

Для процессов установления при  $\max u^*(\xi) > 1$  колебаний в пиках не обнаружено.

В заключение отметим, что причиной эффектов локализации и делокализации электронов в рассматриваемых диффузионных процессах так же, как и причиной формирования неоднородных тепловых структур в средах с нелинейным объемным поглощением [6—9], является изменение механизма генерации заряженных частиц с изменением знака источника в правой части уравнения (2) при переходе через границу однородного стационарного состояния  $u = 1$ .

Авторы выражают благодарность Н. Х. Эркенову за ценные рекомендации по разработке алгоритма численного расчета.

Поступила 30 1 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бережинский Р. А., Резцов В. Ф. О промежуточной асимптотике одной модельной системы уравнений нелинейного переноса в плотной изотермической плазме при электродного слоя. — В сб.: Гидродинамика лопастных машин и общая механика. Воронеж, изд. ВПИ, 1973.
2. Лебедев А. Д. К вопросу о приэлектродных явлениях в газовом разряде. — ЖТФ, 1968, т. 38, № 10.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., Наука, 1973.
4. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., Мир, 1968.
5. Пригожин И., Николис Ж. Биологический порядок, структура и неустойчивости. — УФН, 1973, т. 109, № 3.
6. Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности. — ЖВММФ, 1972, т. 12, № 4.
7. Голайдо С. И., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. Нестационарные задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением тепла. — ЖВММФ, 1973, т. 13, № 5.
8. Калашников А. С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением. — ЖВММФ, 1974, т. 14, № 4.
9. Калашников А. С. О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры. — ЖВММФ, 1976, т. 16, № 3.

УДК 530.18

### ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В СЛАБОДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

А. А. Дорфман, Е. Н. Пелиновский, Ю. А. Степаняц  
(Ленинград, Горький)

Задачи, связанные с возбуждением и распространением нелинейных цилиндрических и сферических волн в средах со слабой дисперсией, возникают во многих разделах теоретической и прикладной физики. Такого рода возбуждения наблюдаются, например, в плазме [1—3], на поверхности неглубокой жидкости (волны цунами и др.) [4, 5], в газодинамике [6], в нелинейных решетках и т. д. Эволюция соответствующих одномерных процессов, описываемых плоскими волнами с помощью уравнения Кортевега—де Вриза (КДВ), в настоящее время изучена достаточно подробно [7]. В последние годы неоднократно предпринимались попытки обобщения этого уравнения для описания неплоских волн, обладающих осевой или центральной симметрией [5, 8—11]. Были получены отдельные частные решения обобщенного уравнения КДВ, которые описывают квазистационарные уединенные импульсы — солитоны [2, 3, 5, 8—11], наблюдавшиеся также в ряде экспериментальных работ [1—4]. Данная работа посвящена дальнейшему изучению цилиндрических и сферических волн, здесь получены некоторые новые приближенные решения, учитывающие влияние потерь в среде, разобраны различные случаи преобладания тех или иных факторов (нелинейность, дисперсия, геометрическая расходимость), приведено сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными.

1. Краевая задача для уравнения КДВ, обобщенного на случай движений с осевой и центральной симметрией, в безразмерных переменных может быть представлена в виде [8, 9]

$$(1.1) \quad \partial u / \partial r + \mu u \partial u / \partial \tau + \varepsilon^2 \partial^3 u / \partial \tau^3 + \chi u + S \chi u / (1 + \chi r) = 0, \\ u(0, \tau) = f(\tau),$$

где  $\tau = r - t$ ;  $t$  — время;  $r$  — радиальная координата, отсчитываемая от граничной поверхности, находящейся на расстоянии  $\chi^{-1}$  от центра;  $u$  — массовая скорость среды;  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $\chi$  — малые параметры, характеризующие нелинейность, дисперсию и низкочастотную диссипацию соответственно;  $S$  — коэффициент, принимающий значения 0, 1/2, 1 для случаев плоской, осевой и центральной симметрии соответственно;  $f$  — заданная положительная финитная функция единичной амплитуды. В этом уравнении мы ограничились модельным рассмотрением частнонезависимых потерь.

