сравнение

$H_0$  и  $S = (2/\pi) \int_a^c p(x) x dx$ , полученных в результате решения нелинейной системы (1.1)–(1.4) (индекс 1) и линейризованной системы (1.5), (1.2)–(1.4) (индекс 2);  $H_{00}$  вычислено методом [1].

Видно, что для определения толщины слоя смазки можно с хорошей точностью пользоваться решением линейризованной системы. Ошибка в величине  $S$ , связанной с моментом сопротивления качению, может дос-

Q	V	H <sub>01</sub>	H <sub>02</sub>	H <sub>00</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>
3,9	0,17	0,261	0,276	0,188	0,05	0,052
7,5	0,11	0,252	0,258	0,221	0,034	0,029
7,24	0,076	0,203	0,200	0,165	0,032	0,028

тпгать 15%. Линеаризация уравнения (1.1) сохраняет основные особенности нелинейной задачи. Второй максимум давления появляется и в решении линейной задачи для  $Q \geq 10$  [4]. Расчет одного варианта (1.5), (1.2)—(1.4) при  $N = 90$  занимает на БЭСМ-6 10—15 мин.

Все дальнейшие результаты данной работы основаны на численном решении линеаризованной системы (1.5), (1.2)—(1.4).

2. Средняя толщина слоя смазки, представляющая большой интерес для приложений, мало отличается от  $h$  при  $x=c$  (см. фиг. 1,б).

На фиг. 2 треугольниками нанесены некоторые результаты решения (1.5), (1.2)—(1.4), сплошные линии получены аппроксимацией этих результатов, линия 1 соответствует  $Q = 5$ , линия 2 —  $Q = 10$ , линия 3 —  $Q = 20$ , штриховая линия — приближенный результат, полученный в [1]:  $H_0 = 0,254 (VQ)^{0,727}$ . Зависимость  $H_0$  от  $V$  и  $Q$  имеет выраженный степенной характер. Среднеквадратичной аппроксимацией 11 точек  $(V, Q, H_0)$  в диапазоне  $5 \leq Q \leq 20, 0,005 \leq V \leq 0,2$  при  $a = -2$  получена формула

(2.1)

$$H_0 = 0,53V^{0,6}Q^{0,3}.$$

Максимальная погрешность аппроксимации 5%. В размерных переменных формула (2.1) имеет вид

$$h_0/R = 3,57(\mu_0 u/E'R)^{0,6}(\alpha E')^{0,3}(p_0/E')^{-0,1},$$

где  $u = (u_1 + u_2)/2$ . Приведем для сравнения результат [3], полученный обработкой экспериментальных данных,

$$h_0/R = 5,8(\mu_0 u/E'R)^{0,7}(\alpha E')^{0,5}(p_0/E')^{-0,2}.$$

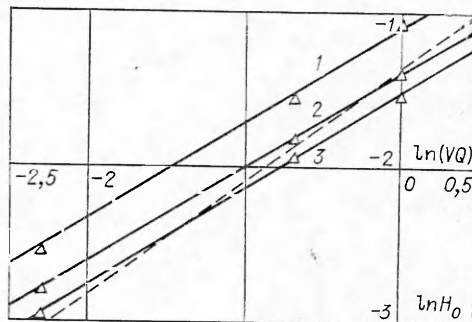
Формула [6]

$$(2.2) \quad h_0/R = 4,05(\mu_0 u/E'R)^{0,75}(\alpha E')^{0,6}(p_0/E')^{-0,2}$$

основана на замене упругих тел средой Винклера и получена специальным подбором постоянной Винклера.

Наряду со средней толщиной слоя смазки важно определять и минимальную толщину. На основе результатов решения (1.5), (1.2)—(1.4) в указанном выше диапазоне  $V$  и  $Q$  была получена формула для  $H_{\min} = H_0 h_{\min}$

$$(2.3) \quad H_{\min} = 0,31V^{0,66}Q^{0,52}.$$



Фиг. 2

В размерных переменных (2.3) имеет вид

$$h_{\min}/R = 2,05(\mu_0 u/E'R)^{0,66}(\alpha E')^{0,52}(p_0/E')^{-0,12}.$$

В [2] получен результат

$$h_{\min}/R = 1,26(\mu_0 u/E'R)^{0,7}(\alpha E')^{0,6}(p_0/E')^{-0,26},$$

который противоречит уравнениям (1.1)—(1.4), так как не удовлетворяет условию  $H_{\min} = H_{\min}(V, Q)$ .

