

УДК 539.375

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ДИСКА, ПОСАЖЕННОГО НА ВРАЩАЮЩИЙСЯ ВАЛ

В. М. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан  
E-mail: irakon63@hotmail.com

Рассмотрена плоская задача механики разрушения для кругового диска, посаженного на вращающийся вал. Считается, что диск насажен на вал с натягом, а вблизи внутренней поверхности диска имеется  $N$  произвольно размещенных прямолинейных трещин длиной  $2l_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). На основе минимаксного критерия проведено теоретическое исследование натяга соединения диска с вращающимся валом, обеспечивающего минимизацию параметров разрушения (коэффициента интенсивности напряжений) диска. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования. Рассмотрен упрощенный способ минимизации параметров разрушения диска.

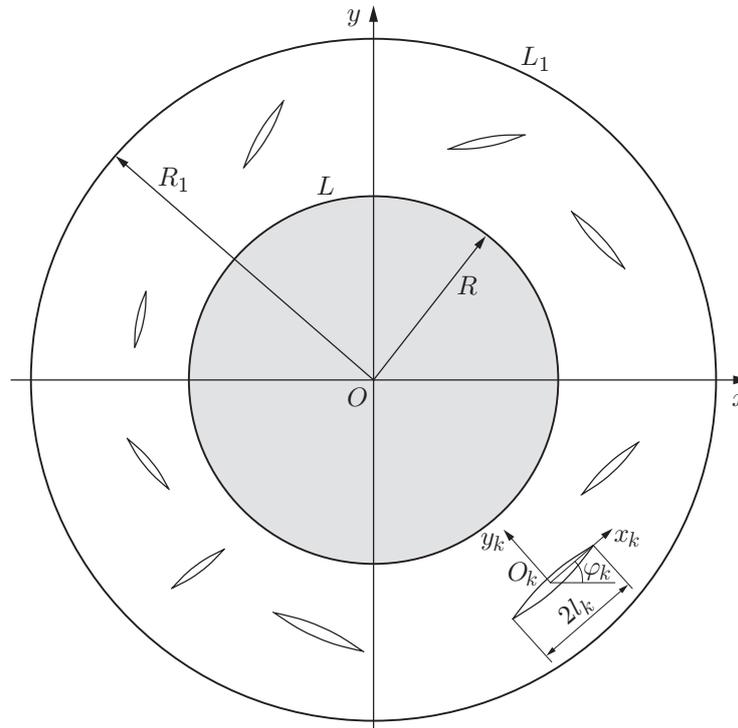
Ключевые слова: диск, вращающийся вал, трещины, натяг посадки, оптимальное проектирование.

**Введение.** Одной из основных деталей турбины является диск, посаженный на вал. При вращении в диске возникают инерционные напряжения, причем требование прочности диска ограничивает величину допустимой угловой скорости вращения. Ресурс работы соединения диска с вращающимся валом определяется распределением напряжений в зонах взаимодействия деталей такого соединения. На современном этапе развития техники большое значение имеет оптимальное проектирование деталей машин, обеспечивающее увеличение эффективности их работы. Повышением работоспособности диска (ротора), посаженного на вращающийся вал, можно управлять, меняя конструкторско-технологические решения, в частности геометрию (натяг) соединения элементов. Решению подобных задач механики посвящены работы [1–9].

При работе диска (ротора), посаженного на вал, в процессе нагружения разрушение диска происходит путем образования микротрещин, с которыми он продолжает работать в течение значительного времени. Для того чтобы установить, что предполагаемые исходные трещины, имеющие наиболее неблагоприятное расположение, не будут расти до критических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока эксплуатации, необходимо выполнить предельный анализ диска.

**Постановка задачи.** Рассмотрим напряженно-деформированное состояние кругового диска, посаженного на вал. Диск вращается вместе с валом с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной плоскости вала и проходящей через ее центр. Режимы работы диска и вала, в которых могут возникнуть остаточные деформации, считаются недопустимыми.