Выведем интегральные следствия уравнения (1.1). Для этого умножим (1.1) на  $u^{k-1}$  ( $k = 1, 2$ ) и проинтегрируем результат по  $\tau$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ ; тогда, принимая во внимание условие покоя на бесконечности, получим

$$(1.2) \quad I_k(r) = I_k(r_*) \varphi^k(r, r_*), \quad k = 1, 2.$$

Величина  $I_k = \int_{-\infty}^{\infty} u^k(\tau, r) d\tau$  представляет собой полный импульс движущейся среды при  $k = 1$  и полную энергию при  $k = 2$ . Эти величины в дальнейшем играют важную роль для построения приближенных решений и выяснения характера их зависимости от  $r$ . Функция  $\varphi(r, r_*)$  определяется по формуле  $\varphi(r, r_*) = [1 + \chi(r - r_*)]^{-S} e^{-\chi(r - r_*)}$ , где  $r_*$  — некоторое фиксированное значение удаления. Отметим, что при  $\chi = 0$  уравнение (1.1) в цилиндрическом случае  $S = 1/2$ , подобно обычному уравнению КДВ, обладает бесконечным набором интегралов движения [12] и может быть представлено в лаксовой форме с соответствующей LA-парой [13].

Сделаем замену переменных в уравнении КДВ (1.1). Введем новые переменные  $U, x$  посредством соотношений  $U = u\varphi^{-1}(r, 0)$

$$x = \mu \int_0^r \varphi(r', 0) dr' = \mu \begin{cases} r, & S = 0, \\ \frac{2}{\chi} (\sqrt{1 + \chi r} - 1), & S = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{\chi} \ln(1 + \chi r), & S = 1 \end{cases}$$

при  $\chi = 0$ ,

$$x = \mu \begin{cases} \frac{1}{\chi} (1 - e^{-\chi^2}), & S = 0, \\ \sqrt{\frac{\pi}{\chi \chi}} e^{\frac{\chi}{\chi}} \left\{ \Phi \sqrt{\frac{\chi}{\chi} (1 + \chi r)} \right\} - \Phi \left[ \sqrt{\frac{\chi}{\chi}} \right], & S = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{\chi} e^{\frac{\chi}{\chi}} \left\{ \text{Ei} \left[ -\frac{\chi}{\chi} (1 + \chi r) \right] - \text{Ei} \left[ -\frac{\chi}{\chi} \right] \right\}, & S = 1 \end{cases}$$

при  $\chi \neq 0$ . Здесь  $\Phi$  — интеграл вероятности;  $\text{Ei}$  — интегральная показательная функция. Уравнение (1.1) в новых переменных приводится к виду

$$(1.3) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{\beta^2(x)} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} = 0, \quad \beta = \frac{\sqrt{\mu \varphi(x, 0)}}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что эффективным критерием подобия, выражающим отношение нелинейных эффектов к дисперсионным, в данном случае является величина  $\beta^2(x)$ , которая непостоянна. Это обстоятельство приводит к сильной зависимости характера решения рассматриваемой краевой задачи от удаления в отличие от задачи с плоской симметрией, где структура волновой картины определяется постоянным параметром  $\beta^2$  [7].

2. Рассмотрим вначале случай, когда на граничной поверхности величина  $\beta^2 \ll 1$ , и пусть для простоты  $\chi = 0$ . Тогда в (1.3) нелинейным членом можно пренебречь, а общее решение линеаризованного уравнения (1.3) имеет вид [7]

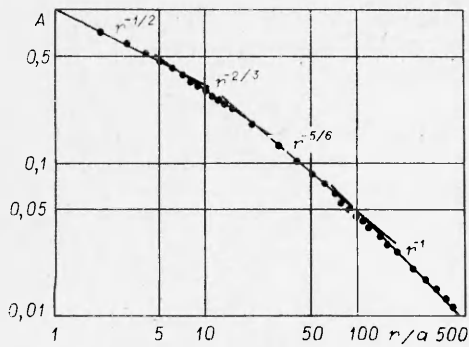
$$(2.1) \quad u(r, \tau) = \pi^{-\frac{1}{2}} (3\varepsilon^2 r)^{-\frac{1}{3}} (1 + \kappa r)^{-S} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai} \left[ \frac{\tau - \tau'}{(3\varepsilon^2 r)^{1/3}} \right] f(\tau') d\tau'.$$

Как показано в [7], в асимптотике при больших  $r, \tau$  решение (2.1) для начальных возмущений с ненулевой площадью выражается через функцию Эйри:

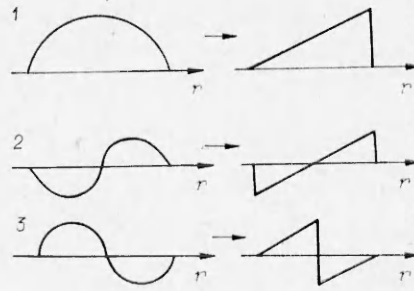
$$(2.2) \quad u(r, \tau) \sim r^{-\left(S + \frac{1}{3}\right)} \text{Ai} \left( \frac{\tau}{r^{1/3}} \right),$$

откуда следует, что амплитуда волны убывает по закону  $\sim r^{-5/6}$  в цилиндрическом случае и  $\sim r^{-4/3}$  в сферическом, а характерная длительность растет как  $\sim r^{1/3}$ , при этом наибольшую амплитуду имеет первая приходящая волна. Отметим, что приближенное решение (2.2) линеаризованного уравнения (1.3) может быть получено из простых соображений размерности. Для этого необходимо воспользоваться законом сохранения (1.2) при  $k = 1$ . Если же использовать закон сохранения энергии при  $k = 2$ , то получим другое автомодельное решение, длительность которого меняется с расстоянием так же, как и у (2.2), а амплитуда спадает по более медленному закону  $\sim r^{-(S+1/6)}$ . На основе этих данных можно получить закон изменения с расстоянием параметра  $\beta^2$ , определяемого локальным значением произведения амплитуды волны на квадрат ее длительности в каждый момент времени. Так, для первого типа решения  $\beta \sim r^{-(1/2)(S-1/3)}$ , а для второго  $\beta \sim r^{-(1/2)(S-1/2)}$ . Как видно из выражений для  $\beta$ , в обоих случаях этот параметр при  $S \neq 0$  не увеличивается с расстоянием, так что линейная вначале волна при расхождении всегда остается линейной. Отметим, что в плоском случае  $S = 0$  параметр  $\beta$  растет с расстоянием для обоих типов решений так, что волна сколь угодно малой амплитуды с ненулевой площадью всегда становится нелинейной. В сходящейся же волне этот параметр растет с уменьшением  $r$ , за исключением случая  $S = 1/2$  для второго типа решения, что приводит к возрастанию роли нелинейности, которая, начиная с некоторого расстояния, становится существенной для дальнейшего описания волны. Аналитические оценки [14] показывают, что обычно вблизи источника возмущения амплитуда цилиндрических волн убывает  $\sim r^{-2/3}$ , что согласуется с законом сохранения энергии, тогда как на большом расстоянии преобладает решение (2.2), убывающее  $\sim r^{-5/6}$ .

Необходимо отметить, что полученные здесь результаты относятся к линеаризованному уравнению КДВ, которое, однако, не всегда справедливо для описания осесимметричных волн. Непригодность этого уравнения на малых расстояниях от центра очевидна ввиду сильного увеличения роли последнего члена в (1.1), тогда как по смыслу вывода (1.1) этот член должен быть относительно мал. Однако и на очень больших расстояниях от центра это уравнение становится непригодным, поскольку оно описывает головную часть волны (низкочастотную область спектра), в которой



Ф и г. 1



Ф и г. 2

содержится сравнительно небольшая часть энергии всей волны. Основная же часть энергии заключена в высокочастотном цуге и обычно описывается асимптотическим вычислением интегралов Фурье—Бесселя, не использующим одноволнового приближения и являющимся точным решением исходной задачи в линейной постановке.

Таким образом, полученные здесь результаты могут рассматриваться как промежуточная асимптотика, справедливая на умеренных расстояниях от центра. На фиг. 1 в качестве примера показан результат вычисленного численного расчета кольцевых волн от осесимметричного источника, имеющего форму  $u(0, r) = U_0 e^{-(r/a)^2}$ ,  $a = 2$ . Расчеты проводились на основе линеаризованных уравнений мелкой воды путем сведения к интегралам Фурье—Бесселя, однако при некотором удалении от центра, когда характерный масштаб возмущения много меньше радиуса круговой волны, ее эволюцию можно описать уравнением (1.4) с  $\chi = 0$ . Как видно из фиг. 1, на начальном этапе (до  $r \approx 2,5 a$ ), когда дисперсией можно пренебречь, амплитуда волны убывает  $\sim r^{-1/2}$ . Затем от  $r \approx 2,5 a$  до  $r \approx 8 a$  амплитуда меняется по закону  $r^{-2/3}$  в соответствии с [14]. При  $r \approx 8 a$  происходит переход к закону  $r^{-5/6}$ , который справедлив до  $r \approx 60 a$ . И наконец, на больших расстояниях головная волна убывает  $\sim r^{-1}$ . Таким образом, видно, что убывание амплитуды волны на участке от  $r \approx 2,5 a$  до  $r \approx 60 a$  может быть описано в рамках одноволнового уравнения (1.4) и объяснено с помощью выведенных в этом разделе законов.

