

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ Тел С ТРЕЩИНАМИ

И. И. Кудши

(Москва)

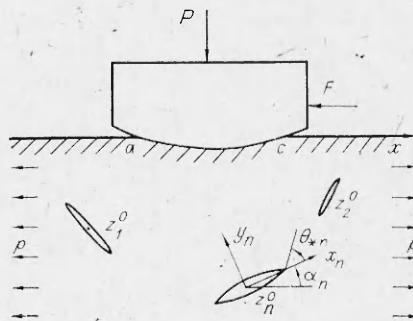
Результаты испытаний материалов на усталость имеют большой разброс, связанный с рядом, как правило, неконтролируемых факторов, к которым относятся структура и распределение остаточных напряжений в приповерхностных слоях материала, погрешности монтажа детали, нестабильность режимных параметров и свойств смазки и т. п. Влияние некоторых из указанных факторов на работоспособность деталей машин, например подшипников, рассмотрено в [1]. Менее исследовано влияние остаточных напряжений, неизбежно создаваемых той или иной обработкой (термической, химикотермической, механическим упрочнением и т. д.), на контактную усталость материалов. Изучение этого вопроса проводилось лишь экспериментальными методами, и имеющиеся литературные источники не дают однозначной трактовки вопроса. Так, в [2] (с. 227) отрицается существенное влияние остаточных напряжений на усталость подшипниковых сталей. Ряд авторов [3—7] придерживается мнения о благоприятном влиянии сжимающих и неблагоприятном влиянии растягивающих остаточных напряжений на замедление развития усталости. В других работах [8] указывается на недопустимость сжимающих и полезность небольших растягивающих остаточных напряжений. Таким образом, вопрос о степени полезности и мере влияния остаточных напряжений на усталостное разрушение остается открытым.

В [9, 10] проведено экспериментальное исследование влияния напряжений трения на контактную усталость материалов и обнаружено их отрицательное воздействие на процесс разрушения.

В данной работе предлагается механическая модель совместного влияния на разрушение нормальных и касательных контактных напряжений, с одной стороны, и остаточных напряжений в приповерхностных слоях материала — с другой. Задача рассматривается в упругой постановке и сводится к системе интегрального и дифференциальных уравнений с дополнительными условиями в виде равенств и неравенств. Решение получено асимптотическими методами. Определены распределения контактных напряжений и коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещин. Проанализировано влияние различного уровня контактных напряжений трения и остаточных напряжений, а также их знака (растягивающие или сжимающие) на коэффициенты интенсивности напряжений. Приведены численные результаты.

Таким образом, на основании анализа предлагаемой модели имеется возможность сравнительной оценки влияния рассматриваемых факторов на контактное усталостное разрушение.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу о взаимодействии с трением гладкого штампа с основанием $z = f(x)$ с предварительно напряженной упругой полуплоскостью, ослабленной N прямолинейными подповерхностными трещинами. Будем предполагать, что на границе полуплоскости трение подчиняется закону Кулона, а на берегах трещин оно отсутствует. Предварительные (остаточные) напряжения создаются приложенными на бесконечности сжимающими или растягивающими усилиями постоянной интенсивности p (рис. 1). При этом к берегам n -й трещины будут приложены напряжения [11] — $p(1 - e^{-2i\alpha_n})/2$ (α_n — угол между осями абсцисс n -й локальной и основной систем координат), индуцируемые напряжения p . Допускается частичное или полное налегание берегов трещин.



Р и с. 1

В безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \{x', \tau', a, c, x_k^0, y_k^0\} &= \{x, \tau, x_i, x_e, x_k^0, y_k^0\}/b_0, \{q', p', p_k^0\} = \\ &= \{q, p, p_k\}/q_0, \{x_k', t'\} = \{x_k, t\}/l_k, \{v_k', u_k'\} = \{v_k, u_k\}/v_k^0, \end{aligned}$$

$$f'(x') = \frac{\pi E'}{2P} f(x), \quad \delta^{0'} = \frac{\pi E'}{2P} \delta^0 - \ln \frac{1}{b_0}, \quad v_k^0 = \frac{4q_0 l_k}{E'}, \quad \delta_k = \frac{l_k}{b_0}$$

задача сводится к системе сингулярных интегрального и интегродифференциальных уравнений с дополнительными условиями в виде равенств и неравенств [11] (штрихи опущены):

$$(1.1) \quad f(x) - \lambda \int_a^x q(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_a^c q(t) \ln \frac{1}{|x-t|} dt - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 [v'_k(t) W_k^r(t, x) - u'_k(t) W_k^i(t, x)] dt = \varepsilon^0, \quad q(a) - q(c) = 0;$$

$$(1.2) \quad \int_a^c q(t) dt = \frac{\pi \varepsilon^0}{2};$$

$$(1.3) \quad W_k(t, x) = i e^{-i\alpha_k} \frac{\bar{T}_k - T_k}{\bar{T}_k - x}, \quad W_k^r = \operatorname{Re} W_k, \quad W_k^i = \operatorname{Im} W_k;$$

