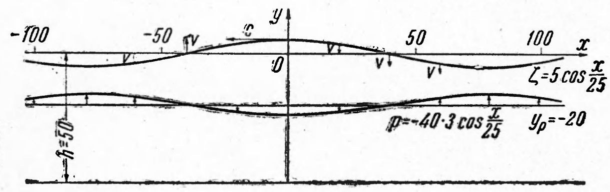
ПМТФ, № 2, 1960

# О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ РАВНОМЕРНО ЗАВИХРЕННОЙ ЖИДКОСТИ

*Сунь Цао*

(*Новосибирск*)

В работе [1] рассмотрено поведение гравитационных волн на поверхности жидкости с горизонтальным течением, линейно-изменяющимся с глубиной. Там были изучены задача об установившихся волнах конечной амплитуды и задача о распространении линейного возмущения (задача Коши — Пуассона). Дальнейшее исследование приводит к мысли, что само линейно-изменяющееся течение, т. е. равномерно завихренная жидкость, даже в случае отсутствия гравитации и капиллярности имеет восстанавливающую силу, которая может служить причиной образования поверхностных волн от возмущения. Этому вопросу и посвящена данная заметка.




Фиг. 1

§ 1. Рассмотрим плоскую задачу (фиг. 1). Область $-h\leqslant y\leqslant 0$ наполнена невесомой жидкостью. Выразим поле скоростей следующим образом:

$$u=by+\varphi_x,\qquad v=\varphi_y,\qquad \Omega=v_x-u_y=-b \tag{1.1}$$

Здесь $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скоростей волнового движения, $b$ — постоянная интенсивность вихря скорости; без ограничения общности считаем $b>0$. Для функции $\varphi$ из уравнения неразрывности получается уравнение Лапласа

$$\triangle\varphi=0 \tag{1.2}$$

Чтобы получить уравнение для $p$, рассмотрим уравнение движения

$$\mathbf{v}_t+\nabla\left[\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right]-\mathbf{v}\times\Omega=-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

Поставив (1.1) сюда, получим

$$\nabla\left[\varphi_t+\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{p}{\rho}\right]-b^2y\mathbf{j}+b(\varphi_y\mathbf{i}-\varphi\mathbf{j})=0$$

Интегрируя и включая произвольную постоянную в $\psi$, имеем уравнение для $p$:

$$\varphi_t+\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{p}{\rho}-\frac{b^2y^2}{2}-b\psi=0 \tag{1.3}$$

где $\psi(x, y, t)$ — функция, сопряженная с $\varphi$, т. е.

$$\varphi_x=\psi_y,\qquad \varphi_y=-\psi_x$$

Граничные условия имеем в виде

$$\varphi_y=0\quad \text{на } y=-h \tag{1.4}$$

$$p=0\quad \text{на } y=\zeta(x, t)\ \text{(свободная поверхность)} \tag{1.5}$$

Ограничимся изучением линейной волны $|\varphi| = |\zeta| = O(1)$, поставив (1.1) и (1.5) в (1.3), получим верхнее граничное условие:

$$\varphi_t - b\psi = 0 \quad \text{на } y = 0 \tag{1.6}$$

Таким образом, задача свелась к отысканию гармонической функции $\varphi$, удовлетворяющей граничным условиям (1.4) и (1.6).

Общим решением этой задачи, как известно, является

$$\begin{aligned} \varphi &= A \operatorname{ch} k (y + h) \sin k (x - ct + \varepsilon) \\ \psi &= A \operatorname{sh} k (y + h) \cos k (x - ct + \varepsilon) \end{aligned} \qquad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right) \tag{1.7}$$

где $A$, $\varepsilon$ — произвольные постоянные, $\lambda$ — длина волны, при условии, что скорость волны $c$ удовлетворяет равенству:

$$c = -\frac{b}{k} \operatorname{th} kh \tag{1.8}$$

Свободная поверхность $\zeta(x, t)$ найдется из соотношения вертикальной скорости

$$\zeta_t = \psi_y \quad \text{на } y = 0 \tag{1.9}$$

а именно:

$$\zeta(x, t) = -\frac{Ak \operatorname{ch} kh}{b} \cos k (x - ct + \varepsilon) = a \cos k (x - ct + \varepsilon) \tag{1.10}$$