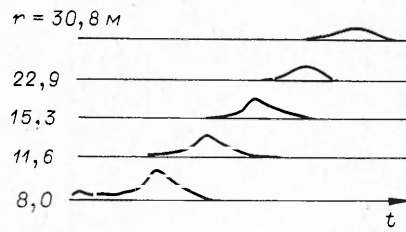
3. Рассмотрим теперь случай такого краевого условия задачи (1.4), при котором на малых удалениях от граничной поверхности нелинейные эффекты преобладают над дисперсионными. Тогда в (1.4) дисперсионным членом можно пренебречь и в рамках оставшегося уравнения, описывающего простые волны с затуханием и расходимостью, можно найти точные решения вида

$$(3.1) \quad u(\tau, r) = f \left[ \tau - \frac{\mu u}{\varphi(r, 0)} \int_0^r \varphi(r', 0) dr' \right],$$

где функция  $f$  задается из граничного условия. Зависимость амплитуды волны от расстояния находится из соотношения

$$(3.2) \quad u e^{\kappa r} (1 + \kappa r)^S = \text{const},$$

которое следует из (1.2) при  $k = 1$ . Как видно из (3.2), амплитуда слабых волн меняется с расстоянием так же, как и у линейных (сильно нелинейные простые волны не описываются уравнением (1.4), и поэтому их амплитуда меняется по другому закону [6]). Зависимость аргумента волны (3.1) от  $u$  приводит к изменению ее формы. Вычисление расстояния, на котором происходит формирование бора, и нахождение законов ослабле-



Ф и г. 3

ния высоты производится так же, как и в задаче о звуковых ударных волнах в газах и жидкостях [6], поэтому приведем здесь основные формулы без вывода. В зависимости от формы начального возмущения возможны три типа боров, иллюстрируемые фиг. 2. Для амплитуд первых двух типов справедливы следующие асимптотические формулы:

$$u \sim r^{-3/4}, \quad \Lambda \sim r^{1/4},$$

для третьего типа законы изменения  $u$  и  $\Lambda$  другие:

$$u \sim r^{-1}, \quad \Lambda = \text{const},$$

где  $\Lambda$  — характерный размер бора. Экспериментальные данные, полученные в [15] при взрыве заряда литого тротила весом 100 кг в мелком водоеме (глубина порядка 50 см), с большой точностью совпадают с (3.2) для цилиндрических волн ( $S = 1/2$ ) на поверхности жидкости без учета  $\chi$ . На фиг. 3 показаны формы возвышения поверхности, взятые из [15], на расстояниях 8; 11,6; 15,3; 22,9; 30,8 м от эпицентра взрыва, откуда видно, что форма волны близка к треугольному бору, а по приведенным в [15] данным ее амплитуда изменялась  $\sim r^{-0,75}$ .

В силу уменьшения амплитуды возмущения расходящихся волн на некотором удалении нелинейные эффекты могут стать одного порядка с дисперсионными (если масштаб волны меняется достаточно медленно по сравнению с ее амплитудой). В этом случае распространение волн описывается полным уравнением (1.1), структура волновой картины приобретает квазисолитонный характер, если последние два слагаемых в (1.1) достаточно малы\*.