$$(1.4) \quad \int_{-1}^1 \frac{v'_n(t) dt}{t - x_n} + \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 [v'_k(t) U_{nk}^r(t, x_n) - u'_k(t) V_{nk}^r(t, x_n)] dt = \\ = \pi p_n(x_n) - \int_a^c q(t) [D_n^r(t, x_n) - \lambda G_n^r(t, x_n)] dt - \pi p \sin^2 \alpha_n, \\ \int_{-1}^1 \frac{u'_n(t) dt}{t - x_n} + \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 \{-u'_k(t) \bar{V}_{nk}^i(t, x_n) + v'_k(t) U_{nk}^i(t, x_n)\} dt = \\ = - \int_a^c q(t) [D_n^i(t, x_n) - \lambda G_n^i(t, x_n)] dt - \pi \frac{p}{2} \sin 2\alpha_n;$$

$$(1.5) \quad U_{nk} = \overline{R_{nk} + S_{nk}}, \quad V_{nk} = i \overline{(R_{nk} - S_{nk})}, \quad U_{nk}^r = \operatorname{Re} U_{nk}, \quad U_{nk}^i = \operatorname{Im} U_{nk}, \\ V_{nk}^r = \operatorname{Re} V_{nk}, \quad V_{nk}^i = \operatorname{Im} V_{nk}, \quad D_n^r = \operatorname{Re} \bar{D}_n, \quad D_n^i = \operatorname{Im} \bar{D}_n, \quad G_n^r = \operatorname{Re} \bar{G}_n, \quad G_n^i = \operatorname{Im} \bar{G}_n;$$

$$(1.6) \quad R_{nk}(t, x_n) = (1 - \delta_{nk}) K_{nk}(t, x_n) + \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left\{ \frac{1}{X_n - \bar{T}_k} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\bar{X}_n - T_k} + \right. \\ \left. + (\bar{T}_k - T_k) \left[\frac{1 + e^{-2i\alpha_n}}{(\bar{X}_n - T_k)^2} - \frac{2e^{-2i\alpha_n}(X_n - T_k)}{(\bar{X}_n - T_k)^3} \right] \right\}, \\ S_{nk}(t, x_n) = (1 - \delta_{nk}) L_{nk}(t, x_n) + \frac{e^{-i\alpha_n}}{2} \left[\frac{T_k - \bar{T}_k}{(X_n - \bar{T}_k)^2} + \frac{1}{\bar{X}_n - T_k} - \right. \\ \left. - e^{-2i\alpha_n} \frac{X_n - T_k}{(\bar{X}_n - T_k)^2} \right], \\ K_{nk}(t, x_n) = \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left(\frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} \right), \quad L_{nk}(t, x_n) = \\ = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[\frac{1}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} - \frac{T_k - X_n}{(\bar{T}_k - \bar{X}_n)^2} e^{-2i\alpha_n} \right], \\ D_n(t, x_n) = \frac{i}{2} \left[-\frac{1}{t - X_n} + \frac{1}{t - \bar{X}_n} - \frac{e^{-2i\alpha_n}(\bar{X}_n - X_n)}{(t - \bar{X}_n)^2} \right],$$

$$G_n(t, x_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t - X_n} + \frac{1 - e^{-2i\alpha_n}}{t - \bar{X}_n} - e^{-2i\alpha_n} \frac{t - X_n}{(t - \bar{X}_n)^2} \right];$$

$$(1.7) \quad X_n = \delta_n x_n e^{i\alpha_n} + z_n^0, \quad T_k = \delta_k t e^{i\alpha_k} + z_k^0, \quad z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0;$$

$$(1.8) \quad p_n(x_n) = 0, \quad v_n(x_n) > 0; \quad p_n(x_n) \leq 0, \quad v_n(x_n) = 0; \\ v_n(\pm 1) = u_n(\pm 1) = 0.$$

Здесь x — координата точки области контакта; a и c — координаты границ области контакта; (x_k^0, y_k^0) и l_k — координаты центра и полудлина k -й трещины; x_k — координата точки в локальной системе координат, связанной с k -й трещиной; $q = q(x)$ и $p_k = p_k(x_k)$ — контактное давление и напряжение, действующее на берега k -й трещины; $v_k = v_k(x_k)$ и $u_k = u_k(x_k)$ — скачки нормального и касательного перемещений берегов k -й трещины; $f(x)$ — форма основания штампа; λ — коэффициент трения; δ^0 — сближение тел; P — сила, действующая на штамп; q_0 и b_0 — характерные давление и полуширина области контакта ($q_0 b_0 = 2\pi^{-1}P$); $E' = E/(1 - \nu^2)$ — приведенный модуль упругости материала полуплоскости.