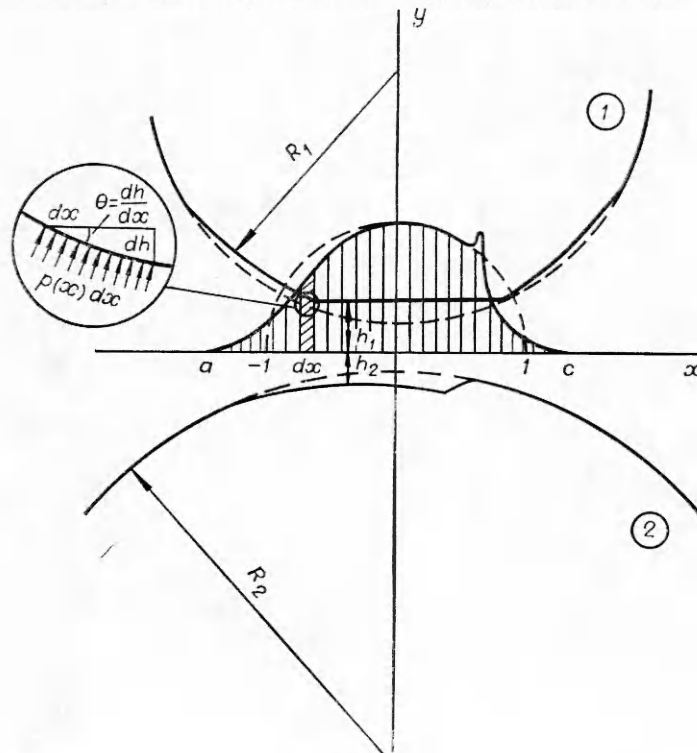
3. Рассмотрим задачу об определении силы и момента сопротивления качению, действующих на единицу длины цилиндра, в случае чистого качения и одинаковых материалов цилиндров. Толщину слоя смазки в размерных переменных представим формулами

$$(3.1) \quad h = h_1 + h_2, \quad h_1 = \frac{h^*}{2} + \frac{x^2}{2R_1} - \frac{2}{\pi E'} \int_a^c p(t) \ln |t - x| dt,$$

$$h_2 = \frac{h^*}{2} + \frac{x^2}{2R_2} - \frac{2}{\pi E'} \int_a^c p(t) \ln |t - x| dt,$$

где  $h^*$  — некоторая постоянная (фиг. 3).

На элемент  $dx$  поверхности верхнего цилиндра действуют подъемная сила  $F_y = p dx$ , сила лобового сопротивления  $F_x = p \frac{dh}{dx} dx$  и сила вязкого



Фиг. 3

трения  $F_{\mu} = \frac{h_1 + h_2}{2} \frac{dp}{dx} dx$ . Главный вектор  $F_1$  и главный момент  $M_1$  относительно мгновенного центра качения равны

$$(3.2) \quad F_1 = \int_a^c p \frac{dh_1}{dx} dx + \int_a^c \frac{h_1 + h_2}{2} \frac{dp}{dx} dx;$$

$$(3.3) \quad M_1 = - \int_a^c p x dx.$$

Подставляя (3.1) в (3.2) и интегрируя по частям, получим

$$(3.4) \quad F_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \int_a^c p x dx.$$

Формулы (3.2)—(3.4) записаны в размерных переменных. Если ввести безразмерную силу  $F'_1 = F_1 R / (qb)$ , безразмерный момент  $M'_1 = M_1 / (qb)$  и опустить штрихи, то

$$F_1 = \frac{R_2 - R_1}{\pi(R_1 + R_2)} \int_a^c p x dx, \quad M_1 = \frac{2}{\pi} \int_a^c p x dx.$$