4. С учетом нелинейности и дисперсии отдельные классы точных решений уравнения (1.1) при  $\chi = 0$  и  $S = 1/2$  были найдены в [12, 13]. Характер этих решений во многом похож на  $N$ -солитонные решения, соответствующие уравнению КДВ в плоском случае [7], однако их выражения слишком громоздки и неудобны для практических расчетов. Другой подход для нахождения приближенных решений (1.1) использовался в работах [2, 3, 5, 8—10, 16] и был основан на близости решения (1.1) к плоскому солитону, если два последних слагаемых в (1.1) достаточно малы. Большое число экспериментальных работ и численных расчетов [4—5], сделанных для изучения как цилиндрических, так и сферических нелинейных волн, показало, что в обоих случаях наблюдается распад начального возмущения произвольной формы на ряд солитонов аналогично тому, как это имеет место в плоском случае [7]. Из-за расходимости и диссипации амплитуды солитонов уменьшаются с расстоянием.

Многие авторы пытались теоретически получить закон изменения амплитуды солитона с расстоянием без учета диссипации. При этом были получены противоречивые данные: согласно работам [5, 8, 9], амплитуда солитона изменяется  $\sim r^{-S}$ , тогда как, согласно [10, 16], закон изменения амплитуды более сильный  $\sim r^{-(4/3)S}$ . По нашему мнению, это противоречие объясняется тем, что в первой группе работ не учитывалось изменение длительности солитона с расстоянием, которая связана с его амплитудой. Чтобы найти законы изменения параметров солитона с расстоянием, будем

\* Качественно смена режима вытекает уже из (1.3), поскольку параметр  $\beta^2(x)$  не является постоянным. Для определения расстояния, на котором происходит переход от существенно нелинейного характера решения к дисперсионному, необходимо более точно знать эволюцию параметра  $\beta^2(x)$  на основе уже найденного решения.

считать, как уже говорилось, что два последних слагаемых в (1.1) малы, а решение имеет такой же вид, как и в плоском случае, но с медленно меняющимися параметрами — амплитудой  $A$  и длительностью  $\Lambda$ :

$$(4.1) \quad u = A(r) \operatorname{sch}^2 \frac{\tau - \int_0^r \frac{\mu A}{3} dr}{\Lambda(r)},$$

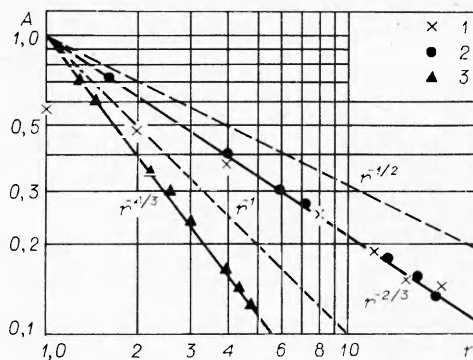
где  $\Lambda(r) = \sqrt{12\varepsilon^2/\mu A(r)}$ . Используя закон сохранения энергии (1.2) и связь между  $\Lambda$  и  $A$ , получим

$$(4.2) \quad A \sim r^{-(4/3)} S e^{-(4/3)\chi r}, \quad \Lambda \sim r^{(2/3)} S e^{(2/3)\chi r}.$$

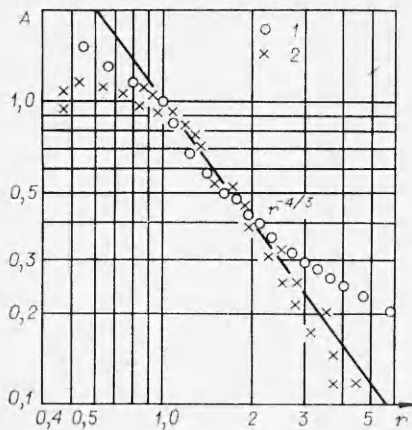
Интересно отметить, что такой же закон спада поля с расстоянием следует из вышеупомянутых точных решений [12, 13], а также автомодельных решений, найденных в [11]. Более строго решения типа (4.1), (4.2), найденные с помощью асимптотических разложений, получены в [16]. Законы изменения параметров солитона (4.2) хорошо согласуются с численными данными, представленными на фиг. 4, где показаны изменения амплитуд солитонов с расстоянием, вычисленные на основе уравнения (1.1) при  $\chi = 0$ . (Прямая  $\sim r^{-2/3}$  соответствует цилиндрическим, а прямая  $\sim r^{-4/3}$  — сферическим солитонам. Для сравнения приведены штриховые линии, соответствующие законам изменения амплитуд линейных волн без дисперсии, точки 1 — [5], 2 — [8], 3 — [9].) Хорошее совпадение также имеется между формулами (4.1), (4.2) и экспериментальными данными, полученными с солитонами в плазме. На фиг. 5 показаны зависимости амплитуд сферически расходящихся солитонов от расстояния (точки 1 — [2], 2 — [3]). Выполненное нами электро моделирование цилиндрически расходящихся солитонов с помощью нелинейной двумерной LC-решетки привело к совпадению полученных данных об изменении амплитуд и длительностей солитонов с расчетными формулами. На фиг. 6 приведены экспериментальные данные для безразмерных амплитуд солитонов (нормированных на амплитуду входного импульса) и длительностей (в микросекундах). К сожалению, другие экспериментальные работы по наблюдению солитонов в плазме [1] и на воде [4] имеют скорее качественный характер. Заметим также, что во многих экспериментальных работах термин «солитон» применяется к произвольным уединенным волнам, не описываемым уравнением (1.1), что часто приводит к недоразумениям, ибо параметры таких уединенных волн изменяются с расстоянием по другим законам, нежели (4.1), (4.2). Обобщенный затухающий солитон (4.1) не является независимым образованием, в процессе распространения он излучает волновой пакет («хвост»), который может быть найден в следующем приближении при построении асимптотического решения [16]. В плоском случае  $S = 0, \chi \neq 0$  структура «хвоста» подробно изучалась во многих работах последних лет. Здесь ограничимся лишь выражением для импульса «хвоста», который может быть найден из (1.2) при  $k = 1$ :

