

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО СФЕРИЧЕСКИЙ ДЕМПФЕР

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Для моделирования движения твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, М. А. Лаврентьевым была предложена следующая модель [1]. Рассматривается твердое тело со сферической полостью, в которой находится другое твердое тело сферической формы. Между сферой и стенками полости имеется узкий зазор, в котором действуют вязкие силы (смазочный слой). Эта простая модель с конечным числом степеней свободы имеет некоторые механические свойства тела с полостью, содержащей вязкую жидкость. Поэтому ее изучение представляет интерес.

В данной работе рассмотрены некоторые свойства описанной модели, которую будем называть «твердое тело с демпфером». Показано, что в случае большой вязкости смазки движение твердого тела с демпфером может быть описано теми же уравнениями, что и движение твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью большой вязкости. Установлены соотношения между параметрами систем, при выполнении которых системы становятся механически эквивалентными.

Определены стационарные движения свободного твердого тела с демпфером и условия их устойчивости. Эти движения и условия устойчивости совпадают с теми, которые имеют место для тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью [2].

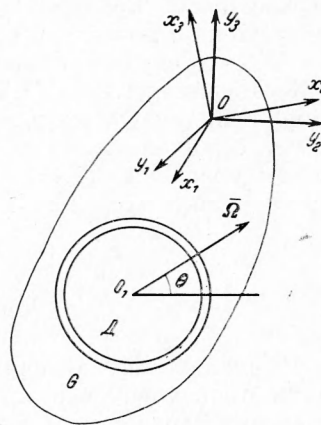
1. Пусть твердое тело G массы m_0 имеет сферическую полость D радиуса a . В полости находится твердая сфера массы m и радиуса, близкого к a , распределение масс в которой обладает сферической симметрией (например, однородно). Толщину зазора h между сферой и стенками полости считаем малой ($h \ll a$), так что смещениями центра сферы относительно центра O_1 полости D можно пренебречь (фиг. 1). Составим уравнения движения системы.

Уравнение движения центра инерции имеет вид $(m_0 + m) \mathbf{w} = \mathbf{F}$, где \mathbf{w} — ускорение центра инерции системы, \mathbf{F} — главный вектор всех внешних сил, действующих на систему.

Пусть O — любая точка, жестко связанная с твердым телом (например, центр инерции системы или неподвижная точка, если она имеется). Введем две декартовы системы координат: $Oy_1y_2y_3$, оси которой движутся произвольным заданным образом (например, поступательно), и систему $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с твердым телом (фиг. 1). Запишем уравнение моментов в системе $Oy_1y_2y_3$:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{K} = \int_{G+D} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm \quad (1.1)$$

Здесь t — время; \mathbf{K} — кинетический момент тела с демпфером относительно точки O в системе координат $Oy_1y_2y_3$; \mathbf{M} — главный момент относительно точки O всех внешних сил, действующих на тело с демпфером



Фиг. 1

в этой же системе; \mathbf{r} — радиус-вектор, отсчитанный от точки O ; \mathbf{v} — скорость в системе координат $Oy_1y_2y_3$; dm — элемент массы. В момент \mathbf{M} входит, в частности, момент сил инерции, обусловленный движением системы координат $Oy_1y_2y_3$. Скорость \mathbf{v} какой-либо точки системы равна $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{u}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела относительно системы $Oy_1y_2y_3$, \mathbf{u} — скорость этой точки относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$.

Для точек твердого тела, очевидно, $\mathbf{u} = 0$, и поэтому формула (1.1) для \mathbf{K} примет вид

$$\mathbf{K} = \int_{G+D} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm + \mathbf{L} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}, \quad \{\mathbf{L} = \int_D \mathbf{r} \times \mathbf{u} dm \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{J} — тензор инерции всей системы относительно точки O , компоненты которого постоянны в системе $Ox_1x_2x_3$. Точкой обозначено произведение тензора на вектор. Величина \mathbf{L} , называемая гиростатическим моментом, представляет собой кинетический момент демпфера в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Легко видеть, что он не зависит от выбора полюса и равен

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega} \quad (1.3)$$

где I — момент инерции демпфера относительно его диаметра, $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\Omega}$ — угловые скорости демпфера в системах координат $Oy_1y_2y_3$ и $Ox_1x_2x_3$, соответственно.