где $a$ — амплитуда волны. Поставив выражения $\varphi$ и $\psi$ в (1.1) и (1.3), получим поле скоростей $v(x, y, t)$ и давление $p(x, y, t)$

$$u = b\left[y - a \frac{\operatorname{sh} k (y + h)}{\operatorname{ch} kh} \cos k (x - ct + \varepsilon)\right] \tag{1.11}$$

$$v = -ab \frac{\operatorname{sh} k (y - h)}{\operatorname{ch} kh} \sin k (x - ct + \varepsilon)$$

$$p = \frac{\rho b^2 y}{\operatorname{ch} kh}\left[\operatorname{ch} k (y + h) - \frac{\operatorname{th} ky}{ky} \frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{ch} kh}\right] \zeta$$

§ 2. Проведем анализ полученного решения 1°. Рассмотрим давление $p$ на какой-нибудь (фиг. 1) горизонтальной линии $y_p < 0$. Так как

$$\frac{\operatorname{th} ky}{ky} \frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{ch} kh} < 1, \qquad \operatorname{ch} k (y_p + h) \geqslant 1 \tag{2.1}$$

Поэтому из (1.11) видно, что $p$ имеет противоположный знак относительно возмущения свободной поверхности $\zeta$. Вспомним, что на $y = \zeta(x, t)$ давление $p$ равно нулю, т. е. $p$ на $y_p$ равно той силе, которая действует на жидкую полосу $\zeta \geqslant y \geqslant y_p$. Можно полагать, что именно эта восстанавливающая сила вызывает волновое движение. Появление этой силы связано с нарушением равномерности вихря скорости. Интересно отметить, что $p \sim b^2 a$.

2°. Из (1.10) и (1.11) видно, что и на свободной поверхности $\zeta$ равна нулю Это значит, что частицы жидкости на $\zeta$ колеблются только вертикально (конечно речь идет о линейном приближении). А в случаях гравитационных и капиллярных волн имеется горизонтальное колебание жидкой частицы на свободной поверхности. Для иллюстрации на фиг. 1 приведены результаты вычислений для конкретного примера, в котором все величины выражены в системе единиц C.G.S.

$$b = 1, \quad h = 50, \quad y_p = -20, \quad k = 0.04, \quad a = 5, \quad t = \varepsilon = 0, \quad c = -24.3$$

Вертикальные скорости некоторых частиц на свободной поверхности $v(x)$ выражены через стрелки на фиг. 1.

3°. Наиболее специфическим характером изучаемых волн является то, что скорость волн $c$ имеет направленность, связанную с направлением вихря скорости. При сделанном предположении $b > 0$ скорость $c$

всегда отрицательна (1.8). Существует еще одна возможность, а именно величина скорости волн $c = 0$, так как решение $\varphi = 0$, $\zeta = a \cos kx$ удовлетворяет всем условиям (1.2), (1.4), (1.6) и (1.9). Это значит, что существует неподвижная волна. Вернемся к этому вопросу более детально при изучении задачи Коши — Пуассона.

4°. Следуя классификации волн Рэлея [2] имеем следующие типы поверхностных волн жидкости.

| $h = \text{const}$ | $h = \infty$ | $h = 0$ |
|---|---|---|
| *Волны на поверхности завихренной жидкости* | | |
| $c = -\dfrac{b\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \dfrac{2\pi h}{\lambda}$, | $c = -\dfrac{b\lambda}{2\pi} \sim \lambda'$, | $c = -bh \sim \lambda^{\circ}$ |
| $U = -bh \operatorname{sch}^2 \dfrac{2\pi h}{\lambda}$, | $U = 0$, | $U = c$ |
| *Гравитационные волны* | | |
| $c = \pm\sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \dfrac{2\pi h}{\lambda}}$, | $c = \pm\sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}} \sim \lambda^{1/2}$, | $c = \pm\sqrt{gh} \sim \lambda^{\circ}$ |
| $U = \dfrac{c}{2}\, 1 + \dfrac{4\pi h}{\lambda} \operatorname{csh} \dfrac{4\pi h}{\lambda}$, | $U = \dfrac{c}{2}$, | $U = c$ |
| *Капиллярные волны* | | |
| $c = \pm\sqrt{\dfrac{2\pi T}{\lambda} \operatorname{th} \dfrac{2\pi h}{\lambda}}$, | $c = \pm\sqrt{\dfrac{2\pi T}{\lambda}} \sim \lambda^{-\frac{1}{2}}$, | $c = \pm\dfrac{2\pi}{\lambda}\sqrt{Th} \sim \lambda^{-1}$ |
| $U = \dfrac{c}{2}\, 3 + \dfrac{4\pi h}{\lambda} \operatorname{csh} \dfrac{4\pi h}{\lambda}$, | $U = \dfrac{3c}{2}$, | $U = 2c$ |