$$I_* = 2 \sqrt{\frac{12\varepsilon^2 A_0}{\mu}} e^{-(2/3)\chi r} \left( 1 + \chi r \right)^{-(2/3)S} \left[ e^{\frac{\chi r}{3}} (1 + \chi r)^{-S/3} - 1 \right],$$

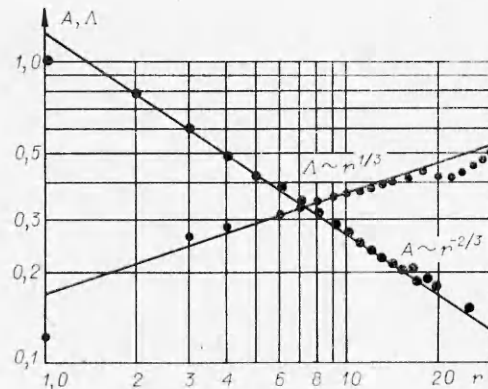
где  $A_0$  — амплитуда солитона при  $r = 0$ . При больших  $r$  импульс



Фиг. 4



Ф и г. 5



Ф и г. 6

«хвоста» по абсолютной величине в точности равен импульсу солитона и противоположен по знаку, убывая с расстоянием по закону  $I_* \sim -e^{-(2/3)/\chi r} r^{-(2/3)S}$ .

Описанные квазисолитонные решения справедливы на ограниченных расстояниях из-за невозможности одновременной «балансировки» трех факторов: нелинейности, дисперсии и расходимости. Наконец, важно отметить, что при отсутствии диссипации ( $\chi = 0$ ) решение нулевого приближения (4.1), (4.2) в цилиндрическом случае остается справедливым до тех пор, пока поправка из следующего приближения не станет достаточно большой. При этом отношение последнего слагаемого в (1.1) к дисперсионному (или нелинейному) остается малым всегда, если оно было мало вначале. В сферическом же случае решение (4.1), (4.2) может стать непригодным гораздо раньше, так как вышеуказанное отношение растет с расстоянием. Граница области применимости такого решения оценивается как  $r_0 \sim (1/\epsilon) (12/\mu)^{3/2}$ . При  $r \gg r_0$  решение становится линейным и описывается формулами п. 2.