Предположим, что внешние силы, действующие на демпфер, не создают момента относительно его центра. Момент \mathbf{M}_1 сил взаимодействия демпфера с телом относительно точки O_1 считаем равным $(-k\boldsymbol{\Omega})$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности. Тогда уравнение движения демпфера относительно его центра примет вид

$$I d\boldsymbol{\omega}_1 / dt = \mathbf{M}_1 = -k\boldsymbol{\Omega}, \quad k > 0 \quad (1.4)$$

Отметим, что из величин, входящих в уравнение (1.4), можно составить безразмерный критерий $R_1 = I / (kT)$, аналогичный числу Рейнольдса для тела с полостью, содержащей жидкость (см. ниже); здесь постоянная T — характерное время процесса.

Уравнения (1.1) — (1.4) описывают движение тела с демпфером в системе координат $Oy_1y_2y_3$. К ним нужно, вообще говоря, добавить еще обычные кинематические соотношения, которых не выписываем. Перепишем уравнения (1.1) — (1.4), обозначая штрихом производные в системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$\mathbf{K}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + I(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega})$$

$$I\boldsymbol{\omega}_1' + I(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1) = k(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1) \quad (1.5)$$

Вычислим еще величину k , считая, что взаимодействие демпфера с телом происходит через тонкий сферический слой несжимаемой вязкой жидкости плотности ρ_1 и кинематической вязкости ν_1 . В системе координат $Ox_1x_2x_3$ тело покоится, а демпфер вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Точка его диаметра, составляющего угол θ с вектором $\boldsymbol{\Omega}$ (фиг. 1), имеет в системе $Ox_1x_2x_3$ скорость $\Omega a \sin \theta$. При этом в слое жидкости толщины h возникает градиент скорости $\Omega a \sin \theta / h$, вызывающий касательное напряжение на поверхности демпфера, равное $\rho_1 \nu_1 \Omega a \sin \theta / h$. Подсчитываем величину момента, создаваемого этими напряжениями относи-

тельно точки O_1 , а затем, сравнив ее с формулой (1.4), определим k :

$$M_1 = \int_0^{\pi} \frac{\rho_1 v_1 \Omega a \sin \theta}{h} 2\pi a^3 \sin^2 \theta d\theta = \frac{8\pi \rho_1 v_1 a^4}{3h} \Omega$$

$$k = (8\pi/3) \rho_1 v_1 a^4 h^{-1} \quad (1.6)$$

2. Пусть угловые скорости ω и ω_1 — величины порядка T^{-1} , где T — характерное время процесса, их производные ω' , ω_1' в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют порядок T^{-2} , а ω'' , ω_1'' — порядок T^{-3} . Кроме того, предположим, что число R_1 мало: $R_1 \ll 1$. Не нарушая общности, можно в качестве единицы измерения времени взять T , в качестве единицы длины — радиус демпфера a , в качестве единицы массы величину \sqrt{I}/a . Тогда момент инерции I , угловые скорости ω , ω_1 и их первые и вторые производные есть величины порядка единицы, а $R_1 = 1/k$, причем $k \gg 1$ (вязкость смазки велика). Перепишем уравнение (1.4), а затем продифференцируем обе его части по времени в системе $Ox_1x_2x_3$:

$$I\omega_1' + I\omega \times \omega_1 = -k\Omega, \quad I\omega_1'' + I\omega' \times \omega_1 + I\omega \times \omega_1' = -k\Omega' \quad (2.1)$$

Согласно приведенным оценкам, левые части уравнений (2.1) — величины порядка единицы, и поэтому $|\Omega| \sim |\Omega'| \sim k^{-1} \ll 1$. Подставим теперь $\omega_1 = \omega + \Omega$ в первое уравнение (2.1) и выразим из него Ω с точностью до малых высшего порядка

$$\Omega = -Ik^{-1}\omega' + O(k^{-2}) \quad (k \gg 1)$$

Подставляя эту формулу в равенство (1.3), получим

$$L = -I^2 k^{-1} (d\omega/dt) + O(R_1^2) \quad (R_1 \ll 1) \quad (2.2)$$

Здесь учтено, что $d\omega/dt = \omega'$.

