7. **Halbleib J. A., Vandevender W. H.** Coupled electronphoton collisional transport in externally applied electromagnetic fields.— J. Appl. Phys., 1977, vol. 48, N 6.
8. **Пирс Дж. Р.** Теория и расчет электронных пучков. М., Сов. радио, 1956.
9. **Агафонов А. В., Лебедев А. Н.** К теории газовой фокусировки сильноточного электронного пучка.— ЖТФ, 1972, т. 42, вып. 7.
10. **Афонин Ю. В., Оришич А. М., Пономаренко А. Г.** Однородность объемного разряда, контролируемого электронным пучком, в поперечном магнитном поле. Препринт № 5, ИТПМ СО АН СССР, 1977.

УДК 533.95

К РАСЧЕТУ ДИНАМИКИ ЗАРЯЖЕННОГО ГАЗОВОГО ОБЛАКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. И. Лысиков

(Ворошиловград)

Задача о разлете газового облака имеет несколько подходов, среди которых, по-видимому, наиболее доступным в отношении возможности получения аналитических решений является подход, основанный на результатах работы [1], где получена исходная общая система уравнений для элементов матрицы, определяющей решение уравнений гидродинамики, и отмечено, что возможно нахождение некоторых первых интегралов этой системы. В приложении к разлету в вакуум газового облака в работах [2, 3] найдено несколько первых интегралов, причем в некоторых простых случаях система была проинтегрирована до конца. В работе [4] проведен учет гравитационного взаимодействия в рамках той же модели и проведено детальное рассмотрение свойств решения на основе качественной теории дифференциальных уравнений. Указано на возможность проинтегрировать систему в некоторых случаях при введении преобразования времени. В [5] решение системы из работы [1] в приложении к разлету газового облака применено к анализу некоторых свойств плазменного облака в экспериментах по ЛТС (лазерный термоядерный синтез). Таким образом, подход [1] позволил получить ряд интересных результатов в физике плазмы и астрофизике. Следует полагать, что в указанных областях возможности подхода далеко еще не исчерпаны, поскольку найденные точные решения соответствуют частным ситуациям, при которых система уравнений весьма существенно упрощается. Одной из возможных дополнительных сфер применения подхода является, по-видимому, случай движения облака идеального газа при наличии малого заряда частиц во внешнем постоянном магнитном поле. В таком варианте задача может возникнуть как в астрофизике, так и в физике плазмы, где ее решение поможет уточнить качественное поведение объектов, например в задаче УТС (управляемый термоядерный синтез). Наличие такой возможности расширения области применения подхода связано с тем, что дополнительное слагаемое, порождаемое магнитным полем в уравнении движения, пропорционально координате частицы (лагранжевой координате), что и является необходимым условием решения системы по методу [1].

В данной работе проведено рассмотрение динамики облака заряженных частиц, форма которого представляет эллипсоид, при наличии внешнего магнитного поля, направление которого совпадает с одной из осей эллипсоида (в случае сфероида — с продольной осью).

Ось вращения облака совпадает по направлению с магнитным полем. Газ считаем идеальным, процесс расширения участков облака — адиабатическим. Осуществляя переход от декартовых x_i к лагранжевым a_i координатам выделенных участков газа

$$x_i(t) = F_{ik}(t)a_k \tag{1}$$

(здесь и ниже повторяющиеся индексы показывают суммирование от 1 до 3), из уравнений неразрывности, Пуассона и первого начала термодинамики получаем [2]

$$\rho = \rho_0(a)\varphi_0/\varphi,\ p = (\gamma - 1)\rho_0(a)U_0(a)(\varphi_0/\varphi)^\gamma,$$

$$\varphi = \det||F_{ik}||,\ v_i = \dot{F}_{ik}a_k,$$

где ρ — плотность газа; γ — показатель адиабаты; U — удельная внутренняя энергия газа; v_i — скорость выделенного участка газа. Величины с индексом 0 соответствуют начальным значениям. Соотношение (1) применимо в случае магнитного поля указанной конфигурации. Это связано с тем, что участки газа совершают синхронное вращение по орбитам в магнитном поле, а скорость их пропорциональна радиусу, чему как раз удовлетворяет (1). Уравнение для импульса при наличии магнитного поля с учетом (1) имеет вид

$$\rho\ddot{F}_{ik}a_k = -F_{ki}^{-1}\frac{\partial}{\partial a_k}\left[(\gamma - 1)\rho_0(a)U_0(a)\left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^\gamma\right] + \rho\frac{e}{mc}\varepsilon_{ikl}B_l\dot{F}_{km}a_m,$$