Аналогично (2.1), (2.2) с погрешностью не более 6% можно аппроксимировать зависимость  $M_1$  от  $V$  и  $Q$  формулой

$$(3.5) \quad M_1 = 0,28(V/Q)^{0,54}.$$

Для  $F_1$  получим

$$(3.6) \quad F_1 = 0,14 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{V}{Q} \right)^{0,54}.$$

Для нижнего цилиндра

$$(3.7) \quad F_2 = -F_1, \quad M_2 = M_1.$$

В размерных переменных формулы (3.5), (3.6) имеют вид

$$(3.8) \quad \frac{F_1}{E'R} = 3,01 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{\mu_0 u}{E'R} \right)^{0,54} (\alpha E')^{-0,54} \left( \frac{P_0}{E'} \right)^{0,3};$$

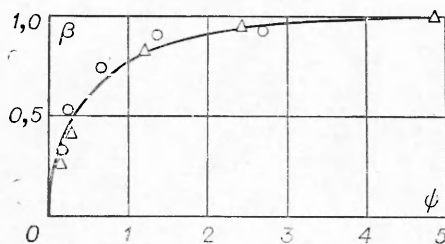
$$(3.9) \quad M_1 / E'R^2 = 6,02 (\mu_0 u / E'R)^{0,54} (\alpha E')^{-0,54} (P_0 / E')^{0,3}.$$

В работе [7] приведены результаты аппроксимации решения [2], из которых можно получить

$$(3.10) \quad \frac{F_1}{E'R} = 9,2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{\mu_0 u}{E'R} \right)^{0,7} (\alpha E')^{-0,5};$$

$$(3.11) \quad M_1 / E'R^2 = 18,4 (\mu_0 u / E'R)^{0,7} (\alpha E')^{-0,3}.$$

Недостатком формул (3.10), (3.11) является неучет влияния нагрузки на сопротивление качению. Это влияние обнаруживается экспериментально [8] и при более корректном решении исходных уравнений (1.1)—(1.4).



Ф и г. 4

Сопоставление формул (3.8), (3.9) с экспериментальными данными [8] показывает, что расчет соответствует эксперименту до скоростей качения порядка  $5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Показатель степени в зависимости силы трения от скорости качения, вычисленный по данным [8], равен  $\approx 0,4$ , а показатель степени при контактном давлении  $\approx 0,18-0,28$ .

В экспериментах [8] на дисковой установке обеспечивался режим так называемого фрикционного качения, когда один диск (на котором измеряют момент сопротивления качению) является ведущим, а ведомый диск установлен так, что сопротивление вращению в его опорах практически равно нулю. Из (3.7), (3.8) следует, что при  $R_1 = R_2$ ,  $F_1 = F_2 = 0$ , а  $M_1 = M_2 = M$ . Для равновесия (стационарного вращения) ведомого диска необходимы некоторое проскальзывание дисков и сила трения, вызванная этим проскальзыванием. Момент этой силы относительно оси ведомого диска должен быть равен  $M$ . На ведущем диске сила трения направлена в противоположную сторону и вызывает увеличение в два раза момента сопротивления качению относительно оси диска. Момент, вычисленный с учетом сделанных замечаний для одинаковых дисков радиусом  $R = 70 \text{ мм}$ , шириной  $l = 8 \text{ мм}$  при скорости качения  $u = 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ , контактном давлении  $p_0 = 0,45 \text{ ГН} \cdot \text{м}^{-2}$ , температуре  $T = 30^\circ\text{C}$  в условиях обильной смазки маслом МС-20, равен  $0,113 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Измеренный момент равен  $0,187 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Бóльшее расхождение расчета и эксперимента при  $u > 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ , по-видимому, объясняется неизотермичностью течения смазки.

