

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ

О. Н. Кацкова, А. Н. Крайко

(Москва)

Уравнения характеристик плоских и осесимметричных сверхзвуковых стационарных течений невязкого и нетеплопроводного газа при наличии необратимых физико-химических процессов (см., например, [1]) подобны уравнениям характеристик вихревого течения совершенного газа, однако проведение численных расчетов сопряжено со значительными трудностями.

Пусть состояние газа определяется давлением p , температурой T поступательных степеней свободы некоторого компонента газа и n параметрами q_i ($i = 1, \dots, n$), характеризующими необратимые процессы. Таковыми могут быть массовые концентрации компонентов, энергии внутренних степеней свободы и т. п. Пусть изменения этих параметров описываются уравнениями

$$\frac{dq_i}{dx} = F_i(w, \vartheta, p, T, q) = \varphi^i(w, \vartheta, p, T, q) f_i(p, T, q) \quad (1)$$

где производные взяты вдоль линий тока; x и y — прямоугольные координаты, в осесимметричном случае x направлено по оси симметрии; w — абсолютная величина скорости потока; ϑ — угол наклона вектора скорости к оси x ; q — совокупность параметров q_i ; F_i , φ^i и f_i — известные функции w , ϑ , p , T и q , при равновесии $f_i(p, T, q) = 0$,

функции φ^i определяются скоростями необратимых процессов, причем при $\varphi^i = 0$ течение заморожено, а при $\varphi^i = \infty$ равновесно.

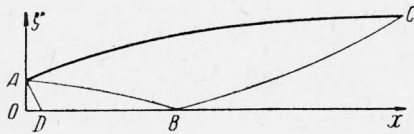
В случае сверхзвукового течения характеристиками уравнений, описывающих течение, являются два семейства линий Маха и линии тока. При построении метода

характеристик конечно-разностная запись уравнений на линиях Маха аналогична использованной в работе [2] при расчете изэнтропических течений. Если состояние газа заметно отличается от равновесного, то для записи уравнений (1) в конечно-разностной форме может быть использована та же схема

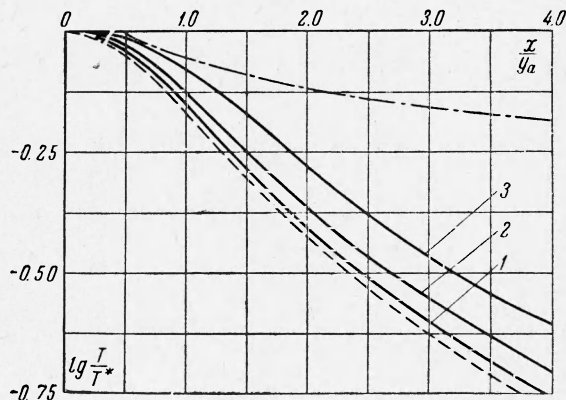
$$q_{i2} = q_{i1} + (F_{i1} + F_{i2})(x_2 - x_1) / 2 \quad (2)$$

Здесь индексами 1 и 2 обозначены параметры в известной и в искомой точках; x_2 определено из других уравнений системы; F_{i2} вычисляются по параметрам, найденным в предыдущем приближении. Однако при приближении к равновесию сходимость такой схемы ухудшается, и для проведения расчета требуется существенное уменьшение шага интегрирования, что чрезвычайно увеличивает продолжительность счета. Как показывает анализ, это связано именно с использованием уравнений (2). Вблизи равновесия f_i близки к нулю и очень чувствительны к изменениям T и соответствующих параметров q_i . Поэтому здесь небольшая погрешность в определении T_2 и q_{i2} в предыдущем приближении ведет к большей погрешности в определении q_{i2} в следующем приближении. Это ведет к увеличению погрешности в вычислении T_2 , которая определяется из уравнения энергии с использованием q_{i2} , и т. д.