Таким образом, при заданных постоянных $z_k^0, \alpha_k, \delta_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$), λ, p и функции $f(x)$ из (1.1)–(1.8) требуется определить постоянные a, c, δ^0 и функции $q(x), v_k(x_k), u_k(x_k)$ и $p_k(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Получив решение задачи, легко вычислить коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва k_{1n}^{\pm} и сдвига k_{2n}^{\pm} в безразмерном виде

$$(1.9) \quad k_{1n}^{\pm} + ik_{2n}^{\pm} = \mp \lim_{x_n \rightarrow \pm 1} \sqrt{1 - x_n^2} [v'_n(x_n) + iu'_n(x_n)].$$

Заметим, что при $p = 0$ задача (1.1)–(1.8) сводится к исследованной в [12] задаче в отсутствие преднапряжений.

Решение задачи (1.1)–(1.8) представляет собой весьма сложную проблему из-за громоздкости уравнений и их ядер, взаимного влияния контактных напряжений и напряженно-деформированного состояния материала вблизи трещин, необходимости определения заранее неизвестных границ области контакта, а также заранее неизвестных участков берегов трещин, налегающих друг на друга. Изучение рассматриваемой задачи в общем случае возможно, по-видимому, лишь численными методами.

2. Асимптотическое исследование задачи. Определенных упрощений можно добиться в случае, когда все трещины малы по сравнению с размером области контакта, т. е. при $\delta_0 = \max \delta_k \ll 1$.

Представляет интерес рассмотреть такую структуру системы трещин в упругой полуплоскости, для которой расстояние между любыми двумя трещинами значительно превосходит их размеры, т. е.

$$(2.1) \quad z_n^0 - z_k^0 \gg \delta_0 \quad \forall n, k, n \neq k.$$

(Асимптотическое соотношение $g \sim h$ означает, что $(g\bar{g})^{1/2} \sim (h\bar{h})^{1/2}$. Очевидно, что если $g \sim h$, то $\bar{g} \sim \bar{h}$. Аналогичным образом определяются асимптотические соотношения $g \gg h$ и $g \ll h$.) Поскольку система подповерхностных трещин принадлежит нижней полуплоскости, то $\text{Im } z_n^0 \cdot \text{Im } \bar{z}_k^0 < 0 \quad \forall n, k$. Поэтому из (2.1) следует

$$(2.2) \quad z_n^0 - \bar{z}_k^0 \gg \delta_0 \quad \forall n, k, n \neq k.$$

Предположим, кроме того, что трещины в упругой полуплоскости залегают на глубинах под поверхностью, существенно превышающих их размеры:

$$(2.3) \quad z_n^0 - \bar{z}_n^0 \gg \delta_0 \quad \forall n.$$

Очевидно, что из (2.1)—(2.3) вытекают оценки

$$(2.4) \quad T_k - X_n \gg \delta_0, \bar{T}_k - X_n \gg \delta_0 \quad \forall n, k, n \neq k; \\ \bar{T}_k - T_k \gg \delta_0, x - T_k \gg \delta_0 \quad \forall k, x.$$

Разрешив уравнения (1.4), (1.2) относительно $q(x)$ и введя новую независимую переменную $g = \frac{2}{c-a} \left(x - \frac{a+c}{2} \right)$, получим [13]

$$(2.5) \quad q(y) = q^0(g, a, c) - \frac{\cos^2 \pi \gamma}{\pi^2 (c-a)} \times \\ \times R(g) \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 \left[v'_k(\tau) \int_{-1}^1 \frac{W_{k,t}^r(\tau, t) dt}{R(t)(t-g)} - u'_k(\tau) \int_{-1}^1 \frac{W_{k,t}^i(\tau, t) dt}{R(t)(t-g)} \right] d\tau, \\ R(g) = (1+g)^{1/2-\gamma} (1-g)^{1/2+\gamma};$$

$$(2.6) \quad q^0(\bar{g}, a, c) = f'(\bar{g}) \frac{\sin 2\pi \gamma}{2(c-a)} + \frac{\cos^2 \pi \gamma}{\pi(c-a)} R(\bar{g}) \int_{-1}^1 \frac{f'(t) dt}{R(t)(t-\bar{g})}, \quad \operatorname{tg} \pi \gamma = \frac{\lambda}{2};$$

$$(2.7) \quad \int_{-1}^1 \frac{f'_t(t) dt}{R(t)} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 \left[v'_k(\tau) \times \right. \\ \left. \times \int_{-1}^1 \frac{W_{k,t}^r(\tau, t) dt}{R(t)} - u'_k(\tau) \int_{-1}^1 \frac{W_{k,t}^i(\tau, t) dt}{R(t)} \right] d\tau = 0,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{t f'_t(t) dt}{R(t)} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 \left[v'_k(\tau) \int_{-1}^1 \frac{t W_{k,t}^r(\tau, t) dt}{R(t)} - u'_k(\tau) \int_{-1}^1 \frac{t W_{k,t}^i(\tau, t) dt}{R(t)} \right] d\tau = \pi.$$

Отметим, что $\bar{W}_{k,t}^r(\tau, t) = \partial W_k^r(\tau, t) / \partial t$ и т. д., причем в ядрах W_k^r и W_k^i , входящих в (2.5), (2.7), произведена указанная выше замена переменных.

