

остаточных объемных деформаций: разрыхление вблизи полости и уплотнение на больших расстояниях.

Авторы выражают благодарность Бовту А. Н., Николаевскому В. Н. за полезные обсуждения в процессе постановки задачи.

Поступила 10 I 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н., Сырников Н. М., Шефтер Г. М. Динамика упругопластических дилатирующих сред.— В сб.: Успехи механики деформируемых сред. М., Наука, 1975.
2. Bishop A. W. The strength of soils as engineering materials.— Geotechnique, 1966, vol. 16, N 2.
3. Vesic A. S., Clough G. W. Behaviour of granular materials under high stresses.— Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., 1968, vol. 94, N 3.
4. Crouch S. L. Experimental determination of volumetric strain in failed rock.— Int. J. Rock. Mech. and Mining Sci., 1970, vol. 7, N 6.
5. Cazagrande A. Characteristics of cohesionless soils affecting the stability of slopes and earth fills.— J. Boston Soc. Civil Eng., 1936, p. 257—276.
6. Родионов В. Н., Адушкин В. В. и др. Механический эффект подземного взрыва. М., Недра, 1971.
7. Дунин С. З., Сироткин В. К. Расширение газовой полости в хрупкой породе с учетом дилатансионных свойств грунта.— ПМТФ, 1977, № 4.
8. Артышев С. Г., Дунин С. З. Ударные волны в дилатирующих и недилатирующих средах.— ПМТФ, 1978, № 4.
9. Дунин С. З., Сироткин В. К., Сумин Е. В. О характере состояния среды в окрестности полости, расширяющейся в дилатирующей среде.— ПМТФ, 1979, № 3.
10. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений.— В сб.: Вычислительные методы в гидродинамике. М., Мир, 1967.
11. Николаевский В. Н., Басниев К. С. и др. Механика насыщенных пористых сред. М., Недра, 1970.

УДК 539.3

РАВНОПРОЧНОЕ ОТВЕРСТИЕ В ПЛАСТИНЕ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Н. И. Остросаблин

(Новосибирск)

Пусть напряженное состояние в сплошной пластине определяется функциями Колосова — Мухелишвили [1]:

$$(1) \quad \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) = \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)},$$

$$\frac{1}{i2} (\sigma_y - \sigma_x) + i\tau_{xy} = \bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0(z),$$

где $\Phi_0(z) = \phi_0'(z)$, $\Psi_0(z) = \psi_0'(z)$ — известные голоморфные в области пластины функции комплексной переменной $z = x + iy$, удовлетворяющие заданным условиям на границе пластины.

Сделаем в пластине некоторое отверстие с контуром L , к которому приложим постоянные нормальные и касательные усилия

$$(2) \quad \sigma_n = p, \tau_{nt} = \tau, z \in L,$$

здесь (n, t) — система координат, связанная с нормалью и касательной к контуру L , ориентированная так же, как система координат (x, y) . При обходе L область, занятая материалом, остается слева. Из-за отверстия в пластине произойдет перераспределение напряжений. Напряженное состояние в пластине с отверстием можно представить через функции

$$(3) \quad \Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z),$$

где $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ характеризуют дополнительное напряженное состояние, вызванное отверстием. Эти функции нужно найти так, чтобы на L выполнялись условия (2), а на внешней границе пластины напряжения обращались в напряжения (1).

Будем решать задачу приближенно, считая, что размеры пластины много больше размеров отверстия. Тогда для дополнительных напряжений получается задача с нулевыми условиями на бесконечно удаленном контуре.

Кроме условий (2), потребуем еще, чтобы на L напряжение σ_t было постоянным (такое отверстие назовем равнопрочным [2]):

$$(4) \quad \sigma_t = q = \text{const}, \quad z \in L.$$

При заданном контуре L задача может не иметь решения, поэтому контур L не задаем заранее, а будем подбирать так, чтобы выполнялось условие (4). Такие отверстия могут быть оптимальными в смысле минимальной концентрации напряжений [3–6].