Поступила 13 II 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hershkowitz N., Romesser T. Observations of ionacoustic cylindrical solitons.— Phys. Rev. Lett., 1974, vol. 32, N 11.
2. Hershkowitz N., Glaus J., Lonngren K. E. Spherical ion—acoustic solitons.— Plasma Phys., 1979, vol. 21, N 6.
3. Ze F., Hershkowitz N., Chan Ch., Lonngren K. E. Excitation of spherical ion—acoustic solitons with a conducting probe.— Phys. Fluids, 1979, vol. 22, N 8.
4. Tsukabayashi I., Yagishita T. Propagation of circular solitary wave on shallow water.— J. Phys. Soc. Jap., 1979, vol. 46, N 4.
5. Дорфман А.А. Осесимметричная задача о неустановившихся волнах конечной амплитуды, вызванных перемещениями дна бассейна.— В сб.: Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. М., Наука, 1977.
6. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.
7. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Наука, 1972.
8. Maxon S., Viecelli J. Cylindrical solitons.— Phys. Fluids, 1974, vol. 17, N 8.
9. Maxon S., Viecelli J. Spherical solitons.— Phys. Rev. Lett., 1974, vol. 32, p. 4.
10. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. Нелинейная эволюция волн типа цунами.— В сб.: Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. М., Наука, 1977.
11. Miles J. W. An axisymmetric Boussinesq wave.— J. Fluid Mech., 1978, vol. 85, pt 1.
12. Calogero F., Degasperis A. Conservation laws for a nonlinear evolution equation that includes as a special case cylindrical KdV equation.— Lett. Nuovo Cim., 1978, vol. 23, N 4.

13. Дрюма В. С. Об аналитическом решении осесимметричного уравнения Кортевега—де Вриза.— Изв. АН СССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1976, № 3.
14. Kajitara K. The leading wave of a tsunami.— Bull. Earthq. Res. Inst., 1963, vol. 41, p. 535.
15. Казаченко Л. С., Христофоров Б. Д. Поверхностные явления при подводных взрывах.— ФГВ, 1972, т. 8, № 3.
16. Ко К., Kuehl H. H. Cylindrical and spherical KdV solitary waves.— Phys. Fluids, 1979, vol. 22, N 7.

УДК 532.517.4

## О ПЕРЕМЕШИВАНИИ КОНТАКТНОЙ ГРАНИЦЫ, ЗАМЕДЛЯЕМОЙ СТАЦИОНАРНЫМИ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

В. Е. Неужаев, В. Г. Яковлев  
(Челябинск)

В работе [1] экспериментально обнаружено явление турбулентного перемешивания границы раздела двух газов разной плотности, замедляемой плоскими стационарными ударными волнами, движущимися из легкого газа в тяжелый.

Ниже показано, что в рамках полуэмпирических моделей [1—3] это явление определяется размером начальных возмущений — шероховатостью границы раздела. Если характерный размер этих возмущений устремить к нулю, то ширина области перемешивания также стремится к нулю. Это явление объясняется  $\delta$ -образным характером ускорения.

Если ускорение изменяется плавно, например постоянно, то перемешивание будет развиваться всегда, в том числе и при бесконечно малой шероховатости. Приводится аналитическая зависимость ширины области перемешивания от начальной шероховатости.

Граница раздела газов (жидкостей) неустойчива к малым возмущениям, если ускорение направлено от легкого к тяжелому. Эта неустойчивость возникает при достаточно малых коэффициентах вязкости и поверхностном натяжении.

В полуэмпирических моделях [1—3] полагается, что турбулентное перемешивание проявляется одновременно с действием ускорения, хотя в действительности наличие вязкости и поверхностного натяжения приводит к возникновению конечного по времени промежутка, в течение которого происходит постепенный переход к турбулентному движению.

Известные автомодельные решения [3—5] получены в предположении малости начальных возмущений. Реально эти возмущения могут быть и не малыми. Ниже установлен закон, по которому происходит выход на автомодельное решение при постоянном ускорении. Неожиданно обнаружилось слабое «забывание» начальных неровностей поверхности.

**1. Приближенная модель.** Рассмотрим диффузионную модель турбулентного перемешивания в приближенной постановке работы [5]: жидкости несжимаемы, а турбулентная скорость  $v$  предполагается функцией только времени. Тогда процесс турбулентного перемешивания будет описываться двумя уравнениями для двух искомых величин (плотности смеси  $\rho$  и характерной турбулентной скорости  $v$ ):

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = lv \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2};$$

$$(1.2) \quad \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} + \frac{v}{\alpha} \frac{v^3}{L} = \alpha v \omega^2,$$

где  $L$  — эффективная ширина области перемешивания, равная расстоянию между точками, в которых безразмерная плотность  $\delta = (\rho - \rho_2)/(\rho_1 - \rho_2)$  принимает значения 0,1 и 0,9;  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности легкой и тяжелой жидкостей, так что для плотности смеси имеет место равенство  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ ;  $v$  — вторая эмпирическая постоянная;  $\bar{\omega}^2$  — усредненное по области пе-