Анализируя структуру ядер W_k , U_{nk} , V_{nk} , R_{nk} , S_{nk} , K_{nk} , L_{nk} и D_n из (1.3), (1.5)—(1.7), можно прийти к выводу, что эти ядра представимы в виде регулярных для всех x и t асимптотических рядов по δ_n и δ_k :

$$(2.8) \quad W_n(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} (\delta_n t)^j W_{nj}(x), \\ \{U_{nk}(t, x_n), V_{nk}(t, x_n)\} = \sum_{\substack{j+m=0 \\ j, m \geq 0}}^{\infty} (\delta_n x_n)^j (\delta_k t)^m \{U_{nkjm}, V_{nkjm}\}, \\ \{D_n(t, x_n), G_n(t, x_n)\} = \sum_{j=0}^{\infty} (\delta_n x_n)^j \{D_{nj}(t), G_{nj}(t)\}.$$

Здесь величины U_{nkjm} и V_{nkjm} не зависят от δ_n , δ_k , x_n , t , являясь функциями постоянных α_n , α_k , x_n^0 , y_n^0 , x_k^0 и y_k^0 . Аналогичная зависимость имеет место и для $W_{kj}^r(x)$, $D_{kj}(t)$ и $G_{kj}(t)$.

Перейдем теперь к асимптотическому решению системы (2.5)—(2.7), (1.3)—(1.8) при $\delta_0 \ll 1$. Решение ее будем искать методом регулярных возмущений [14] в виде асимптотических рядов по степеням δ_0 :

$$(2.9) \quad \{q, a, c, v_n, u_n, p_n\} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j \{q_j, a_j, c_j, v_{nj}, u_{nj}, p_{nj}\}.$$

После завершения решения задачи постоянная δ^0 может быть определена из (1.4).

Займемся асимптотическим анализом уравнений (2.5)—(2.7), основной целью которого будет выявление влияния контактных напряжений

и преднапряжений на напряженно-деформированное состояние упругого материала вблизи трещин. Поэтому ограничимся получением двучленного асимптотического решения. Взаимное влияние трещин друг на друга и на контактные напряжения описывается членами порядка $O(\delta_0^2)$ и может быть найдено аналогично.

С помощью (2.8) и (2.9), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях δ_0 , получим

$$(2.10) \quad q_0(g) = q^0(g, a_0, c_0), \quad \int_{-1}^1 \frac{f'_t(t) dt}{R(t)} = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{t f'_t(t) dt}{R(t)} = \pi;$$

$$(2.11) \quad q_1(g) = 0, \quad a_1 = c_1 = 0, \dots$$

Заметим, что из последних двух уравнений (2.10) определяются постоянные a_0 и c_0 , а затем вычисляется функция $q_0(g)$.

Займемся теперь асимптотическим анализом уравнений (1.4)–(1.7). Подставив в них представления (2.8), (2.9), найдем

$$(2.12) \quad \int_{-1}^1 \frac{v'_{n0}(t) dt}{t - x_n} = \pi p_{n0}(x_n) - \pi c_{n00}^r, \quad \int_{-1}^1 \frac{u'_{n0}(t) dt}{t - x_n} = -\pi c_{n00}^i;$$

$$(2.13) \quad \int_{-1}^1 \frac{v'_{n1}(t) dt}{t - x_n} = \pi p_{n1}(x_n) - \pi c_{n01}^r \frac{\delta_n}{\delta_0} x_n,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{u'_{n1}(t) dt}{t - x_n} = -\pi c_{n01}^i \frac{\delta_n}{\delta_0} x_n \dots;$$

$$(2.14) \quad c_{nkj}^r + i c_{nki}^i = \frac{1}{\pi} \int_{a_0}^{c_0} q_k(t) [\overline{D_{nj}(t)} - \lambda \overline{G_{nj}(t)}] dt +$$

$$+ \delta_{k0} \delta_{j0} \frac{p}{2} (1 - e^{-2i\alpha_n}), \quad k, j = 0, 1,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. При выводе уравнений (2.12), (2.13) использованы равенства (2.11). Кроме того, очевидно, что величины c_{nkj}^r и c_{nki}^i не зависят от x_n .

Для дальнейшего анализа системы уравнений (2.12)–(2.14) необходимо произвести асимптотическое исследование при $\delta_0 \ll 1$ системы альтернативных равенств и неравенств (1.8). Используя представления (2.9), имеем

$$(2.15) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j p_{nj}(x_n) = 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j v_{nj}(x_n) > 0,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j p_{nj}(x_n) \leq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j v_{nj}(x_n) = 0.$$