Так как главный вектор внешних усилий (2), приложенных к контуру L , равен нулю и функции $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ голоморфны в сплошной пластине, то функции $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеют порядок [1]

$$(5) \quad \Phi_1(z) = O(z^{-2}), \quad \Psi_1(z) = O(z^{-2}).$$

На контуре L имеют место соотношения [1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) &= \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t), \quad z \in L, \quad \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) + i\tau_{xy} = \\ &= z\Phi'(z) + \Psi(z) = -[\frac{1}{2}(\sigma_t - \sigma_n) + i\tau_{nt}] d\bar{z}/dz. \end{aligned}$$

Подставляя в эти соотношения выражения (2)–(4), получим для дополнительных функций $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ следующие граничные условия:

$$(6) \quad \begin{aligned} \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(\bar{z})} &= \frac{1}{2}(p + q) - [\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(\bar{z})}], \\ \overline{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z) &= -\alpha d\bar{z}/dz - [z\Phi_0'(z) + \Psi_0(z)], \quad z \in L, \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{1}{2}(q - p) + i\tau$.

Пусть функции $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ имеют вид

$$(7) \quad \Phi_0(z) = \sum_{h=0}^m a_h z^h, \quad \Psi_0(z) = \sum_{h=0}^m b_h z^h,$$

здесь коэффициенты считаются известными постоянными. Выбирая эти функции в виде (7), можно получить решения задач, имеющих практический интерес [7].

Конформно отобразим с помощью функции

$$(8) \quad z = c\omega(\zeta) = c\zeta \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^{-n}, \quad c = |c| > 0, \quad c_0 = i, \quad c_1 = 0$$

область $|\zeta| > 1$ на бесконечную область вне контура L . В (8) можно считать, что $c = |c| > 0$, $c_1 = 0$, так как всегда можно сделать замену

$$z = e^{i \arg c} (z_1 + |c|c_1),$$

которая сводится к повороту системы координат на угол $\arg c$, а затем переносу начала координат в точку $|c|c_1$. Обозначим

$$\Phi_1(z) = \Phi_1[c\omega(\zeta)] = \Phi_1(\zeta), \quad \Psi_1(z) = \Psi_1[c\omega(\zeta)] = \Psi_1(\zeta),$$

причем с учетом (5), (8) функции $\Phi_1(\zeta)$, $\Psi_1(\zeta)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеют порядок

$$(9) \quad \Phi_1(\zeta) = O(\zeta^{-2}), \quad \Psi_1(\zeta) = O(\zeta^{-2}).$$

Допустим, что $\omega^+(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, тогда [8]

$$(10) \quad \omega^+(t) = \overline{\omega^+(t)},$$

здесь значок $\overline{}$ означает предельные значения функции при стремлении ζ из области $|\zeta| > 1$ к точкам единичной окружности $|t| = 1$.

Теперь, используя (7), (8), (10), перепишем граничные условия (6) для функций $\Phi_1(\zeta)$, $\Psi_1(\zeta)$ (значок $\overline{}$ опускаем) в виде

$$(11) \quad \Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} = \frac{1}{2}(p+q) - \left[\sum_{k=0}^m \alpha_k \omega^k(t) + \sum_{k=0}^m \overline{\alpha_k} \overline{\omega^k(t)} \right] = f(t),$$

$$\frac{\overline{\omega(t)}}{\omega'(t)} \Phi_1'(t) + \Psi_1(t) = \alpha \frac{\overline{\omega'(t)} t^2}{\omega'(t)} - \left[\overline{\omega(t)} \sum_{k=1}^m k \alpha_k \omega^{k-1}(t) + \sum_{k=0}^m \beta_k \omega^k(t) \right] =$$

$$= h(t), \quad |t| = 1,$$

где $\alpha_k = a_k c^k$; $\beta_k = b_k c^k$; $k = \overline{0, m}$. Найдем представление функции $\omega^k(\zeta)$ при больших $|\zeta|$, с учетом (8) имеем

$$(12) \quad \omega^k(\zeta) = \zeta^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^{-n} \right)^k = \zeta^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} \zeta^{-n} = \sum_{n=0}^k c_{k-n}^{(k)} \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{k+n}^{(k)} \zeta^{-n},$$