Рассмотрим теперь движение твердого тела с полостью, полностью заполненной несжимаемой вязкой жидкостью плотности ρ и кинематической вязкости ν . Уравнения (1.1), (1.2) при этом остаются справедливыми со всеми введенными в них обозначениями, но L уже не определяется уравнением (1.3).

Примем по-прежнему, что ω , ω' , ω'' имеют порядки T^{-1} , T^{-2} , T^{-3} , соответственно, где T — характерное время процесса. Кроме того, пусть число Рейнольдса мало $R = l^2 / (\nu T) \ll 1$ (l — характерный размер полости), а все внешние силы, действующие на жидкость в системе координат $Oy_1y_2y_3$ — потенциальны. Тогда, как показано в работе [3], справедливо равенство

$$L = -\rho\nu^{-1} P (d\omega/dt) + O(R^2) \quad (R \ll 1) \quad (2.3)$$

Здесь P — постоянный тензор, зависящий от формы полости и характеризующий диссипацию энергии за счет вязкости. Общие выражения для компонент тензора P и некоторые его свойства, а также конкретные формулы для ряда форм полостей приведены в [3]. Для сферической полости радиуса a , согласно [3], имеем

$$P = PE, \quad P = \frac{8\pi a^7}{525}, \quad L = -\frac{\rho}{\nu} P \frac{d\omega}{dt} + O(R^2), \quad R = \frac{a^2}{\nu T} \ll 1 \quad (2.4)$$

где E — единичный тензор.

Формула (2.4) вполне аналогична равенству (2.2). Но равенство (2.2) или (2.4) вместе с уравнениями (1.1), (1.2) и кинематическими соотношениями полностью описывают движение твердого тела в системе координат $Oy_1y_2y_3$.

Следовательно, при сделанных предположениях движение твердого тела с демпфером и твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью, будут описываться одинаковыми уравнениями.

Для полной механической эквивалентности систем (при одном и том же твердом теле, одном и том же радиусе полости a и одинаковых внешних силах и моментах F, M) нужно потребовать, чтобы были равны: 1) массы демпфера и жидкости в полости (для эквивалентности уравнений движения центра инерции); 2) их моменты инерции относительно диаметра (для равенства тензора инерции всей системы J в уравнении (1.2)); 3) коэффициенты при $d\omega/dt$ в уравнениях (2.2) и (2.4). Массой и моментом инерции смазочного слоя пренебрегаем. Отсюда получаем равенства, необходимые и достаточные (при сделанных положениях) для эквивалентности систем

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho a^3, \quad I = \frac{8}{15} \pi \rho a^5, \quad k = \frac{\nu I^2}{\rho P} = \frac{56}{3} \pi \rho a^3 \quad (2.5)$$

Воспользовавшись формулой (1.6), последнему из равенств (2.5) можно придать вид

$$\rho_1 \nu_1 (a/h) = 7 \rho \nu$$

Эта формула, как и (1.6), справедлива при $h \ll a$. Отметим, что при выполнении равенств (2.5) будем иметь связь между числами Рейнольдса

$$R = 35R_1, \quad R_1 = I / (kT), \quad R = a^2 / (\nu T)$$

Если отказаться от условия тождественности твердых тел при моделировании, то тело с демпфером при $R_1 \ll 1$ может моделировать тело с вязкой жидкостью при $R \ll 1$ для тех форм полостей, у которых тензор P имеет вид $P = PE$, где P — скаляр (например, для сферы, куба и др.) Если же твердое тело с полостью, заполненной вязкой жидкостью при $R \ll 1$, совершает плоское движение, например, вращается вокруг неподвижной оси x_3 , то его при любой форме полости может моделировать твердое тело с демпфером, причем демпфер может быть любым осесимметричным телом с осью симметрии, параллельной x_3 .