Здесь групповая скорость $U$ определяется по формуле

$$U = c + k\frac{dc}{dk} \tag{2.2}$$

5°. В системе координат $oxy$, движущейся с волнами, можно изучить установившиеся волны конечной амплитуды. Вычисление показывает, что во втором приближении, относящемся к амплитуде первой гармоники $a = O(1)$, профиль волн выражается следующим образом:

$$\zeta(x) = a\cos kx + a^2 \frac{k \operatorname{cth} kh}{4}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}^2 kh} - 1\right]\cos 2kx \tag{2.3}$$

Имеем

$$1 \gtreqless \operatorname{sh}^2 kh \quad \text{при} \quad kh \lesseqgtr 0.88 \ \text{(приблизительно)}$$

Поэтому когда длина волн большая (приблизительно $\lambda > 7h$), профиль волн имеет острие вершины на $kx = 2n\pi$ и пологие ложбины на $kx = (2n+1)\pi$. А когда длина волн небольшая (приб. $\lambda < 7h$), то наоборот, профиль волн имеет пологие вершины на $kx = 2n\pi$ и острие ложбины на $kx = (2n+1)\pi$. В отличие от этого профиль гравитационных волн всегда имеет острие вершины и пологие ложбины и выражается известной формулой Стокса:

$$\zeta(x) = a\cos kx + a^2 \frac{k \operatorname{cth} kh}{4}\left(2 + \frac{3}{\operatorname{sh}^2 kh}\right)\cos 2kx$$

§ 3. Перейдем к изучению задачи Коши — Пуассона. Рассмотрим распространение линейного возмущения по поверхности равномерно завихренной жидкости с постоянной толщиной $h = \text{const}$. Задача такого типа ставится следующим образом:

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \varphi_y = 0 \quad \text{на } y = -h, \qquad \varphi_t - b\psi = 0 \quad \text{на } y = 0 \tag{3.1}$$

$$\varphi(x, 0, 0) = -\frac{\pi(x)}{\rho} = I(x), \qquad \zeta(x, 0) = f(x)$$

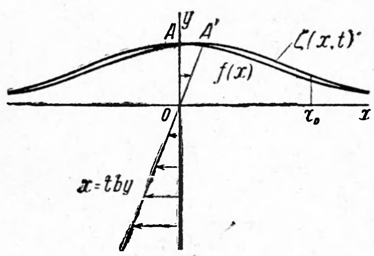
Здесь $\pi(x)$ — импульс давления на поверхности жидкости в начальный момент, $f(x)$ — начальное положение свободной поверхности жидкости. Построим решение задачи (3.1) на основании (1.7) методом Фурье

$$\varphi(x,\ y,\ t) = \int\limits_0^\infty A(k)\operatorname{ch} k(y+h)\sin k(x - ct + \varepsilon(k))\,dk \tag{3.2}$$

Отсюда, так как $\zeta_t = \varphi_y(x,\ 0,\ t)$, имеем

$$\zeta(x,\ t) = \int\limits_0^t \varphi_y(x,\ 0,\ t)\,dt + f(x) \tag{3.3}$$

Подставив (3.2) в начальное условие (3.1), получим




Фиг. 2

$$I(x) = \int\limits_0^\infty A(k)\operatorname{ch} kh \sin k(x + \varepsilon(k))\,dk \tag{3.4}$$

Коэффициенты $A(k)$ и $\varepsilon(k)$ определяются из (3.4). Таким образом найдено решение (3.3) задачи (3.1).

Чрезмерно простая зависимость $\zeta(x,\ t)$ от $f(x)$ в (3.3), естественно, вызывает наше сомнение в справедливости решения (3.2). Действительно, если $I(x) = 0$, то $A(k) = 0$, т. е. $\varphi(x,\ y,\ t) = 0$ и $\zeta(x,\ t) = f(x)$. Это значит, что форма свободной поверхности жидкости $\zeta(x,\ t)$ не меняется со временем, если только отсутствует импульсное возмущение $I(x) = 0$.