Предположим, что $v_{n0}(x_n) > 0$. Тогда из первого условия (2.15) при $\delta_0 \ll 1$ следует $p_{nj}(x_n) = 0 \quad \forall j \geq 0$, а знак $v_{nj}(x_n)$ при $j \geq 1$ не влияет на выполнение второго неравенства в (2.15). Предположим теперь обратное, т. е. что $v_{n0}(x_n) = 0$. Тогда возможна реализация одного из двух случаев: а) $p_{n0}(x_n) < 0$; б) $p_{n0}(x_n) = 0$. В случае «а» вне зависимости от значений $p_{nj}(x_n)$ при $j \geq 1$ $p_n(x_n) < 0$ для $\delta_0 \ll 1$. При этом из последнего соотношения (2.15) найдем $v_{nj}(x_n) = 0 \quad \forall j \geq 0$. В случае «б» получим, что $p_{n0}(x_n) = 0$ и $v_{n0}(x_n) = 0$, а выбор соотношений для $p_{nj}(x_n)$ и $v_{nj}(x_n)$ при $j \geq 1$ переносится в рассмотрение следующего приближения при $\delta_0 \ll 1$, что продельвается совершенно аналогично.

Из последних равенств (1.8) и (2.9) вытекает

$$(2.16) \quad v_{nk}(\pm 1) = u_{nk}(\pm 1) = 0 \quad \forall n, k.$$

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии материала вблизи трещин в нулевом приближении. Она описывается уравнениями (2.12) совместно с системой (2.16) и

$$(2.17) \quad p_{n0}(x_n) = 0, v_{n0}(x_n) > 0; p_{n0}(x_n) \leq 0, v_{n0}(x_n) = 0,$$

которая следует из асимптотического анализа системы (2.15).

Предположим, что $v_{n0}(x_n) > 0 \forall x_n \in (-1, 1)$. Тогда из (2.17) $p_{n0}(x_n) = 0 \forall x_n \in (-1, 1)$, а из (2.12) найдем [13] $v_{n0}(x_n) = c_{n00}^r \sqrt{1 - x_n^2} > 0$. Следовательно, $c_{n00}^r > 0$. Легко видеть, что при $c_{n00}^r \leq 0$ соотношениям (2.12), (2.17) удовлетворяют функции $v_{n0}(x_n) = 0$, $p_{n0}(x_n) = c_{n00}^r \leq 0 \forall x_n \in (-1, 1)$. Из второго уравнения (2.12) и (2.16) получим [13] $u_{n0}(x_n) = c_{n00}^i \sqrt{1 - x_n^2}$. Таким образом, решение задачи (2.12), (2.16), (2.17) имеет вид

$$(2.18) \quad v_{n0}(x_n) = c_{n00}^r \theta(c_{n00}^r) \sqrt{1 - x_n^2}, \quad u_{n0}(x_n) = c_{n00}^i \sqrt{1 - x_n^2}, \\ p_{n0}(x_n) = c_{n00}^r \theta(-c_{n00}^r),$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хэвисайда.

Дальнейшее изучение при $\delta_0 \ll 1$ системы (2.15) совместно с (2.13), (2.14) проводится аналогичным образом с учетом выражений для иско- мых функций предыдущих приближений. При этом в зависимости от значе- ний постоянных c_{nkj}^r и c_{nkj}^i трещины имеют различную конфигурацию: полностью открыты, частично или полностью закрыты.

Из анализа системы (2.15) вытекает, что при $c_{n00}^r > 0$ (см. (2.18)) $v_{n0}(x_n) > 0$ и $p_{nj}(x_n) = 0$, $x_n \in (-1, 1) \forall j \geq 0$, а знак $v_{nj}(x_n) \forall j \geq 1$ несуществен. Поэтому из (2.13) с помощью (2.16) при $c_{n00}^r > 0$ получим [13]

$$(2.19) \quad v_{n1}(x_n) = \frac{\delta_n}{2\delta_0} c_{n01}^r x_n \sqrt{1 - x_n^2}, \quad u_{n1}(x_n) = \frac{\delta_n}{2\delta_0} c_{n01}^i x_n \sqrt{1 - x_n^2}, \\ p_{n0}(x_n) = 0.$$

При $c_{n00}^r < 0$ из анализа системы (2.15) следует (см. (2.18)) $p_{n0}(x_n) < 0$, $v_{nj}(x_n) = 0$, $x_n \in (-1, 1) \forall j \geq 0$, а знак $p_{nj}(x_n)$ при $j \geq 1$ несущест- вен. Поэтому из (2.13) при $c_{n00}^r < 0$

$$(2.20) \quad v_{n1}(x_n) = 0, \quad p_{n1}(x_n) = \frac{\delta_n}{\delta_0} c_{n01}^r x_n,$$

а функция $u_{n1}(x_n)$ определяется из (2.19).