Координата  $a$  точки начала области положительного давления мало влияет на результаты расчета, если  $a \ll -1$ . Напротив, если  $a \ll -1$ , то решение будет зависеть от  $a$ . Задавая различные значения  $a$ , можно моделировать режим качения в условиях недостаточной подачи смазки в зону контакта (так называемая бедная смазка или масляное голодание [9]). На фиг. 4 представлены результаты решения уравнений (1.5), (1.2)—(1.4) для нескольких значений  $\beta$ . По оси абсцисс отложен параметр [9]  $\psi = |a + 1| H_\infty^{-2/3}$ , где  $H_\infty = \lim_{a \rightarrow -\infty} H_0$ , по оси ординат — отношение  $\beta = H_0/H_\infty$ . Кружки соответствуют  $Q = 5$ ,  $V = 0,1$ , треугольники  $Q = 10$ ,  $V = 0,1$ . Сплошная кривая получена методом [1] в работе [9]. Величина  $a$  может быть определена в эксперименте по положению границы области, занятой смазкой. При  $a \rightarrow -1$  распределение давления становится близким [4] к решению Герца для упругого контакта. Авторы выражают благодарность Л. В. Овсянникову за полезное обсуждение работы.

Поступила 11 IV 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Грубин А. Н. Основы гидродинамической теории смазки тяжело нагруженных цилиндрических поверхностей.— «Труды ЦНИИТМАШ», 1949, кн. 30, с. 126—184.
2. Dowson D., Higginson G. R. Elastohydrodynamic lubrication N. Y., Pergamon Press, 1966.
3. Дроздов Ю. Н. Обобщенные характеристики в анализе трения и смазки тяжело нагруженных тел.— «Машиноведение», 1974, № 6, с. 70—74.

4. Галахов М. А., Запфаров К. И. Распределение давления в упругогидродинамическом контакте цилиндров.— «Докл. АН СССР», 1977, т. 232, № 1, с. 54—57.
5. Галахов М. А., Голубкин В. Н., Ширококов В. В. Реологические модели жидкости в экстремальных условиях и упругогидродинамика.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 7. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1976, № 3.
6. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М., «Машиностроение», 1976.
7. Harris T. A. An analytical method to predict skidding in high speed roller bearings.— «Trans. ASLE», 1966, vol. 9, N 3, p. 229—241.
8. Пинегин С. В. Трение качения в машинах и приборах. М., «Машиностроение», 1976.
9. Wolveridge P. E., Baglin K. P., Archard J. F. The starved lubrication of cylinders in line contact.— «Proc. Instn. Mech. Engrs», 1970—1971, vol. 185, p. 1159—1169.

УДК 532.526

## НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

А. С. Васильев

(Могилев)

С прикладной точки зрения большой интерес представляют течения, когда в пограничном слое присутствует переменная вязкость. По мнению ряда авторов, аналогами таких движений могут также служить движения морских животных [1, 2], у которых в качестве вещества, уменьшающего вязкость растворов воды, выступает слизь. Некоторые исследования, посвященные этим вопросам, опубликованы в работе [3].

В данной работе излагаются результаты теоретического исследования возможного уменьшения сопротивления трения при течении типа Куэтта, при стационарном и нестационарном обтекании плоской пластины, когда на ее поверхности задана концентрация некоторого вещества, способного уменьшать вязкость образующегося раствора.

1. Пусть вязкость изменяется по закону (фиг. 1)

$$v/v_0 = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq |y| \leq 1 - \alpha, \\ \text{ch}^{-1} \frac{k}{\alpha} (y - 1 + \alpha) & \text{при } 1 - \alpha \leq |y| \leq 1, \end{cases}$$

где  $\alpha$  — толщина диффузионного пограничного слоя;  $k$  — некоторое число, при котором относительная вязкость вблизи поверхности минимальна и равна  $v/v_0|_{y=1} = 1/\text{ch } k$ .

Рассмотрим прежде всего течение типа Куэтта. В этом случае

$$\frac{d}{du} \left( v \frac{du}{dy} \right) = 0, \quad u(1) = 1, \quad \frac{du(0)}{dy} = 0.$$

Решение имеет вид

$$u = \frac{1 - \alpha + \frac{\alpha}{k} \text{sh} \frac{k}{\alpha} (y - 1 + \alpha)}{1 - \alpha + \frac{\alpha}{k} \text{sh } k}.$$

Отсюда

$$\tau/\tau_0 = \left( 1 - \alpha + \frac{\alpha}{k} \text{sh } k \right)^{-1},$$