Объясним данный «парадоксальный» вывод. Если $I(x) = 0$, то $u = by$, $v = 0$ имеют место всегда. Жидкие частицы, находившиеся на линии $OA$ в момент $t = 0$, сместятся на линии $OA'$ в момент $t$ (фиг. 2). За это время $t$ свободная поверхность деформировалась с $f(x)$ до $\zeta(x,\ t)$. Так как $\overline{OA} = O(1)$, то $\overline{AA'} = tb\overline{OA} = O(1)$, или $|\overline{AA'}| \ll x_0$ ($x_0$ — нормальная величина). Отсюда

$$|\zeta(x_0,\ t) - f(x_0)| = O(2), \qquad \text{или} \qquad \zeta(x_0,\ t) = f(x_0).$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что в линейном приближении волны не могут вызываться только начальным возмущением свободной поверхности $f(x)$.

Другими словами, в отличие от гравитационных и капиллярных волн равномерно завихренная невесомая жидкость не чувствует такого возмущения. Что касается импульсного возмущения $I(x)$, то картина совсем иная. Изучим следующий пример

$$f(x) = 0, \qquad I(x) = \frac{\alpha d}{d^2 + x^2} \tag{3.5}$$

Поставив (3.5) в (3.4), получим

$$A(k) = \frac{\alpha e^{-dk}}{\operatorname{ch} kh}, \qquad \varepsilon(k) = \frac{\pi}{2k} \tag{3.6}$$

Поставив (3.6) в (3.3), получим решение:

$$\zeta(x,\ t) = \frac{\alpha}{b}\int\limits_0^\infty ke^{-dk}\left[\sin(kx + bt\operatorname{th} kh) - \sin kx\right]dk \tag{3.7}$$

Разложив $\sin(bt\,\mathrm{th}\,kh)$ и $\cos(bt\,\mathrm{th}\,kh)$ в ряды, получим:

$$\zeta(x,\ t) = \frac{\alpha}{b}\left[bt\int_0^\infty ke^{-dk}\cos kx\,\mathrm{th}\,khdk - \frac{b^2t^2}{2!}\int_0^\infty ke^{-dk}\sin kx\,\mathrm{th}^2\,khdk + \right.$$

$$\left. + \ldots + (i)^{n-1}\frac{(bt)^n}{n!}\int_0^\infty ke^{-dk+ixk}\,\mathrm{th}^n\,khdk + \ldots\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{bh^2}\sum_{n=1}^\infty (i)^{n-1}\frac{t'^n}{n!}\int_0^\infty k'e^{-pk'}\,\mathrm{th}^n\,k'dk' \qquad (3.8)$$

Здесь

$$t' = bt, \qquad k' = kh, \qquad x' = \frac{x}{h}, \qquad d' = \frac{d}{h}, \qquad p = d' - ix'$$

ряд (3.8) абсолютно сходим, так как

$$\left|\int_0^\infty k'e^{-pk'}\,\mathrm{th}^n\,k'dk'\right| \leqslant \int_0^\infty k'e^{-d'k'}dk' = \frac{1}{d'^2}$$

Все коэффициенты $k_n$ ряда (3.8) определяются следующими формулами:

$$k_n = \int_0^\infty k'e^{-pk'}\,\mathrm{th}^n\,k'dk' = -\frac{d}{dp}\left[\int_0^\infty e^{-pk'}\,\mathrm{th}^n\,k'dk'\right]$$

$$\int_0^\infty e^{-pk'}\,\mathrm{th}^n\,k'dk' = \int_0^\infty e^{-pk'}\,\mathrm{th}^{n-2}\,k'dk' - \frac{p}{n-1}\int_0^\infty e^{-pk'}\,\mathrm{th}^{n-1}\,k'dk' \qquad (3.9)$$

$$\int_0^\infty e^{-pk'}\,\mathrm{th}\,k'dk' = \frac{1}{2}L\left(\frac{p}{4}+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}L\left(\frac{p}{4}\right) - \frac{1}{p} = T(p)$$

Здесь $L(z) = d\ln\Gamma(z)/dz$ — логарифмическая производная гамма-функции. Например:

$$k_1 = -\frac{dT}{dp} = -\frac{1}{8}\left[L'\left(\frac{p}{4}+\frac{1}{2}\right) - L'\left(\frac{p}{4}\right)\right] - \frac{1}{p^2}$$

$$k_2 = \frac{1}{p^2} + T - pk_1, \qquad k_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{p^2} + \left(\frac{4}{3}+\frac{p^2}{2}\right)T - \left(\frac{4p}{3}+\frac{p^3}{6}\right)k_1$$

$$k_3 = -pT + \left(1+\frac{p^2}{2}\right)k_1, \quad k_5 = \frac{p}{12} - \left(\frac{5p}{3}+\frac{p^3}{6}\right)T + \left(1+\frac{5p^2}{6}+\frac{p^4}{24}\right)k_1$$

Как в случае гравитационных волн [3], получить полную картину $\zeta(x,\ t)$ при любой $h$ довольно трудно. Ограничимся следующими частными случаями.