здесь коэффициенты $c_n^{(k)}$ определяются рекуррентными формулами [9]

$$(13) \quad c_0^{(k)} = c_0^k = 1, \quad c_n^{(k)} = \frac{1}{nc_0} \sum_{j=1}^n [j(k+1) - n] c_j c_{n-j}^{(k)}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Выпишем комбинацию

$$(14) \quad h(t) \omega'(t) - \overline{h(t)} f'(t) = \overline{\alpha \omega'(t) t^2} - \sum_{k=1}^m k \overline{\alpha_k} \overline{\omega^k(t)} \omega'(t) t^2 - \sum_{k=0}^m \beta_k \omega^k(t) \omega'(t) =$$

$$= \left[-\overline{\alpha \omega(t)} + \sum_{k=1}^m \frac{k \overline{\alpha_k}}{k+1} \overline{\omega^{k+1}(t)} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1} \omega^{k+1}(t) \right]' = g'(t).$$

Краевая задача вида (11), (9) рассматривалась в работе [10]. Используя результаты работы [10] и учитывая (12), (14), получим решение краевой задачи (11) (обход окружности $|t| = 1$ по часовой стрелке)

$$(15) \quad \Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{t-\zeta} dt =$$

$$= - \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \left[\omega^k(\zeta) - \sum_{n=0}^k c_{k-n}^{(k)} \zeta^n \right] + \sum_{k=1}^m \overline{\alpha_k} \sum_{n=1}^k \overline{c_{k-n}^{(k)}} \zeta^{-n} \right\};$$

$$(16) \quad \Psi_1(\zeta) \omega'(\zeta)' = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g'(t)}{t-\zeta} dt = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(t)}{t-\zeta} dt \right) =$$

$$= \frac{d}{d\zeta} \left\{ -\frac{\overline{\alpha c_0}}{\zeta} + \sum_{k=1}^m \frac{k \overline{\alpha_k}}{k+1} \sum_{n=1}^{k+1} \frac{\overline{c_{k+1-n}^{(k+1)}}}{\zeta^n} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1} \left[\omega^{k+1}(\zeta) - \sum_{n=0}^{k+1} c_{k+1-n}^{(k+1)} \zeta^n \right] \right\} =$$

$$= \frac{\overline{\alpha c_0}}{\zeta^2} - \sum_{k=1}^m \frac{k \overline{\alpha_k}}{k+1} \sum_{n=1}^{k+1} \frac{n \overline{c_{k+1-n}^{(k+1)}}}{\zeta^{n+1}} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1} \left[(k+1) \omega^k(\zeta) \omega'(\zeta) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{k+1} n c_{k+1-n}^{(k+1)} \zeta^{n-1} \right],$$

причем с учетом первого условия (9) должны выполняться соотношения

$$(17) \quad \frac{1}{\nu} (p + q) - \sum_{k=0}^m (\alpha_k c_k^{(k)} + \bar{\alpha}_k \bar{c}_k^{(k)}) = 0;$$

$$(18) \quad \sum_{k=1}^m \alpha_k c_{k+1}^{(k)} + \sum_{k=1}^m \bar{\alpha}_k \bar{c}_{k-1}^{(k)} = 0.$$

Как видно из (16), второе условие (9) выполняется. Из (16) получаем

$$(19) \quad \Psi_1(\zeta) = - \sum_{k=0}^m \beta_k \omega^k(\zeta) + \frac{1}{\omega'(\zeta)} \left(\frac{\bar{\alpha}_0}{\zeta^2} - \sum_{k=1}^m \frac{k \bar{\alpha}_k}{k+1} \sum_{n=1}^{k+1} \frac{\bar{c}_{k+1-n}^{(k+1)}}{\zeta^{n+1}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1} \sum_{n=1}^{k+1} n c_{k+1-n}^{(k+1)} \zeta^{n-1} \right).$$