Для диска и вала примем полярную систему координат  $(r, \theta)$ , выбрав начало координат в центре концентрических окружностей  $L$  и  $L_1$  с радиусами  $R$  и  $R_1$  соответственно (см. рисунок). Считается, что диск соединен с валом с помощью посадки с натягом. Функция натяга  $g(\theta)$  заранее неизвестна и подлежит определению из дополнительного условия. Для упрощения задачи принято, что диск и вал находятся в условиях плоской деформации



Расчетная схема задачи

под действием самоуравновешенной системы внешних нормальных и касательных усилий, приложенных к внешней круговой границе (контур  $L_1$ ) диска. Это позволяет пренебречь пространственным напряженным состоянием в вале в окрестности диска, посаженного с натягом. Следует отметить, что в случае, когда короткий диск (ротор) посажен на значительно более длинный вал, полученные в данной работе формулы для расчета натяга в предположении, что диск и вал имеют одинаковую длину, являются приближенными. Вследствие сложности решения трехмерной задачи оптимизации ограничимся плоским приближением.

Пусть в упругом круговом диске имеется  $N$  прямолинейных трещин длиной  $2l_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). В центрах трещин поместим начала локальных систем координат  $x_k O_k y_k$ , оси  $O_k x_k$  которых совпадают с направлениями трещин и образуют углы  $\varphi_k$  с осью  $Ox$  (см. рисунок). Считается, что берега трещин свободны от внешних нагрузок.

Для диска, посаженного на вращающийся вал, граничные условия задачи теории упругости имеют следующий вид:

— при  $r = R_1$

$$\sigma_r = f_1(\theta), \quad \tau_{r\theta} = f_2(\theta); \quad (1)$$

— при  $r = R$

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \sigma_r^b - i\tau_{r\theta}^b, \quad u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = g(\theta); \quad (2)$$

— на берегах трещин

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, u_2, v_2$  — компоненты напряжений и перемещений для диска;  $\sigma_r^b, \sigma_\theta^b, \tau_{r\theta}^b, u_1, v_1$  — компоненты напряжений и перемещений для вала;  $g(\theta)$  — искомая функция натяга;  $i = \sqrt{-1}$ .

Искомая комплексная функция  $g(\theta)$ , характеризующая скачки смещений при переходе через линию  $L$  раздела сред, зависит от геометрии соединяемых деталей до деформации и от способа, которым были приведены в соприкосновение точки, принадлежащие контурам сечения вала и внутреннему контуру диска.

Постановку задачи нужно дополнить условием (критерием), позволяющим определить функцию натяга посадки диска на вал.

Согласно теории квазихрупкого разрушения Ирвина — Орована (см. [10]) параметром, характеризующим напряженное состояние в окрестности вершины трещины, является коэффициент интенсивности напряжений. Следовательно, можно считать, что разрушение диска происходит в тот момент, когда коэффициент интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины достигает максимального значения.

Исследовав основные параметры разрушения и влияние на них натяга посадки диска на вал, свойств материалов и других факторов, можно управлять разрушением, меняя конструкторско-технологические решения, в частности натяг посадки. В качестве критерия определения натяга посадки (функции  $g(\theta)$ ) примем условие минимизации максимального значения коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины в диске. Минимизация максимального значения коэффициента интенсивности напряжений способствует повышению эффективности работы диска, посаженного на вращающийся вал. Требуется определить натяг посадки  $g(\theta)$ , так чтобы созданное им в процессе нагружения напряженное поле препятствовало росту трещин. Не нарушая общности поставленной задачи, полагаем, что искомая функция натяга  $g(\theta)$  может быть представлена в виде ряда Фурье. Следовательно, коэффициенты  $A_k^H = \alpha_k + i\beta_k$  разложения искомой функции натяга нужно выбрать таким образом, чтобы обеспечивалась минимизация максимального значения коэффициента интенсивности напряжений. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию  $g(\theta)$  натяга посадки.

**Случай одной трещины.** Для решения поставленной задачи оптимального проектирования необходимо решить задачу механики разрушения для диска, посаженного на вращающийся вал. В рассматриваемом случае при наличии объемных сил имеем уравнения плоской теории упругости. Напряженное состояние во вращающемся круговом диске представим в виде

$$\sigma_r = \sigma_r^0 + \sigma_r^1, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^1, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 + \tau_{r\theta}^1,$$

соответственно для вала имеем

$$\sigma_r^b = \sigma_r^{b0} + \sigma_r^{b1}, \quad \sigma_\theta^b = \sigma_\theta^{b0} + \sigma_\theta^{b1}, \quad \tau_{r\theta}^b = \tau_{r\theta}^{b0} + \tau_{r\theta}^{b1}.$$

Здесь величины  $\sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0$  и  $\sigma_r^{b0}, \sigma_\theta^{b0}, \tau_{r\theta}^{b0}$  описывают напряженное состояние вращающихся диска и вала соответственно (выражения для этих напряжений известны [11]);  $\sigma_r^1, \sigma_\theta^1, \tau_{r\theta}^1$  и  $\sigma_r^{b1}, \sigma_\theta^{b1}, \tau_{r\theta}^{b1}$  — компоненты напряжений, вызванных наличием натяга посадки, трещин и внешней нагрузки.