Рассмотрим случай $c_{n00}^r = 0$, когда в нулевом приближении имеем $v_{n0}(x_n) = p_{n0}(x_n) = 0 \forall x_n \in (-1, 1)$ (см. (2.18)). При этом суммирование в (2.15) начинается с $j = 1$. Из (2.15) при $c_{n00}^r = 0$ имеем аналог соотношений (2.17)

$$(2.21) \quad p_{n1}(x_n) = 0, v_{n1}(x_n) > 0; p_{n1}(x_n) \leq 0, v_{n1}(x_n) = 0.$$

Предположим, что $c_{n01}^r > 0$. Тогда из вида выражения для $v_{n1}(x_n)$ в (2.19), полученного при условии $p_{nj}(x_n) = 0 \forall x_n \in (-1, 1)$, и вида правой части первого уравнения (2.13) можно предположить, что отрезок $(-1, 1)$, занятый трещиной, разбивается на отрезки $(-1, b_{n1})$ и $(b_{n1}, 1)$, на которых выполняются соотношения $v_{n1}(x_n) = 0$ и $v_{n1}(x_n) > 0$. При этом из (2.13), (2.16) и (2.21) для $v_{n1}(x_n)$, $x_n \in (b_{n1}, 1)$

$$(2.22) \quad \int_{b_{n1}}^1 \frac{v'_{n1}(t) dt}{t - x_n} = -\pi \frac{\delta_n}{\delta_0} c_{n01}^r x_n, \quad v_{n1}(b_{n1}) = v_{n1}(1) = 0.$$

Здесь постоянная b_{n1} неизвестна и определяется из условий (2.23) $p_{n1}(b_{n1}) = 0$, $|b_{n1}| \leq 1$. Далее из (2.22) легко определяется функция

$v_{n1}(x_n)$ [13], зависящая от b_{n1} , после чего из (2.13) при $x_n \in (-1, b_{n1})$ находится выражение для $p_{n1}(x_n)$, также зависящее от b_{n1} . Решив затем уравнение (2.23), получим $b_{n1} = -1/3$. В результате при $c_{n01}^r > 0$

$$(2.24) \quad v_{n1}(x_n) = \frac{\sqrt{3} \delta_n}{18\delta_0} c_{n01}^r (3x_n + 1) \sqrt{1 + 2x_n - 3x_n^2} \theta(1 + 2x_n - 3x_n^2),$$

$$p_{n1}(x_n) = \frac{\sqrt{3} \delta_n}{9\delta_0} c_{n01}^r (3x_n - 2) \sqrt{\frac{3x_n + 1}{x_n - 1}} \theta(3x_n^2 - 2x_n - 1).$$

Аналогичным образом получим выражения для $v_{n1}(x_n)$ и $p_{n1}(x_n)$ при $c_{n00}^r = 0$ и $c_{n01}^r < 0$:

$$(2.25) \quad v_{n1}(x_n) = -\frac{\sqrt{3} \delta_n}{18\delta_0} c_{n01}^r (1 - 3x_n) \times \\ \times \sqrt{1 - 2x_n - 3x_n^2} \theta(1 - 2x_n - 3x_n^2),$$

$$p_{n1}(x_n) = \frac{\sqrt{3} \delta_n}{9\delta_0} c_{n01}^r (3x_n + 2) \sqrt{\frac{3x_n - 1}{x_n + 1}} \theta(3x_n^2 + 2x_n - 1).$$

Заметим, что при $c_{n00}^r = 0$ и $c_{n01}^r > 0$ или $c_{n01}^r < 0$ функция $u_{n1}(x_n)$ определяется из (2.19).

Исследование случая $c_{n00}^r = c_{n01}^r = 0$ приводит к необходимости рассмотрения членов асимптотических разложений, имеющих порядок $O(\delta_0^2)$, что выходит за рамки данной работы.

С помощью (1.9), (2.9), (2.18)–(2.20), (2.24) и (2.25) легко найти выражения для коэффициентов интенсивности напряжений

$$(2.26) \quad k_{1n}^\pm = c_{n00}^r \pm \frac{1}{2} \delta_n c_{n01}^r + \dots, \quad c_{n00}^r > 0; \quad k_{1n}^\pm = 0, \quad c_{n00}^r < 0;$$

$$k_{1n}^\pm = \frac{\sqrt{3} \delta_n}{9} c_{n01}^r [\pm 7 - 3\theta(c_{n01}^r)] \left[\frac{1 \pm \theta(c_{n01}^r)}{1 \pm 3\theta(c_{n01}^r)} \right]^{1/2} + \dots, \quad c_{n00}^r = 0, \quad c_{n01}^r \neq 0;$$

$$k_{2n}^\pm = c_{n00}^i \pm \frac{1}{2} \delta_n c_{n01}^i + \dots$$

3. Качественный анализ и численные результаты. Ограничимся рассмотрением задачи для параболического штампа $f(x) = (x + d)^2$, $a = -b$, $c = b$, где d и b — заранее неизвестные постоянные. Следуя [13], получим

$$(3.1) \quad q_0(x) = \cos \pi \gamma (b_0 + x)^{1/2-\gamma} (b_0 - x)^{1/2+\gamma}, \quad b_0 = (1 - 4\gamma^2)^{-1/2},$$