Из соотношения (17) определяется постоянная q , а постоянная α с учетом (17) имеет вид

$$(20) \quad \alpha = \frac{1}{2} (q - p) + i\tau = \sum_{k=0}^m (\alpha_k c_k^{(k)} + \bar{\alpha}_k \bar{c}_k^{(k)}) - p + i\tau.$$

Функция $\omega(\zeta)$ удовлетворяет функциональному уравнению [10]

$$(21) \quad H^-(\zeta) + \overline{\omega(1/\zeta)} F^-(\zeta) = 0, \quad |\zeta| < 1,$$

здесь функции $H^-(\zeta)$, $F^-(\zeta)$ определяются в области $|\zeta| < 1$ по формулам

$$H^-(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g'(t)}{t-\zeta} dt = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(t)}{t-\zeta} dt \right) = \\ = - \frac{d}{d\zeta} \left\{ -\alpha \left[\overline{\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)} - \frac{\bar{c}_0}{\zeta} \right] + \sum_{k=1}^m \frac{k \bar{\alpha}_k}{k+1} \left[\overline{\omega^{k+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)} - \sum_{n=1}^{k+1} \frac{\bar{c}_{k+1-n}^{(k+1)}}{\zeta^n} \right] - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1} \sum_{n=0}^{k+1} c_{k+1-n}^{(k+1)} \zeta^n \right\} = -\alpha \left[\overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{\bar{c}_0}{\zeta^2} \right] + \\ + \sum_{k=1}^m \frac{k \bar{\alpha}_k}{k+1} \left[(k+1) \overline{\omega^k\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \frac{1}{\zeta^2} - \sum_{n=1}^{k+1} \frac{n \bar{c}_{k+1-n}^{(k+1)}}{\zeta^{n+1}} \right] + \\ + \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1} \sum_{n=1}^{k+1} n c_{k+1-n}^{(k+1)} \zeta^{n-1}, \\ F^-(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(t)}{t-\zeta} dt = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{t-\zeta} dt \right) = - \frac{d}{d\zeta} \overline{\Phi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \\ = \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{n=1}^k n c_{k-n}^{(k)} \zeta^{n-1} - \sum_{k=1}^m \bar{\alpha}_k \left[k \overline{\omega^{k-1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \frac{1}{\zeta^2} - \sum_{n=1}^k \frac{n \bar{c}_{k-n}^{(k)}}{\zeta^{n+1}} \right],$$

причем $F^-(0) = 0$, согласно (18). Подставляя эти функции в (21), получим уравнение

$$-\alpha \left[\overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{\bar{c}_0}{\zeta^2} \right] + \overline{\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{n=1}^k n c_{k-n}^{(k)} \zeta^{n-1} + \sum_{k=1}^m \bar{\alpha}_k \sum_{n=1}^k \frac{n \bar{c}_{k-n}^{(k)}}{\zeta^{n+1}} \right) + \\ + \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1} \sum_{n=1}^{k+1} n c_{k+1-n}^{(k+1)} \zeta^{n-1} - \sum_{k=1}^m \frac{k \bar{\alpha}_k}{k+1} \sum_{n=1}^{k+1} \frac{n \bar{c}_{k+1-n}^{(k+1)}}{\zeta^{n+1}} = 0.$$

Вводя обозначения

$$(22) \quad \begin{aligned} A_n &= n \sum_{k=n}^m \alpha_k c_{k-n}^{(k)}, & n &= \overline{1, m}, \\ B_n &= n \sum_{k=n-1}^m \frac{\beta_k}{k+1} c_{k+1-n}^{(k+1)}, & n &= \overline{1, m+1}, \\ D_n &= n \sum_{k=n-1}^m \frac{k\alpha_k}{k+1} c_{k+1-n}^{(k+1)}, & n &= \overline{1, m+1} \end{aligned}$$

и заменяя ζ на $1/\zeta$, а все параметры на сопряженные, преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$(23) \quad -\bar{\alpha} [\omega'(\zeta) - c_0] + \sum_{n=1}^m \left(A_n \zeta^{n-1} + \frac{\bar{A}_n}{\zeta^{n+1}} \right) \omega(\zeta) + \\ + \sum_{n=1}^{m+1} \left(\frac{\bar{B}_n}{\zeta^{n+1}} - D_n \zeta^{n-1} \right) = 0, \quad |\zeta| > 1.$$