Аналогично можно представить компоненты вектора перемещений для диска и вала.

Краевые условия задачи (1)–(3) с помощью формул Колосова — Мусхелишвили [11] можно записать в виде граничной задачи для отыскания двух пар комплексных потенциалов  $\Phi(z), \Psi(z)$  для диска и  $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$  для вала:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau_1) + \overline{\Phi(\tau_1)} - [\bar{\tau}_1 \Phi'(\tau_1) + \Psi(\tau_1)] e^{2i\theta} &= f_1(\theta) - if_2(\theta), \\ \Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau} \Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} &= \Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\bar{\tau} \Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varkappa \overline{\Phi(\tau)} - \Phi(\tau) + [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} &= \\ &= (G/G_0)\{\varkappa_0 \overline{\Phi_0(\tau)} - \Phi_0(\tau) + [\bar{\tau}\Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta}\} + 2Gg'(\tau); \\ \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} &= -(\sigma_{y_1}^0 - i\tau_{x_1y_1}^0). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\varkappa = 3 - 4\mu$ ;  $\varkappa_0 = 3 - 4\mu_0$ ;  $\mu, \mu_0$  — коэффициенты Пуассона материалов диска и вала соответственно;  $G, G_0$  — модули сдвига материалов диска и вала соответственно;  $\tau_1 = R_1 \exp(i\theta)$ ;  $\tau = R \exp(i\theta)$ ;  $t$  — аффикс точек берегов трещины.

Комплексные потенциалы  $\Phi(z), \Psi(z)$  и  $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$  ищутся в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), & \Psi(z) &= \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z), \\ \Phi_1(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k, & \Psi_1(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \\ \Phi_2(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{g_1(t) dt}{t - z_1}, & \Psi_2(z) &= \frac{1}{2\pi} e^{-2i\alpha_1} \int_{-l_1}^{l_1} \left( \frac{\overline{g_1(t)}}{t - z_1} - \frac{\overline{T_1} e^{i\alpha_1}}{(t - z_1)^2} g_1(t) \right) dt, \\ \Phi_3(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \left[ \left( -\frac{1}{z} - \frac{\overline{T_1}}{1 - z\overline{T_1}} \right) e^{i\alpha_1} g_1(t) + e^{-i\alpha_1} \overline{g_1(t)} \frac{1 - T_1\overline{T_1}}{\overline{T_1}(1 - z\overline{T_1})^2} \right] dt, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(z) &= \frac{1}{2\pi z} \int_{-l_1}^{l_1} \left[ g_1(t) e^{i\alpha_1} \left( \frac{1}{z\overline{T_1}} - \frac{2}{z^2} - \frac{\overline{T_1}}{z(1 - z\overline{T_1})} + \frac{\overline{T_1}^2}{(1 - z\overline{T_1})^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\alpha_1} \overline{g_1(t)} \left( \frac{1 - T_1\overline{T_1}}{z\overline{T_1}(1 - z\overline{T_1})^2} - \frac{1}{1 - z\overline{T_1}} - \frac{2(1 - T_1\overline{T_1})}{(1 - z\overline{T_1})^3} \right) \right] dt; \\ \Phi_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, & \Psi_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $T_1 = t e^{i\alpha_1} + z_1^0$ ;  $z_1 = e^{-i\alpha_1}(z - z_1^0)$ ;  $g_1(x_1)$  — искомая функция, характеризующая разрыв смещений при переходе через линию трещины:

$$g_1(x_1) = \frac{2G}{i(1 + \varkappa)} \frac{\partial}{\partial x_1} [u_2^+(x_1, 0) - u_2^-(x_1, 0) + i(v_2^+(x_1, 0) - v_2^-(x_1, 0))].$$