Наконец, твердое тело с полостью произвольной формы (с любым тензором P), заполненной вязкой жидкостью при $R \ll 1$, можно моделировать при помощи твердого тела, содержащего три и более осесимметричных демпфера (маховика с вязким демпфированием). Пусть тело содержит три маховика, оси которых взаимно перпендикулярны и параллельны главным осям тензора P . Тогда нетрудно показать, что для эквивалентности тела с жидкостью (при $R \ll 1$) и тела с маховиками достаточно (при одинаковых внешних силах и моментах, а также при равенстве масс и тензоров инерции обеих систем) выполнения условий, аналогичных (2.5): $\rho \nu^{-1} P_{jj} = I_j^2 / k_j$ при $j = 1, 2, 3$. Здесь P_{jj} — главные значения тензора P , I_j — момент инерции j -го маховика относительно его оси, k_j — коэффициент демпфирования j -го маховика, т. е. коэффициент пропорциональности между моментом сил взаимодействия маховика с телом и его угловой скоростью относительно тела.

В работе [3] показано, что уравнения (1.1), (1.2), (2.3) в случае $R \ll 1$ могут быть упрощены. Там же изучены некоторые движения твердого

тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в случае $R \ll 1$. Эти рассмотрения полностью применимы и к телу с демпфером при $R_1 \ll 1$. В частности, из результатов работы [3] следует, что единственным устойчивым стационарным вращением свободного твердого тела с демпфером при $R_1 \ll 1$ является вращение вокруг оси наибольшего момента инерции всей системы.

3. Рассмотрим движение свободного твердого тела с демпфером, не ограничиваясь условием $R_1 \ll 1$. Полагая в уравнениях (1.5) $\mathbf{M} = 0$ и вычитая из первого уравнения третье, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}) &= k(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}) \\ I\boldsymbol{\omega}_1' + I\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1 &= k(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1) \end{aligned} \quad (\mathbf{J}_0 = \mathbf{J} - I\mathbf{E}) \quad (3.1)$$

Здесь \mathbf{J}_0 — тензор инерции системы относительно точки O при условии, что вся масса демпфера сосредоточена в его центре. Уравнения (3.1) образуют замкнутую систему. Они могут описывать движение свободного твердого тела вокруг неподвижной точки (если O — неподвижная точка) или вокруг центра инерции, если O — центр инерции системы, а система координат $Oy_1y_2y_3$ движется поступательно.

Свяжем систему координат $Ox_1x_2x_3$ с главными осями тензора инерции \mathbf{J} системы относительно точки O . Эти оси, очевидно, будут главными и для тензора \mathbf{J}_0 . Обозначим через p, q, r проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси x_1, x_2, x_3 , соответственно, через p_1, q_1, r_1 — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}_1$ на эти же оси, через A, B, C — главные моменты инерции всей системы относительно этих осей, а через A_0, B_0, C_0 — главные значения тензора \mathbf{J}_0 в этих же осях, равные соответственно $A - I, B - I, C - I$. Уравнения (3.1) в скалярной записи примут вид

$$\begin{aligned} A_0p' + (C_0 - B_0)qr &= k(p_1 - p), & I(p_1' + qr_1 - rq_1) &= k(p - p_1) \\ B_0q' + (A_0 - C_0)rp &= k(q_1 - q), & I(q_1' + rp_1 - pr_1) &= k(q - q_1) \\ C_0r' + (B_0 - A_0)pq &= k(r_1 - r), & I(r_1' + pq_1 - qp_1) &= k(r - r_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Определим возможные стационарные движения тела. Если $\boldsymbol{\omega}$ постоянно ($\boldsymbol{\omega}' = 0$), то из первого уравнения (3.1) следует, что $\boldsymbol{\omega}_1$ также постоянно, и $\boldsymbol{\omega}_1' = 0$. Тогда, умножая обе части второго уравнения (3.1) скалярно на $\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}$, получим $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}$. Из уравнений (3.2) видно, что такое движение возможно лишь в том случае, когда вращение происходит вокруг одной из главных осей инерции системы. Таким образом, единственно возможные стационарные движения системы, как и для тела с вязкой жидкостью, — это равномерные вращения системы как твердого целого вокруг одной из главных осей инерции.