Если $\alpha \neq 0$, то, обозначая

$$A(\zeta) = -\frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^m \left(\frac{A_n}{n} \zeta^n - \frac{\bar{A}_n}{n} \frac{1}{\zeta^n} \right), \\ \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = c_0 - \frac{D_1}{\alpha}, \quad \gamma_n = -\frac{D_n}{\alpha}, \quad n = \overline{2, m+1}, \\ \gamma_{-n} = \frac{\bar{B}_n}{\alpha}, \quad n = \overline{1, m+1},$$

уравнение (23) можно записать в виде

$$(24) \quad [\omega(\zeta) e^{A(\zeta)}]' = \sum_{n=-(m+1)}^{m+1} \gamma_n \zeta^{n-1} e^{A(\zeta)}.$$

Функции $e^{A(\zeta)}$, $e^{-A(\zeta)}$ можно представить в области $0 < |\zeta| < \infty$ в виде рядов Лорана

$$e^{A(\zeta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n \zeta^n, \quad e^{-A(\zeta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \zeta^n,$$

здесь коэффициенты определяются по формулам [11] (обход окружности $|\zeta| = \rho$ против часовой стрелки)

$$\mu_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{e^{A(\zeta)}}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad 0 < \rho < \infty, \quad \lambda_n = \mu_n(-\bar{\alpha}), \quad n = \overline{-\infty, \infty}.$$

Теперь общее решение уравнения (24) запишем в виде

$$(25) \quad \omega(\zeta) = \\ = \left[\left(\sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \gamma_k \mu_{-k} \right) \ln \zeta + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \gamma_k \mu_{n-k} \right) \zeta^n + \delta \right] e^{-A(\zeta)},$$

δ — постоянная интегрирования.

Из выражения (25) следует, что функция $\omega(\zeta)$ имеет вид (8), если выполняются соотношения

$$(26) \quad \sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \gamma_k \mu_{-k} = 0, \quad \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \gamma_k \mu_{s-k} \right) \lambda_{-s} + \delta \lambda_0 = 0,$$

$$\sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \gamma_k \mu_{s-k} \right) \lambda_{1-s} + \delta \lambda_1 = 1,$$

$$\sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \gamma_k \mu_{s-k} \right) \lambda_{n-s} + \delta \lambda_n = 0, \quad n = \overline{2, \infty},$$

при этом коэффициенты функции $\omega(\zeta)$ (8) равны

$$(27) \quad c_{n+1} = \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \gamma_k \mu_{s-k} \right) \lambda_{-n-s} + \delta \lambda_{-n}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Таким образом, функция $\omega(\zeta)$ будет иметь вид (8), если параметры задачи таковы, что выполняются соотношения (26). Так как функция $\omega(\zeta)$ удовлетворяет уравнению (21) [10], то условие (18) будет выполняться. При этом коэффициенты c_{n+1} , $n = \overline{1, \infty}$ определяются формулами (27). Так как при $m \geq 2$ в правую часть (27) входят коэффициенты c_2, \dots, c_m , то первые $m - 1$ соотношений (27) будут системой уравнений для коэффициентов c_2, \dots, c_m .

Если же подставить ряд (8) в уравнение (23) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях ζ , то получим следующую систему уравнений для коэффициентов c_n :

$$(28) \quad \sum_{j=0}^{m+1-n} c_j A_{j+n-1} - D_n = 0, \quad n = \overline{1, m+1};$$

$$(29) \quad \sum_{j=1}^m A_j c_{j+1} + \bar{A}_1 c_0 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^m A_j c_{n+1+j} + \bar{\alpha} n c_{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1 \leq m} \bar{A}_j c_{n+1-j} + \bar{B}_n = 0, \quad n = \overline{1, m+1},$$

$$\sum_{j=1}^m A_j c_{n+1+j} + \bar{\alpha} n c_{n+1} + \sum_{j=1}^m \bar{A}_j c_{n+1-j} = 0, \quad n = \overline{m+2, \infty}.$$

Как следует из вида уравнения (21) и можно проверить непосредственно, соотношения (28) выполняются тождественно. Первое уравнение (29) совпадает с уравнением (18), это можно проверить, учитывая формулы (13), (22). Таким образом, коэффициенты отображающей функции $\omega(\zeta)$ должны удовлетворять системе (29), где величины α , A_j , B_j определяются формулами (20), (22).