С использованием выражений (6), (7) для отыскания комплексных потенциалов  $\Phi_1(z), \Psi_1(z)$  и  $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$  граничные условия (4) представим в виде

$$\Phi_1(\tau_1) + \overline{\Phi_1(\tau_1)} - [\bar{\tau}_1\Phi'_1(\tau_1) + \Psi_1(\tau_1)] e^{2i\theta} = f_1(\theta) - if_2(\theta); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_1(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} &= \\ &= \Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta} - (f_3 - if_4); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \varkappa \overline{\Phi_1(\tau)} - \Phi_1(\tau) + [\bar{\tau}\Phi'_1(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} &= \\ &= (G/G_0)\{\varkappa_0 \overline{\Phi_0(\tau)} - \Phi_0(\tau) + [\bar{\tau}\Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta}\} + 2Gg'(\tau) - (F_1 - iF_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$f_3 - if_4 = \Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_*(\tau) + \Psi_*(\tau)] e^{2i\theta},$$

$$F_1 - iF_2 = \varkappa \overline{\Phi_*(\tau)} - \Phi_*(\tau) + [\bar{\tau}\Phi'_*(\tau) + \Psi_*(\tau)] e^{2i\theta},$$

$$\Phi_*(\tau) = \Phi_2(\tau) + \Phi_3(\tau), \quad \Psi_*(\tau) = \Psi_2(\tau) + \Psi_3(\tau).$$

Левую часть краевого условия (9) обозначим  $\sigma - i\tau$ . Тогда

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta} - (f_3 - if_4) = \sigma - i\tau. \quad (11)$$

Будем считать, что на круговом контуре  $L$  ( $\tau = R \exp(i\theta)$ ) функция  $\sigma - i\tau$ , представляющая собой самоуравновешенную систему сил, действующих на вал со стороны диска, разлагается в комплексный ряд Фурье:

$$\sigma - i\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}.$$

Для определения комплексных потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  на контуре  $L$  имеем условие (11). Функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  являются аналитическими внутри поперечного сечения вала  $|z| \leq R$  и могут быть представлены рядами (7) (см. [11]). Используя метод степенных рядов [11], находим коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$  потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$ .

Для определения неизвестных величин  $A_k$  рассмотрим решение задачи для диска  $R_1 \leq |z| \leq R$ . Комплексные потенциалы  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  позволяют после ряда преобразований представить граничные условия для нахождения функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  в виде (8) и в виде

$$\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_1(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}; \quad (12)$$

$$\varkappa \overline{\Phi_1(\tau)} - \Phi_1(\tau) + [\bar{\tau}\Phi'_1(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta} + 2Gg'(\tau) - (F_1 - iF_2). \quad (13)$$

Здесь

$$A_0^* = \frac{G}{G_0} (\varkappa_0 \bar{a}_0 - a_0 + b_2 R^{-2}), \quad A_1^* = \frac{G}{G_0} (\varkappa_0 \bar{a}_1 R^{-1} + b_1 R^{-1}), \quad A_2^* = \frac{G}{G_0} (\varkappa_0 \bar{a}_2 R^{-2} + b_0),$$

$$A_{-k}^* = \frac{G}{G_0} (b_{k+2} R^{-(k+2)} - a_k (1+k) R^{-k}), \quad A_k^* = \frac{G}{G_0} \varkappa_0 \bar{a}_k R^{-k}, \quad k \geq 3.$$

Будем считать, что функции  $f_1(\theta) - if_2(\theta)$ ,  $g'(\tau)$ ,  $f_3 - if_4$ ,  $F_1 - iF_2$  разлагаются в ряды Фурье:

$$f_1 - if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_k e^{ik\theta}, \quad g'(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{\text{H}} e^{ik\theta},$$

$$-(F_1 - iF_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{ik\theta}, \quad f_3 - if_4 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{ik\theta}.$$

Здесь коэффициенты  $D_k$  и  $B_k$  зависят от искомой функции  $g_1(t)$  и определяются с помощью теории вычетов.