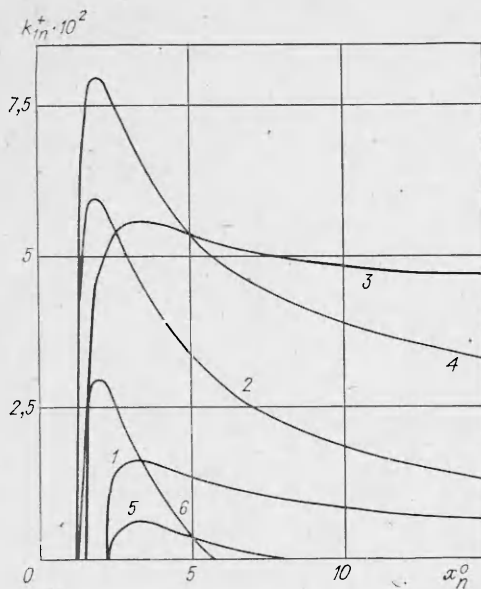
$$d_0 = -2\gamma b_0, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\pi}.$$

Пусть $k_{1n}^{0\pm}$ и $k_{2n}^{0\pm}$ — коэффициенты интенсивности напряжений в отсутствие преднапряжений ($p = 0$). Тогда в присутствии преднапряжения p при полностью открытой или закрытой трещине будем иметь (см. (1.16) из [12] и (2.14))

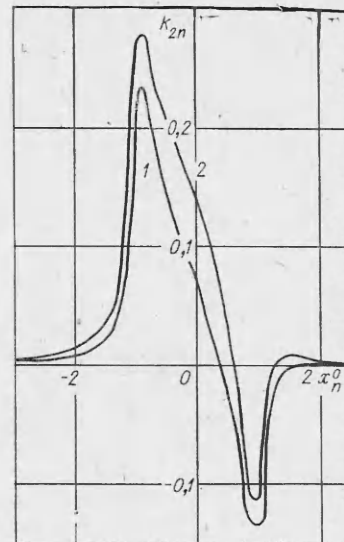
$$(3.2) \quad k_{1n}^\pm = k_{1n}^{0\pm} + p \sin^2 \alpha_n, \quad k_{2n}^\pm = k_{2n}^{0\pm} + \frac{p}{2} \sin 2\alpha_n.$$

Из (3.2) следует, что преднапряжение p не оказывает влияния на k_{1n}^\pm и k_{2n}^\pm при $\alpha_n = 0$, а оказывает максимальное влияние соответственно при $\alpha_n = \pi/2$ и $\pi/4$.

Приведенные на рис. 2, 3 кривые 1, 2 получены в отсутствие предварительных напряжений ($p = 0$) для $\lambda = 0,1$ и $0,2$ соответственно при (см. (3.1)) $\gamma = 0,0159$, $b_0 = 1,0005$, $d_0 = -0,0318$ и $\gamma = 0,0317$, $b_0 = 1,002$, $d_0 = -0,0635$ ($y_n^0 = -0,2$, $\alpha_n = \pi/2$ и $\delta_n = 0,1$).



Р и с. 2



Р и с. 3

Из рис. 2 следует, что при увеличении λ от 0,1 до 0,2 коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва k_{1n}^+ в предварительно напряженной полуплоскости увеличивается на порядок. Кроме того, отметим, что $k_{1n}^+(x_n^0)$ достигает максимума в непосредственной близости от границы области контакта со стороны, противоположной направлению скольжения штампа. Последнее объясняется тем, что именно в этой области материала возникают растягивающие напряжения, инициируемые напряжениями трения τ в контакте. Влияние знака и уровня преднапряжений на k_{1n}^+ связано с увеличением (растягивающие преднапряжения, $p > 0$) или уменьшением (сжимающие преднапряжения, $p < 0$) зоны растягивающих напряжений в приповерхностном слое материала и их уровня. Действительно, из (3.2) следует, что при увеличении растягивающих преднапряжений (кривые 3, 4 — $\lambda = 0,1; 0,2$ и $p = 0,04; 0,02$) при любых значениях x_n^0 коэффициент k_{1n}^+ не убывает, причем если $k_{1n}^+(p_1) > 0$, то при $p_2 > p_1$ $k_{1n}^+(p_2) > k_{1n}^+(p_1)$ (ср. с кривыми 1 и 2). Аналогично из (3.2) вытекает, что при увеличении сжимающих преднапряжений (кривые 5, 6 — $\lambda = 0,1; 0,2$ и $p = -0,01; -0,03$) k_{1n}^+ при любых x_n^0 не возрастает, причем если $k_{1n}^+(p_1) > 0$, то при $p_2 < p_1$ $k_{1n}^+(p_2) < k_{1n}^+(p_1)$. Приведенные в [15] зависимости k_{1n}^+ от глубины залегания трещины y_n^0 для $p = 0$ показывают, что развитие трещин оказывается возможным лишь в тонком приповерхностном слое материала толщиной порядка b_0 . Из (3.2) следует, что при растягивающих преднапряжениях толщина этого слоя увеличивается, причем, начиная с некоторого значения $p > 0$, развитие трещин возможно на любой глубине под поверхностью, а при сжимающих преднапряжениях толщина этого слоя уменьшается.