1) $h = \infty$. В этом случае граничное условие (3.1) становится $\varphi \to 0$, когда $y \to -\infty$. Из (3.7) мы имеем

$$\zeta(x,\ t) = \frac{\alpha}{b}\left[\sin bt\int_0^\infty ke^{-dk}\cos kxdk - (1-\cos bt)\int_0^\infty ke^{-dk}\sin kxdk\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{b}\left[\sin bt\,\frac{d^2-x^2}{(d^2+x^2)^2} - (1-\cos bt)\,\frac{2dx}{(d^2+x^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{\sin bt}{b}\,\varphi_y(x,\ 0,\ 0) + \frac{1-\cos bt}{b}\,\varphi_x(x,\ 0,\ 0) \qquad (3.11)$$

Отсюда $\zeta(x, t) = \zeta(x, t + 2\pi/b)$, т. е. свободная поверхность колеблется с периодом $2\pi/b$. Это не удивительно (см. вывод на стр. 17) при $h = \infty$ групповая скорость $U$ (скорость распространения волновой энергии) равна нулю, следовательно, импульсное возмущение остается на месте и вызывает «стоячее» движение свободной поверхности. Когда $bt \ll 1$, исключив члены $b^3t^3$ и выше, напишем (3.11) в виде:

$$\zeta(x, t) = t\frac{\alpha(d^2 - x^2)}{(d^2 + x^2)^2} - bt^2\frac{\alpha dx}{(d^2 + x^2)^2} = t\varphi_y(x, 0, 0) + \frac{bt^2}{2}\varphi_x(x, 0, 0)$$

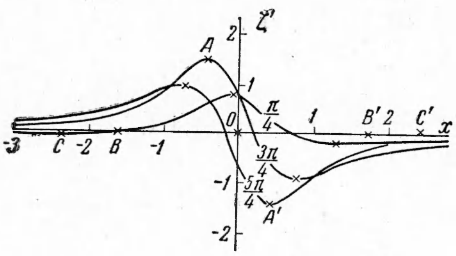
Это показывает, что в самом начале свободная поверхность двигается симметрично оси $y$ по скорости $\varphi_y(x, 0, 0)$, сообщенной ей импульсом, а потом появляется несимметричный член $^1/_2 bt^2\varphi_x(x, 0, 0)$, зависящий от завихренности $b$. Легко получить полную картину $\zeta(x, t)$ при помощи (3.11), написанном в безразмерном виде:

$$\zeta'(x'', t') = \sin t' \frac{1 - x''^2}{(1 + x''^2)^2} - (1 - \cos t')\frac{2x''}{(1 + x''^2)^2} \qquad (3.12)$$

Здесь

$$\zeta' = \frac{\zeta b d^2}{\alpha}, \qquad x'' = \frac{x}{d}, \qquad t' = bt$$

На фиг. 3 показаны положения свободной поверхности в моменты времени $t' = {}^1/_4\pi$, $^3/_4\pi$ и $^5/_4\pi$. Крестики обозначают вершины и ложбины свободной поверхности. Мы видим, что центральная вершина, возникающая в $t' = 0$ в начале координат 0, непрерывно двигается налево. Она сначала поднимается и достигает своего максимума $A$ (где $\zeta'_{x''} = \zeta'_{t'} = 0$) в $t' = {}^3/_4\pi$, а потом спускается вниз и исчезает в точке $B$ ($x'' = -\sqrt{3}$) в конце одного периода $t' = 2\pi$.



Фиг. 3

За этот период правая ложбина совершает траекторию $B'A'O$. Левая маленькая ложбина, начинающая с точки $B$ в $t' = 0$, также распространяется налево, достигает своего минимума $C$ в $t' = {}^1/_4\pi$ и исчезает в $x = -\infty$ в середине периода $t' = \pi$. Интересно отметить, что как только исчезает левая ложбина, в $x = +\infty$ появляется маленькая вершина, которая достигает своего максимума $C'$ в $t = 7\pi/4$ и исчезает в $B'$ ($x'' = \sqrt{3}$) в конце периода $t' = 2\pi$. Это вполне понятно, так как (3.12) инвариантно при преобразовании $\zeta' \to -\zeta'$, $x'' \to -x''$ и $t' \to -t'$. Итак мы видим, что, хотя профиль волн распространяется налево вследствие $b > 0$, волновая энергия сохраняется на месте.