Как показывает проверка, коэффициенты c_{n+1} , задаваемые формулами (27), удовлетворяют системе уравнений (29), если выполняются соотношения (26) до номера $n = m$, при этом остальные соотношения (26) будут выполняться. Таким образом, для того чтобы в случае $\alpha \neq 0$ существовало равнопрочное отверстие, нужно требовать выполнения первых $m + 2$ соотношений (26). Из одного из этих соотношений определяется постоянная δ .

Если

$$(30) \quad \alpha = \sum_{k=0}^m (\alpha_k c_k^{(h)} + \bar{\alpha}_k \bar{c}_k^{(h)}) - p + i\tau = 0,$$

то функция $\omega(\zeta)$ находится из уравнения (23). Коэффициенты ее разложения в ряд могут быть найдены из рекуррентных уравнений (29), причем начальные коэффициенты c_0, \dots, c_m связаны соотношением (30).

Таким образом, краевая задача (11), (9) решена: функции $\Phi_1(\zeta)$, $\Psi_1(\zeta)$ выражаются формулами (15), (19), коэффициенты функции $\omega(\zeta)$ определяются формулами (27) при выполнении $m + 2$ первых условий (26) или уравнениями (30), (29). Для полноты решения нужно еще наложить ограничения на коэффициенты c_n , для того чтобы функция $\omega(\zeta)$ (8) была однолистной в области $|\zeta| > 1$. Как можно показать, для однолистности функции $\omega(\zeta)$ (8) в области $|\zeta| \geq \rho > 1$ достаточно потребовать выполнения условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_0} \right| \frac{n}{\rho^{n+1}} < 1.$$

Приведем некоторые частные случаи. Для $m = 1$ на основании формул (13), (20), (22) имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1, \quad B_1 = \beta_0, \quad B_2 = \beta_1, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = \alpha_1, \\ \alpha &= \alpha_0 + \bar{\alpha}_0 - p + i\tau, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 1, \\ \gamma_2 &= -\alpha_1/\bar{\alpha}, \quad \gamma_{-1} = \bar{\beta}_0/\bar{\alpha}, \quad \gamma_{-2} = \bar{\beta}_1/\bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Величины μ_n, λ_n равны

$$\mu_n = \left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} \right)^n J_n \left(-\frac{2|\alpha_1|}{\bar{\alpha}} \right), \quad \lambda_n = \left(\frac{\alpha_1}{|\bar{\alpha}_1|} \right)^n J_n \left(\frac{2|\alpha_1|}{\bar{\alpha}} \right),$$

здесь $J_n()$ — бесселевы функции порядка n [11]. Коэффициенты c_{n+1} вычисляются по формулам

$$(31) \quad c_{n+1} = \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\sum_{k=-2}^2 \gamma_k \mu_{s-k} \right) \lambda_{-n-s} + \delta \lambda_{-n}, \quad n = \overline{1, \infty},$$

причем заданные параметры и постоянная δ таковы, что выполняются соотношения

$$(32) \quad \sum_{k=-2}^2 \gamma_k \mu_{-k} = 0, \quad \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\sum_{k=-2}^2 \gamma_k \mu_{s-k} \right) \lambda_{-s} + \delta \lambda_0 = 0,$$

$$\sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\sum_{k=-2}^2 \gamma_k \mu_{s-k} \right) \lambda_{1-s} + \delta \lambda_1 = 1.$$