На рис. 3 изображены зависимости коэффициента интенсивности напряжений сдвига k_{2n}^+ . Заметим, что при $\alpha_n = \pi/2$ из (3.2) получим $k_{2n}^+ = k_{2n}^{0\pm}$. Поэтому приведенные на рис. 3 кривые остаются неизменными при любых p . На величину k_{2n}^+ сильное влияние оказывает ориентация трещины [12] и весьма слабое — коэффициент трения λ . Зависимости $k_{2n}^+ = k_{2n}^+(x_n^0)$ достигают экстремальных значений в непосредственной окрестности границ области контакта. Поведение k_{2n}^+ в зависимости от y_n^0 неодинаково при разных x_n^0 [15]. Анализ формул (2.26) показывает, что коэффициент k_{2n}^+ также лишь в тонком приграничном слое материала сущест-

венно отличается от своего предельного значения $k_{2n}^+(y_n^0 = -\infty) = \frac{p}{2} \sin 2\alpha_n$ (см. (3.2)). Очевидно, что при $\delta_0 \ll 1$ $k_{1n}^+(k_{2n}^+)$ и $k_{1n}^-(k_{2n}^-)$ близки.

Указанное поведение k_{1n} можно использовать для создания условий, препятствующих развитию трещин. Из [15] следует, что, как правило, трещины развиваются в направлении, слабо отличающемся от перпендикулярного к поверхности полуплоскости. Принимая, что в основном за развитие трещины ответственна величина k_{1n} [16], из (3.2) получим, что при $y < y_n^0$ малые трещины ($\delta_0 \ll 1$) не развиваются (будут закрыты) при $p < p_0 = -\max_{x_n^0} k_{1n}^{0+} + k_{th}$ (k_{th} — пороговое значение k_1 , при превыше-

нии которого трещина начинает расти [16]). Положив $k_{th} = 0$, из рис. 2 найдем, что при $y < -0,2$ трещины не развиваются, если при $\lambda = 0,1$ $p = p_0 = -0,016$ и при $\lambda = 0,2$ $p = p_0 = -0,06$. Дальнейшее увеличение преднапряжений сжатия p сверх p_0 приведет к повышению трещиностойкости слоев материала с $y > -0,2$ и не повлияет на трещиностойкость нижележащих слоев ($y \leq -0,2$). Поэтому при достаточно высоком уровне преднапряжений сжатия существенным становится конкурирующий механизм поверхностного разрушения.

Приведенные результаты показывают, что в упругой постановке увеличение коэффициента трения и предварительных напряжений растяжения приводит к интенсификации процесса разрушения, а уменьшение коэффициента трения и увеличение предварительных напряжений сжатия — к замедлению разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев М. П., Народецкий М. З. Расчет высокоточных шарикоподшипников.— М.: Машиностроение, 1980.
2. Спектор А. Г., Зельбет Б. М., Киселева С. А. Структура и свойства подшипниковых сталей.— М.: Металлургия, 1980.
3. Мэсон Р. Л. Усталость, остаточные напряжения и упрочнение поверхностного слоя наклепом // Усталость металлов.— М.: ИЛ, 1961.
4. Кудрявцев И. В. Внутренние напряжения как резерв прочности в машиностроении.— М.: Машгиз, 1951.
5. Серенсен С. В. Сопротивление усталости в связи с упрочнением и конструктивными факторами // Повышение усталостной прочности деталей машин поверхностной обработкой/Под ред. С. В. Серенсена.— М.: ГНТИ, 1952.
6. Scott R. L., Kepple R. K., Miller M. H. The effect of processing-induced near-surface residual stress on ball bearing fatigue // Rolling Contact Phenomena/J. B. Bidwell, ed.— Amsterdam: Elsevier Publishing Co., 1962.
7. Almen I., Black P. Residual stress and fatigue of metals.— N. Y.: McGraw-Hill, 1963.
8. Брозоль И. М. Влияние доводки желобов колец на качество подшипников (обзор).— М.: НИИНавтонром, 1973.
9. Влияние внешних факторов на контактную прочность при качении/С. В. Ппнегин, И. А. Шевелев, В. М. Гудченко и др.— М.: Наука, 1972.
10. Орлов А. В., Черменский О. Н., Нестеров В. М. Испытания конструкционных материалов на контактную усталость.— М.: Машиностроение, 1980.
11. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев: Наук. думка, 1976.
12. Кудиш П. И. О влиянии напряжений трения на усталостное разрушение деталей машин // Трение и износ.— 1986.— Т. 7, № 5.
13. Штаерман П. Я. Контактная задача теории упругости.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
14. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
15. Кудиш П. И. Исследование влияния подповерхностных дефектов в упругом материале на его разрушение // Исследование, расчет и проектирование подшипников качения.— М.: Специнформцентр НПО ВНИИП, 1986.— № 2.
16. Ярема С. Я. Методология определения характеристик сопротивления развитию трещин (трещиностойкости) материалов при циклическом нагружении // Физ.-хим. механика материалов.— 1981.— № 4.

Поступила 14/1 1986 г.