Для устранения расходимости разложим f_{i2} в ряды по степеням $(q_{i2} - q_{i1})$. Ограничиваясь двумя членами рядов и разрешая уравнения, полученные из (2), относи-



Фиг. 1



Фиг. 2

тельно q_{i2} , найдем

$$q_{i2} = q_{i1} + \frac{(F_{i1} + \Phi_2^i f_{i3})(x_2 - x_1)}{2 - \Phi_2^i f_{ii}(x_2 - x_1)} \quad (3)$$

Здесь

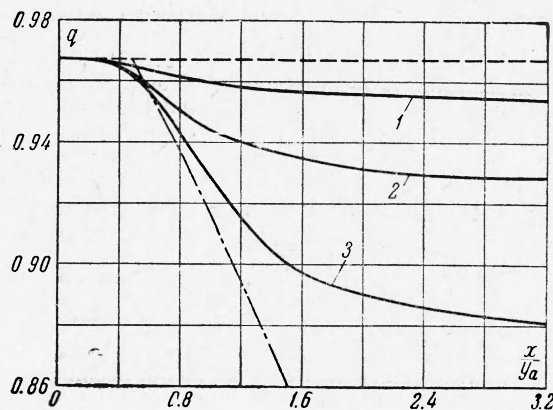
$$f_{ii}^{\circ} = (f_{ii2} + f_{ii3}) / 2; \quad f_{ii} = (\partial f_i / \partial q_i)_{p, T, q_j \neq q_i}$$

Индекс 3 означает, что аргументами будут $p_2, T_2, q_{j2} (j \neq i), q_{i1}$.

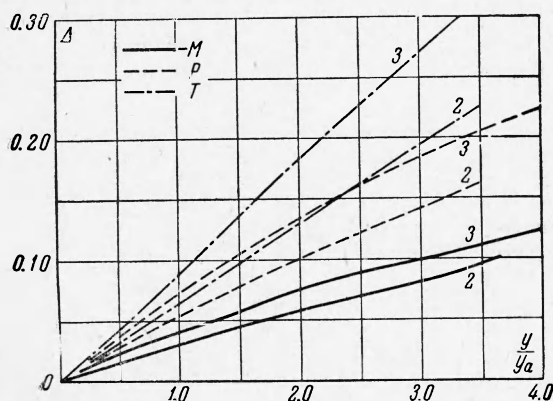
Данная конечно-разностная запись уравнений (1) сохраняет второй порядок точности и сходится вне зависимости от состояния течения, а при $\Phi^i \rightarrow \infty$ переходит в соответствующее равновесное соотношение.

Отметим, что полученная конечно-разностная форма может быть применена для расчета произвольных течений (дозвуковых, одномерных, нестационарных и т. п.) с необратимыми процессами, а также для численного интегрирования уравнений с малыми параметрами при старших производных. В случае необходимости функции f_i можно разложить в ряды не только по q_i , но и по остальным переменным.

В качестве примера рассчитано течение диссоциированного кислорода в расширяющейся части осесимметричных сопел с угловой точкой (фиг. 1, где AC — контур сопла; AD — начальная и AB — конечная характеристики разгонного участка — пучка волн разрежения, выходящих из угловой точки A ; BC — замыкающая характеристика). В начальном сечении ($x = 0$) поток равновесный, его параметры постоянны, $p^* = 1 \text{ атм}$, $T^* = 5000 \text{ }^\circ\text{К}$, $M^* = 1.001$ (M — число Маха, звездочкой обозначены параметры при $x = 0$). На характеристике BC задавалось постоянное направление вектора скорости ($\phi = 0$). Термодинамические функции кислорода брались из работы



Фиг. 3



Фиг. 4

[3], а константы скоростей реакций рекомбинации — из работы [4].
Задача о расчете течения и об определении контура AC сводится к расчету течения в треугольнике ADB и к решению задачи Гурсам в треугольнике ABC . Расчет велся методом характеристик с использованием конечно-разностной формы (3). Некоторые результаты приведены на фиг. 2—4, где цифрами 1, 2, 3 обозначены кривые, соответствующие размерам $y_a = 0.5, 2$ и 8 см (индексы a, b, \dots приписаны параметрам в точках A, B, \dots), на фиг. 2 и 3 штрихами даны аналогичные кривые для замороженного течения и штрихпунктиром — для равновесного течения (все расчеты проведены при одинаковых значениях p^*, T^* и w^*). На фиг. 2 показано распределение температуры, а на фиг. 3 — степени диссоциации q по оси разгонного участка. Видно значительное отличие от результатов расчета и равновесного и замороженного течений. На фиг. 4 дано изменение параметров на замыкающей характеристике BC ($M_b = 5.0$), где $\Delta = (N - N_b) / |N_b|$, причем N равно p, T и $(-M)$ соответственно. Заметим, что при равновесном и замороженном течениях в рассматриваемом случае параметры на BC

постоянны. Таким образом, наличие необратимых процессов ведет не только к заметным количественным, но и к важным качественным эффектам.