Краевые условия (8), (12) позволяют определить коэффициенты  $d_k$ ,  $c_k$ , а граничное условие (13) — величины  $A_k$ . В результате находим

$$d_0 = \frac{A'_0 R_1^2 - A_0 R^2}{2(R_1^2 - R^2)}, \quad d_{-1} = \frac{\bar{A}_1 R}{1 + \varkappa}, \quad c_{-1} = \varkappa \frac{A_1 R}{1 + \varkappa}, \quad d_1 = \frac{\bar{M}_{-1}}{R_1^4 - R^4} - \frac{2A_1 R_1}{(1 + \varkappa)(R_1^2 + R^2)},$$

$$d_k = \frac{(1+k)(R_1^2 - R^2)M_k - \bar{M}_{-k}(R_1^{-2k+2} - R^{-2k+2})}{(1-k^2)(R_1^2 - R^2)^2 - (R_1^{2k+2} - R^{2k+2})(R_1^{-2k+2} - R^{-2k+2})} \quad (k = \pm 2, \pm 3, \dots),$$

$$c_{-2}R_1^{-2} = 2d_0 - A'_0, \quad c_{k-2}R^{k-2} = (1-k)d_kR^k + \bar{d}_{-k}R^{-k} - A_k,$$

$$M_k = A'_kR_1^{-k+2} - A_kR^{-k+2}, \quad (1+k)\bar{d}_0 = A_0 + A_0^* + 2GA_0^H + D_0,$$

$$(1+k)\bar{d}_kR^k = A_{-k} + A_{-k}^* + 2GA_{-k}^H + D_{-k}, \quad (1+k)\bar{d}_{-k}R^{-k} = A_k + A_k^* + 2GA_k^H + D_k.$$

В правые части формул для определения коэффициентов  $a_k, b_k, c_k, d_k, A_k$  входят коэффициенты разложений функции натяга  $g(\theta)$ , а также интегралы от искомой функции  $g_1(t)$ .

Требую, чтобы функции (6) удовлетворяли граничным условиям (4) на берегах трещины, получаем комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $g_1(t)$ :

$$\int_{-l_1}^{l_1} [R_{11}(t, x_1)g_1(t) + S_{11}(t, x_1)\overline{g_1(t)}] dt = \pi f_0(x_1), \quad |x_1| \leq l_1, \quad (14)$$

$$f_0(x_1) = -\sigma_{y_1}^0 - [\Phi_1(x_1) + \overline{\Phi_1(x_1)} + x_1\overline{\Phi_1'(x_1)} + \overline{\Psi_1(x_1)}].$$

Здесь учтено, что  $\tau_{x_1y_1}^0 = 0$ ; переменные  $x_1, t, l_1$  — безразмерные величины, отнесенные к  $R$ ; величины  $R_{nk}, S_{nk}$  ( $n = k = 1$ ) определяются по формулам (VI.61) в работе [12].

К сингулярному интегральному уравнению для внутренней трещины следует добавить равенство, представляющее собой условие однозначности смещений при обходе контура трещины:

$$\int_{-l_1}^{l_1} g_1(t) dt = 0. \quad (15)$$

Сингулярное интегральное уравнение (14) при условии (15) сводится к системе  $M$  алгебраических уравнений [12, 13] для определения  $M$  неизвестных  $g_1(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ):

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_1 [g_1(t_m)R_{11}(l_1t_m, l_1x_r) + \overline{g_1(t_m)}S_{11}(l_1t_m, l_1x_r)] = f_0(x_r) \quad (r = 1, 2, \dots, M-1), \quad (16)$$

$$\sum_{m=1}^M g_1(t_m) = 0.$$

Здесь  $t_m = \cos((2m-1)\pi/(2M))$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ );  $x_r = \cos(\pi r/M)$  ( $r = 1, 2, \dots, M-1$ ).

Если в (16) перейти к комплексно-сопряженным величинам, получим еще  $M$  алгебраических уравнений. Полученные системы уравнений относительно  $a_k, b_k, d_k, c_k, A_k, g_1(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) позволяют при заданном натяге  $g(\theta)$  найти напряженно-деформированное состояние диска при наличии трещины в нем и тем самым коэффициенты интенсивности напряжений.

В поставленной задаче оптимального проектирования коэффициенты  $A_k^H = \alpha_k + i\beta_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) подлежат определению. Следовательно, полученная алгебраическая система пока не замкнута. Для коэффициентов интенсивности напряжений имеем:

— в окрестности правой вершины

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\pi l_1} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1(t_m) \operatorname{ctg} \left( \frac{2m-1}{4M} \pi \right); \quad (17)$$

— в окрестности левой вершины трещины

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\pi l_1} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1(t_m) \operatorname{tg} \left( \frac{2m-1}{4M} \pi \right).$$

Для построения недостающих уравнений минимизируем максимальное значение коэффициента интенсивности напряжений:

$$K_{p \max} \rightarrow \min$$

при следующих ограничениях: отсутствие пластических деформаций; условие непрерывности нормальных перемещений в диске и вале  $u_{n1} = u_{n2}$ , обеспечивающее отсутствие разрывов границ диска и вала; условие  $K_{p \max} \leq K_{th}$  ( $K_{th}$  — характеристика порогового значения вязкости разрушения материала диска, определяемая в экспериментах).