Исследуем устойчивость этих движений. Пусть невозмущенное движение — вращение системы вокруг оси x_1 с постоянной угловой скоростью ω_0 , описываемое равенствами

$$p = p_1 = \omega_0, \quad q = q_1 = r = r_1 = 0 \quad (\omega_0 \neq 0) \quad (3.3)$$

Положим в возмущенном движении $p = \omega_0 + x$, $p_1 = \omega_0 + y$ и линеаризуем уравнения (3.2) около решения (3.3)

$$\begin{aligned} A_0x' &= k(y - x), & Iy' &= k(x - y) \\ B_0q' + (A_0 - C_0)\omega_0r &= k(q_1 - q), & Iq_1' + I\omega_0(r - r_1) &= k(q - q_1) \\ C_0r' + (B_0 - A_0)\omega_0q &= k(r_1 - r), & Ir_1' + I\omega_0(q_1 - q) &= k(r_1 - r) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Верхних два уравнения (3.4) независимы от остальных четырех уравнений, и поэтому характеристическое уравнение для системы (3.4) распадается на два уравнения. После раскрытия определителей характеристические уравнения приводятся к виду

$$\begin{aligned} A_0 I \lambda^2 + k (A_0 + I) \lambda &= 0, \quad a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \\ a_0 &= B_0 C_0 I^2, \quad a_1 = I k (2 B_0 C_0 + B_0 I + C_0 I) \\ a_2 &= I^2 \omega_0^2 [(A_0 - B_0) (A_0 - C_0) + B_0 C_0] + k^2 (B_0 + I) (C_0 + I) \\ a_3 &= I \omega_0^2 k [2 (A_0 - B_0) (A_0 - C_0) + I (A_0 - B_0) + I (A_0 - C_0)] \\ a_4 &= \omega_0^2 (I^2 \omega_0^2 + k^2) (A_0 - B_0) (A_0 - C_0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нулевой корень первого уравнения (3.5) соответствует тому, что начальное возмущение кинетического момента всей системы будет сохраняться постоянным. Ввиду наличия нулевого корня, из рассмотрения линеаризованной системы (3.4) можно получить лишь необходимые, но не достаточные условия устойчивости движения (3.3). Для устойчивости необходимо, чтобы вещественные части всех корней λ уравнений (3.5) были неположительны: $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Для корней первого уравнения (3.5) это условие выполняется при $k \geq 0$. Чтобы оно имело место и для второго уравнения, необходимо, чтобы были выполнены условия Лъенара — Шипара [4], в которых можно допустить знаки равенства, так как мы требуем неравенств $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, а не $\operatorname{Re} \lambda < 0$, как обычно.

Поскольку $a_0 > 0$, условия Лъенара — Шипара для второго уравнения (3.5) примут вид [4]

$$a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0, \quad a_4 \geq 0, \quad a_1 a_2 a_3 \geq a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 \quad (3.6)$$

Используя формулы (3.5), последнее неравенство (3.6) после громоздких, но элементарных алгебраических преобразований можно привести к виду

$$\begin{aligned} 2 I^2 \omega_0^2 (A_0 - B_0 - C_0)^2 [B_0 (A_0 - C_0) + C_0 (A_0 - B_0)] + \\ + k^2 (2 B_0 C_0 + B_0 I + C_0 I) [(A_0 - B_0) (B_0 + I) + (A_0 - C_0) (C_0 + I)] \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из условия $a_4 \geq 0$ следует, что необходимо либо $A_0 \leq B_0$ и $A_0 \leq C_0$, либо $A_0 \geq B_0$ и $A_0 \geq C_0$. Но в первом случае, как легко видеть, нарушается условие (3.7), а во втором случае при $k \geq 0$ все условия (3.6), (3.7) оказываются выполненными. Неравенства $k \geq 0$, $A_0 \geq B_0$, $A_0 \geq C_0$ и являются необходимыми условиями устойчивости движения (3.3).