Если $\alpha = 0$, то $\omega(\zeta) = (\alpha_1/\zeta - \bar{\beta}_0/\zeta^2 - \bar{\beta}_1/\zeta^3) (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1/\zeta^2)^{-1}$. Если $\alpha_1 = 0$, то соотношения (32) выполняются, причем $\delta = 0$, а из (31) получаем

$$c_2 = -\bar{\beta}_0/\bar{\alpha}, \quad c_3 = -\bar{\beta}_1/2\bar{\alpha}, \quad c_{n+1} = 0, \quad n = \overline{3, \infty},$$

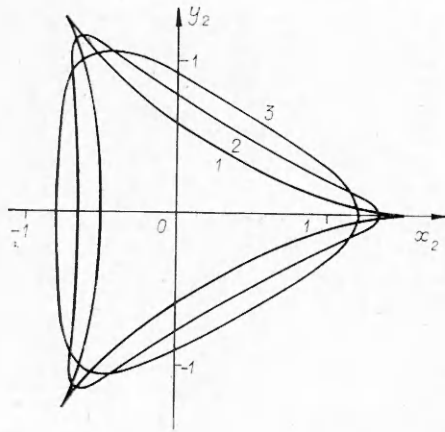
т. е.

$$(33) \quad \omega(\zeta) = \zeta - \bar{\beta}_0/\bar{\alpha}\zeta - \bar{\beta}_1/2\bar{\alpha}\zeta^2.$$

Эта функция однолистка в области $|\zeta| > 1$, если параметры таковы, что

$$(34) \quad |\bar{b}_0| + |\bar{b}_1|c \leq |a_0 + \bar{a}_0 - p - i\tau|.$$

В работе [2], где рассматривался случай $m = 1$, приведенных выше решений не получено. Решение работы [2] с учетом условия (18) следует



Ф и г. 1

циенты c_2 , c_3 в показательной форме

$$c_2 = |c_2| e^{i\varphi_2}, \quad c_3 = |c_3| e^{i\varphi_3}.$$

На фиг. 1 показаны контуры L для следующих значений параметров: $c_2 = 0$, $|c_3| = 1/2$; $1/3$; $1/5$ (кривые 1—3 соответственно), причем $z_2 = (z/c) e^{-i\varphi_3/3}$. Для $c_2 = 0$ равнопрочные отверстия являются гипотрохоидами. На фиг. 2 параметры следующие: $\varphi_2/2 = \varphi_3/3$, $|c_2| = 2|c_3| = 1/2$ (кривая 1), $|c_2| = |c_3| = 1/3$ (кривая 2), $|c_2| = 1/3$, $|c_3| = 1/5$ (кривая 3), причем $z_2 = (z/c) e^{-i\varphi_2/2}$. На фиг. 3 параметры равны: $|c_2| = 2|c_3| = 1/2$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = \pi/6$ (кривая 1), $\varphi_2 = \pi/6$, $\varphi_3 = 0$ (кривая 2). Контуры с угловыми точками соответствуют параметрам, для которых в условии (34) имеет место знак равенства.

Если $\alpha_k = 0$, $k = \overline{1, m}$, то соотношения (26) тождественно выполняются, причем $\delta = 0$. В этом случае соотношения (27) с учетом выражений для B_n (22) принимают вид

$$(35) \quad c_{n+1} = -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=n-1}^m \frac{\bar{\beta}_k}{k+1} \bar{c}_{k+1-n}^{(k+1)}, \quad n = \overline{1, m+1}, \quad c_{n+1} = 0, \quad n = \overline{m+2, \infty}.$$

Для $n = m$, $m+1$ с учетом (13) имеем из (35)

$$c_{m+1} = -\bar{\beta}_{m-1}/\bar{\alpha}m, \quad c_{m+2} = -\bar{\beta}_m/\bar{\alpha}(m+1).$$

При $m \geq 2$ остальные выражения (35) будут системой уравнений для коэффициентов c_2, \dots, c_m . Например, для $m = 3$ уравнения будут следующие:

$$c_2 = -\frac{1}{\alpha} (\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_2 \bar{c}_2 + \bar{\beta}_3 \bar{c}_3), \quad c_3 = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\bar{\beta}_1}{2} + \bar{\beta}_3 \bar{c}_2 \right),$$