Авторы признательны Ю. Д. Шмыглевскому за внимание к работе и полезные обсуждения, а также Г. И. Сучковой за оформление работы.

Поступила 11 IV 1963

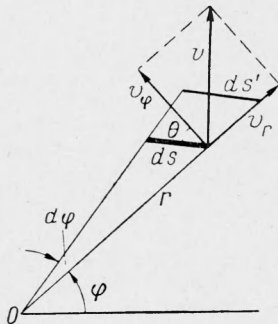
ЛИТЕРАТУРА

1. Williams F. A. Chemical reactions in supersonic flow. ARS Journal, 1959, vol. 29, No. 6, p. 442—443.
2. Кацкова О. Н., Крайко А. Н. Расчет осесимметричных изэнтропических течений реального газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1, стр. 125—132.
3. Heller L. Equilibrium statistical mechanics of dissociating diatomic gases. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 2, p. 147—152.
4. Rink J. P., Knight H. T., Duff R. E. Shock tube determination of dissociation rates of oxygen. J. Chem. Phys., 1961, vol. 34, No. 6, стр. 1942—1947. (Русск. пер. в сб.: «Вопросы ракетной техники», ИЛ, 1962, № 4, стр. 58—67).

К ТЕОРИИ ВЗРЫВА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ПРИ ПОКАЗАТЕЛЕ АДИАБАТЫ, БЛИЗКОМ К ЕДИНИЦЕ

Б. Н. Румянцев (Москва)

Взрыв в неоднородной среде при γ , близком к единице и при предположении, что в газ мгновенно выделяется некоторая энергия, исследовался в работах [1,2]. В работе [1] рассматривалась задача о взрыве в неоднородной атмосфере, для вычислений использовалась счетная машина. В работе [2] аналитически исследовался автомодельный случай выделения энергии на границе двух сред при наличии цилиндрической симметрии. В другой группе работ (обзор имеется в [3]) изучалась родственная задача об ударе о поверхность сжимаемой среды, граничащей с пустотой. Ниже, в постановке, аналогичной [2], рассматривается случай точечного взрыва на границе двух сред и проводятся вычисления для двух крайних случаев.



Фиг. 1

1. Пусть в момент времени $t = 0$ в точке O (фиг. 1) в совершенный газ с неоднородной плотностью мгновенно выделяется энергия E . Будем считать, что отношение теплоемкостей γ близко к единице, и, следовательно, масса газа сосредоточена вблизи фронта волны, а давление равномерно в полости, занятой возмущенным газом. Тогда для давления p справедлива следующая формула

$$p = (\gamma - 1) E / V \quad (1.1)$$

где $V = V(t)$ — объем возмущенного газа. Ограничимся рассмотрением осесимметричного случая и введем сферические координаты (фиг. 1). Рассмотрим движение элемента поверхности ds , заключенного внутри угла $d\varphi$. Элемент, занимавший в момент времени t положение ds , в момент $t + dt$ перейдет в положение ds' . Составляя для него условие сохранения массы и уравнение количеств движения, получим соотношения

$$\begin{aligned} ds' \rho' - ds \rho &= 2\pi \rho_1 r^2 \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial t} d\varphi dt - 2\pi \frac{\partial \rho v_\varphi r \sin \varphi}{\partial \varphi} d\varphi dt \\ ds' \rho' v_r' - ds \rho v_r &= p \cos \theta ds dt - 2\pi \frac{\partial \rho v_\varphi v_r r \sin \varphi}{\partial \varphi} d\varphi dt \\ ds' \rho' v_\varphi' - ds \rho v_\varphi &= p \sin \theta ds dt - 2\pi \frac{\partial \rho v_\varphi^2 r \sin \varphi}{\partial \varphi} d\varphi dt \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\rho_1(\varphi, r)$ — плотность невозмущенного газа, ρ — плотность возмущенного газа (сосредоточенного на фронте волны), приходящаяся на единицу угла φ , v_r и v_φ — составляющие скорости, соответственно параллельная и перпендикулярная радиусу-вектору r данной точки фронта, θ — угол между радиусом-вектором и нормалью к фронту.