Переходя к достаточным условиям, заметим, что система (3.2) имеет первый интеграл

$$\begin{aligned} K^2 = (J_0 \omega + I \omega_1)^2 &= (A_0 p + I p_1)^2 + (B_0 q + I q_1)^2 + \\ &+ (C_0 r + I r_1)^2 = \text{const} \end{aligned} \quad (3.8)$$

выражающий сохранение кинетического момента всей системы. Кинетическая энергия E , определяемая равенством

$$2E = A_0 p^2 + B_0 q^2 + C_0 r^2 + I (p_1^2 + q_1^2 + r_1^2) \quad (3.9)$$

как нетрудно проверить, не возрастает при движении в силу уравнений (3.2), т. е. $E' \leq 0$, если $k \geq 0$. Составим, следуя идее метода Четаева, функцию Ляпунова

$$V = 2 (A_0 + I) E - K^2 + [K^2 - (A_0 + I)^2 \omega_0^2]^2 \quad (3.10)$$

Нетрудно убедиться, что функция V обращается в нуль в невозмущенном движении (3.3). В возмущенном движении сделаем, как и выше, замену $p = \omega_0 + x$, $p_1 = \omega_0 + y$ в равенствах (3.8), (3.9) и запишем V из (3.10) как функцию переменных x, y, q, q_1, r, r_1 . При этом линейные члены взаимно уничтожаются, и после группировки подобных членов получим

$$\begin{aligned} V = & [A_0 I (x - y)^2 + 4\omega_0^2 (A_0 + I)^2 (A_0 x + Iy)^2] + \\ & + [B_0 (A_0 + I - B) q^2 - 2B_0 I q q_1 + A_0 I q_1^2] + \\ & + [C_0 (A_0 + I - C_0) r^2 - 2C_0 I r r_1 + A_0 I r_1^2] + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Точками обозначены члены третьего и высших порядков малости. Первая квадратная скобка в (3.11) — положительно определенная (при $\omega_0 \neq 0$) квадратичная форма от x, y . Для положительной определенности двух других квадратичных форм в (3.11) достаточно потребовать

$$A_0 (A_0 + I - B_0) > B_0 I, \quad A_0 (A_0 + I - C_0) > C_0 I$$

Раскрывая скобки и сокращая на множитель $A_0 + I$, приведем эти неравенства к виду $A_0 > B_0, A_0 > C_0$. При этих условиях функция V будет положительно определенной. Так как $(K^2)' = 0$, а $E' \leq 0$ при $k \geq 0$, то производная функции (3.10) в силу уравнений движения неположительна: $V' \leq 0$ при $k \geq 0$. По теореме Ляпунова движение при указанных условиях ($\omega_0 \neq 0, k \geq 0, A_0 > B_0, A_0 > C_0$) будет устойчивым. Заметим, что неравенства $A_0 > B_0, A_0 > C_0$ эквивалентны неравенствам $A > B, A > C$ для главных моментов инерции всей системы.

Таким образом, для устойчивости стационарного вращения свободного твердого тела с демпфером вокруг оси x_1 (движение (3.3)) при $\omega_0 \neq 0, k \geq 0$ необходимо выполнение условий $A \geq B, A \geq C$ и достаточно, чтобы имели место строгие неравенства $A > B, A > C$. Другими словами, устойчивое стационарное вращение свободного твердого тела с демпфером может происходить только вокруг оси наибольшего главного момента инерции. Отметим, что для стационарных вращений свободного твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, в общем случае имеют место такие же ($A > B, A > C$) достаточные условия устойчивости [2], а при большой вязкости жидкости [3], и необходимые условия устойчивости ($A \geq B, A \geq C$).

Поступила 22 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Деятельность Михаила Алексеевича Лаврентьева в Академии наук СССР. ПМТФ, 1960, № 3.
2. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Изд-во «Наука», 1965.
3. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд-во «Наука», 1966.