Задача оптимизации сводится к определению коэффициентов (параметров управления) разложения функции натяга  $g(\theta)$  в ряд Фурье. Величины  $g_1(t_m)$  линейно зависят от коэффициентов  $A_k^H$  ряда Фурье функции натяга  $g(\theta)$ . Следовательно, коэффициент интенсивности напряжений (17) (целевая функция) также линейно зависит от параметров управления (управляющих переменных). Таким образом, с использованием минимаксного критерия задача оптимизации сводится к задаче линейного программирования.

Аналогично рассматривается задача для случая, когда имеет место неравномерный нагрев диска.

Численный расчет выполнялся с помощью симплексного алгоритма. Расчеты проводились для диска из стали марки ЭИ417 и вала из стали марки Ст. 45. Были приняты следующие параметры задачи:  $R_1 = 0,74$  м,  $R = 0,03$  м; в случае одной трещины  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $l_1/(R_1 - R) = 0,1$ .

На внешнем контуре диска нагрузка считалась изменяющейся по закону  $\sigma_r = p_0 \sin p_1 \theta$ ,  $\tau_{r\theta} = 0$ , где  $p_0, p_1$  — заданные параметры. Центр трещины расположен в точке  $z_1^0 = (R + a_1^0) e^{i\pi\theta/18}$ , где  $a_1^0 = 0,2(R_1 - R)$ .

В результате расчетов получены следующие значения коэффициентов Фурье функции  $g(\theta)$  в случае оптимального натяга:  $\alpha_0 = 0,098$  мм,  $\alpha_1 = 0,081$  мм,  $\alpha_2 = 0,072$  мм,  $\alpha_3 = 0,045$  мм,  $\alpha_4 = 0,027$  мм,  $\alpha_5 = 0,012$  мм,  $\beta_0 = 0,076$  мм,  $\beta_1 = 0,063$  мм,  $\beta_2 = 0,057$  мм,  $\beta_3 = 0,032$  мм,  $\beta_4 = 0,025$  мм,  $\beta_5 = 0,009$  мм.

**Случай произвольного числа трещин.** Пусть в упругом диске, посаженном на вращающийся вал, имеется  $N$  прямолинейных трещин длиной  $2l_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) (см. рисунок). Рассмотрим задачу об определении функции натяга посадки диска на вращающийся вал, обеспечивающей минимизацию максимальных значений коэффициента интенсивности напряжений в окрестностях вершин трещин. Задача для этого случая решается аналогично задаче для случая одной трещины. Комплексные потенциалы  $\Phi_2(z)$ ,  $\Psi_2(z)$  и  $\Phi_3(z)$ ,  $\Psi_3(z)$  обобщаются на случай произвольного числа трещин. Потребовав выполнения краевых условий на берегах трещин, получим систему  $N$  сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $g_k(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Систему сингулярных интегральных уравнений для внутренних трещин следует дополнить равенствами

$$\int_{-l_k}^{l_k} g_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (18)$$

Система сингулярных интегральных уравнений при условиях (18) сводится к системе  $N \times M$  алгебраических уравнений для определения  $N \times M$  неизвестных  $g_n(t_m)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$ ):

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N l_k [g_k(t_m) R_{nk}(l_k t_m, l_n x_r) + \overline{g_k(t_m)} S_{nk}(l_k t_m, l_n x_r)] = f_n(x_r),$$

$$\sum_{m=1}^M g_n(t_m) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N; \quad r = 1, 2, \dots, M - 1).$$

Для коэффициентов интенсивности напряжений имеем:

— в окрестности правой вершины трещины ( $n = 1, 2, \dots, N$ )

$$K_{In} - iK_{II n} = \sqrt{\pi l_n} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_n(t_m) \operatorname{ctg} \left( \frac{2m-1}{4M} \pi \right);$$

— в окрестности левой вершины

$$K_{In} - iK_{II n} = \sqrt{\pi l_n} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_n(t_m) \operatorname{tg} \left( \frac{2m-1}{4M} \pi \right).$$

С использованием минимаксного критерия рассматриваемая задача оптимизации в случае произвольного числа трещин также сводится к задаче линейного программирования при отмеченных выше ограничениях.