из которых находим

$$c_2 = \frac{-\left(\bar{\delta}_0 - \frac{1}{2} \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_3\right) (1 - \bar{\delta}_3 \bar{\delta}_3) + \left(\bar{\delta}_0 - \frac{1}{2} \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_3\right) \bar{\delta}_2}{(1 - \bar{\delta}_3 \bar{\delta}_3)^2 - \bar{\delta}_2 \bar{\delta}_2}, \quad c_3 = -\frac{\bar{\delta}_1}{2} - \bar{\delta}_3 \bar{c}_2,$$

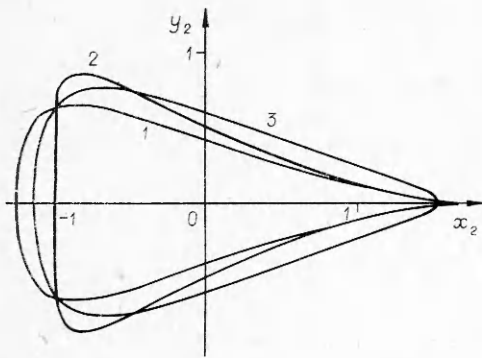
где $\delta_k = \beta_k/\alpha$; $k = \overline{0, 3}$. Для $m > 3$ система уравнений (35) становится нелинейной и будет иметь несколько решений, т. е. при заданных парамет-

из формул (31) или уравнений (29), если в них положить $c_{n+1} = 0$, $n = \overline{2, \infty}$, при этом получаем

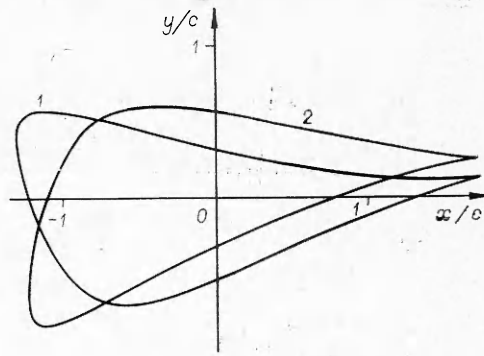
$$c_2 = -\bar{a}_1/a_1 = -\bar{b}_0/\bar{\alpha} = -\bar{b}_1/\bar{a}_1.$$

Как отсюда видно, равнопрочное отверстие в этом случае оказывается вырожденным эллипсом — разрезом, а не просто эллипсом [2, 12], причем этот разрез не изменяет первоначальное напряженное состояние, так как функции $\Phi_1(\zeta)$, $\Psi_1(\zeta)$ будут равны нулю.

Для некоторых значений параметров равнопрочные отверстия, соответствующие функции (33), показаны на фиг. 1—3. Запишем коэффици-



Ф и г. 2



Ф и г. 3

рах может быть несколько равнопрочных отверстий. Возможно, что требования однолистности функции $\omega(\zeta)$ исключают часть решений.

Если $\alpha_k = 0$, $k = 1, m$, то, как видно из формулы (15), функция $\Phi_1(\zeta)$ равна нулю, т. е. в этом случае отверстие не только равнопрочное, но и гармоническое [13].

Таким образом, в данной работе в отличие от работы [13] найдены равнопрочные отверстия в пластине при неоднородном первоначальном поле напряжений. Причем эти отверстия могут быть и гармоническими.

Поступила 19 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1966.
2. Черепанов Г. П. Обратная упругопластическая задача в условиях плоской деформации. — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 1.
3. Баничук Н. В. Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
4. Вигдергауз С. Б. Об одном случае обратной задачи двумерной теории упругости. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
5. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
6. Черепанов Г. П., Ершов Л. В. Механика разрушения. М., Машиностроение, 1977.
7. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Наука, 1977.
9. Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. Киев, Наукова думка, 1970.
10. Остросаблин Н. И. Об упругопластической задаче для плоскости с отверстием. — В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 28. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1973.
12. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, Наукова думка, 1968.
13. Bjorkman G. S., Jr., Richards R., Jr. Harmonic holes. An inverse problem in elasticity. — Trans. ASME. Ser. E, 1976, vol. 43, N 3.