2) $h = \text{const}$ и $|x| \gg h$. В данном случае при помощи метода установившихся фаз нетрудно получить следующую асимптотическую формулу из (3.7):

$$\zeta(x, t) = O\left(\frac{h}{x}\right) = 0 \quad \text{при } x \gg h,\ t > 0$$

$$\zeta(x, t) = O\left(\frac{h}{x}\right) = 0 \quad \text{при } x \ll -h,\ 0 < t < \frac{-x}{bh} \qquad (3.13)$$

$$\zeta(x,\ t) = \sqrt{\frac{\pi}{-x'}}\,\frac{\alpha}{bh^2}\operatorname{Ar\,ch}\sqrt{\frac{-1}{U'}}\exp\left[-d'\operatorname{Ar\,ch}\sqrt{\frac{-1}{U'}}\right](1+U')^{-\frac{1}{4}}\times$$
$$\times\sin\left[x'\left(\operatorname{Ar\,ch}\sqrt{\frac{-1}{U'}}+\frac{\sqrt{1+U'}}{U}\right)-\frac{\pi}{4}\right]+O\left(\frac{1}{x'}\right)=$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{-x'}}\,\frac{\alpha}{bh^2}A(U',\ d')\sin\left[x'\left(\operatorname{ar\,ch}\sqrt{\frac{-1}{U'}}+\frac{\sqrt{1+U'}}{U'}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$$

при $x \ll -h,\ t > \frac{-x}{bh}$

где

$$x' = \frac{x}{h},\qquad U' = \frac{x'}{t'},\qquad t' = bt,\qquad d' = \frac{d}{h}$$

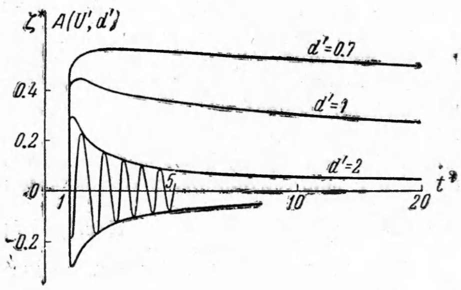
Отсюда видно, что волны распространяются только налево. Но в отличии от случая $h = \infty$ теперь групповая скорость

$$U = \frac{-bh}{\operatorname{ch}^2 kh} < 0$$

Поэтому импульсное возмущение вызывает серию волн, которая постепенно распространяется налево, растягивается, увеличивает число волн и убывает. На фиг. 4 показаны в безразмерном виде амплитуды $A(U'd')$ к времени $t^* = t/(-x/bh)$, т. е. $-1/U'$ для $d' = 0.7, 1$ и 2. Причемв случае $d' = 2$ показано колебание свободной поверхности на точке $x'$

$$\zeta^* = \zeta(x,t)\Big/\frac{\alpha}{bh^2}\sqrt{\frac{\pi}{-x'}}$$

со временем $t^*$ (для определенности принято $x' = 10$). Из фиг. 4 видно, что чем больше $d'$, т. е. чем шире диапазон действия импульсного возмущения или чем мельче глубина воды, тем быстрее убывает $A(U',\ d')$ со временем. Действительно, когда $d'$ очень велика, $A(U',\ d')$ отличается от нуля фактически только в узком интервале



Фиг. 4

$$1 < t^* = \frac{t}{(-x/bh)} < 1 + \Delta$$

Это означает, что импульсное возмущение распространяется почти как импульс (т. е. диапазон возмущения очень короткий), со скоростью $U = x/t = -bd$, которая как раз равна групповой скорости волн в предельном случае $h = 0$ (см. 17).

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю М. А. Лаврентьеву, поставившему эту задачу и сделавшему ряд ценных указаний.

Поступила
25 I 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Сунь Цао. Поведение поверхностных волн на линейно-изменяющемся течении. Труды МФТИ, Оборонгиз, 1959, вып. 3, стр. 66.
2. Рэлей. Теория звука. Гостехиздат, 1940, т. I, стр. 488.
3. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости, ОНТИ, М., 1936, § 8.