Оптимальное решение (коэффициенты  $\alpha_k, \beta_k$ ) позволяет повысить несущую способность диска, посаженного на вращающийся вал.

**Упрощенный способ решения обратной задачи.** В случае нескольких трещин объем вычислений существенно возрастает. Рассмотрим упрощенный способ решения задачи определения оптимального натяга посадки диска на вал.

В разложении искомой функции натяга в ряд Фурье ограничимся количеством членов, совпадающим с числом вершин трещин. В случае  $N$  внутренних трещин в диске ограничимся  $2N$  коэффициентов разложения функции натяга в ряд Фурье. Потребуем, чтобы коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин были равны нулю. Добавляя к основным разрешающим уравнениям (о которых сказано выше)  $2N$  линейных алгебраических уравнений, получаем замкнутую алгебраическую систему для определения всех неизвестных, в том числе коэффициентов  $\alpha_k, \beta_k$  разложения функции натяга в ряд Фурье.

Пусть часть трещин  $N_1$  одним концом выходит на поверхность диска. Тогда число вершин равно  $2N - N_1$ . В случае когда часть трещин являются поверхностными, в разложении искомой функции натяга в ряд Фурье ограничимся  $2N - N_1$  коэффициентами.

Потребуем, чтобы коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин были равны нулю. Добавляя эти  $2N - N_1$  линейных алгебраических уравнений к основным разрешающим уравнениям, также получим замкнутую алгебраическую систему для определения всех неизвестных.

Упрощенный способ решения задачи минимизации параметров разрушения диска, посаженного на вал, целесообразно применять при наличии большого числа трещин, когда использование симплекс-метода требует проведения большого объема вычислений. В этом случае для численного решения полученных систем используется метод Гаусса с выбором главного элемента. Следовательно, предложенные способы минимизации параметров разрушения дополняют друг друга.

Итак, полученные в работе основные разрешающие уравнения позволяют при заданном натяге посадки диска на вал путем численных расчетов, определяя коэффициенты интенсивности напряжений, прогнозировать рост имеющихся трещин в диске, установить допустимый уровень дефектности и вычислить максимальные значения рабочих нагрузок, обеспечивающие достаточный запас надежности. Решение задачи оптимального проектирования по определению натяга посадки диска на вал позволяет на стадии проектирования выбрать оптимальные геометрические параметры элементов соединения диска с валом, обеспечивающие повышение несущей способности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Mirsalimov V. M., Allahyarov E. A.** The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching // Intern. J. Fracture. 1996. V. 79, N 1. P. R.17–R.21.
2. **Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М.** Обратная задача теории упругости для составного цилиндра контактной пары // Механика-машиностроение. 2002. № 2. С. 5–7.
3. **Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М.** Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию со дня рожд. А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 196–207.
4. **Гаджиев Г. Х.** Определение оптимального натяга для составного цилиндра контактной пары с учетом температурных напряжений и шероховатого внутреннего контура // Изв. вузов. Машиностроение. 2003. № 7. С. 15–23.
5. **Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М.** Оптимальное проектирование контактной пары составной цилиндр — плунжер // Трение и износ. 2004. Т. 25, № 5. С. 466–473.
6. **Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М.** Об одном способе снижения износа втулки составного цилиндра контактной пары // Тр. Междунар. конгр. “Механика и трибология транспортных систем — 2003”, Ростов-на-Дону, 10–13 сент. 2003 г. Ростов н/Д: Рост. гос. ун-т путей сообщ., 2003. Т. 1. С. 219–221.
7. **Гаджиев Г. Х.** Оптимальное проектирование составного цилиндра контактной пары // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2003. № 5. С. 81–86.
8. **Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М.** Минимизация износа внутренней поверхности втулки составного цилиндра контактной пары // Трение и износ. 2004. Т. 25, № 3. С. 231–237.
9. **Мирсалимов В. М., Бахышов Ф. А.** Обратная задача механики разрушения составной перфорированной пластины при изгибе // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2005. № 5. С. 28–37.
10. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
11. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
12. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. Киев: Наук. думка, 1976.
13. **Мирсалимов В. М.** Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.

*Поступила в редакцию 25/IV 2006 г.,  
в окончательном варианте — 29/V 2008 г.*