где B — индукция магнитного поля; ε_{ikl} — совершенно антисимметричный единичный псевдотензор третьего ранга; e — заряд частиц; m — масса частиц. Уравнения допускают разделение переменных в двух случаях: когда зависимость $\rho_0(a)$ имеет вид

$$\rho_0(a) = \rho_{00}\exp\{-a^2/a_0^2\}$$

(предполагается для простоты, что поверхности уровня в лагранжевых координатах сферические), а $U_0(a) = \text{const}$; когда

$$\rho_0(a) = \text{const},\quad U_0(a) = U_{00}(1 - a^2/a_0^2)\ (\text{здесь } a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Эти два случая соответствуют различным распределениям плотности и температуры в пространстве. Принимая реализующимся один из этих случаев (для определенности — второй, но следует помнить, что формулы для обоих случаев практически совпадают), получаем систему уравнений типа [1]

$$\ddot{F}_{ik} = \alpha\frac{F_{ki}^{-1}}{\varphi^{\gamma-1}} + \varepsilon_{ikl}B_l\dot{F}_{mk}\frac{e}{mc},\quad \alpha = 2(\gamma - 1)U_{00}\varphi_0^{\gamma-1}/a_0^2. \tag{2}$$

Система (2) имеет некоторые первые интегралы. Проводя преобразования аналогично [2], получаем закон сохранения энергии

$$\dot{F}_{ik}^2 = -\frac{2}{\gamma - 1}\frac{\alpha}{\varphi^{\gamma-1}} + C_1. \tag{3}$$

Интегралы, аналогичные законам сохранения момента импульса и завихренности [2], приобретают вид

$$\dot{F}_{ik}F_{il} - F_{ik}\dot{F}_{il} = \frac{e}{mc}B_n\varepsilon_{imn}F_{mk}F_{il} + C_2,\quad \frac{e}{mc}\varepsilon_{lim}B_m(\dot{F}_{ik}F_{lk} - F_{ik}\dot{F}_{lk}) =$$
$$= -\left(\frac{e}{mc}\right)^2\varepsilon_{iln}\varepsilon_{ipq}B_nB_qF_{pk}F_{lk} + 2C_3. \tag{4}$$

Завихренность в виде, указанном в [2], в рассматриваемом случае не сохраняется, но все же выполняется соотношение, указанное в (4). Реализуется также интеграл движения, аналогичный найденному в [3]. Действительно, можно показать, что с учетом второго соотношения (4) в случае, когда магнитное поле направлено вдоль одной из осей эллипсоида, совпадающей с осью вращения, выполняется соотношение

$$\frac{1}{2}(\dot{F}_{ik}^2) = -\frac{1}{2}\left(\frac{eB}{mc}\right)^2(F_{xk}^2 + F_{yk}^2) + C_1 + C_3. \tag{5}$$

Здесь C_1, C_3 — константы из уравнений (3), (4). В случае произвольного магнитного поля вычисления приводят к соотношению

$$(F_{ik}^2)^{\cdot\cdot} = -\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \varepsilon_{iln}\varepsilon_{ipq}B_nB_qF_{pk}F_{lk} + 2(C_1 + C_3),$$

из которого видно, что невозможно получение интеграла типа [3]. Интегрирование (5) может быть проведено в довольно общем случае. Этот случай соответствует заданию определенной зависимости F_{zz} от времени при отсутствии недиагональных элементов F_{xz}, F_{yz}, F_{zx}, F_{zy} в матрице F_{ik}. Примером такой зависимости может служить соотношение

$(F_{zz}^2)^{\cdot\cdot} = C_8\cos(\omega t) + 2C_5$. При этом $F_{zz}^2 = C_5t^2 + C_6t + C_7 - \dfrac{C_8}{\omega^2}\cos(\omega t)$

и для величины $u = F_{xk}^2 + F_{yk}^2$ из (5) получаем

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 2(C_1 + C_3 - C_5) - C_8\cos(\omega, t), \tag{6}$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{eB}{mc}$. Решение (6) хорошо известно (уравнение вынужденных колебаний) и в случае резонанса ($\omega = \omega_0$) получаем

$$u = \frac{2}{\omega_0^2}(C_1 + C_3 - C_5) + \left(C_{10} - \frac{C_8}{2\omega_0}t\right)\sin(\omega_0 t) + C_{11}\cos(\omega_0 t), \tag{7}$$

что и дает соответствующий интеграл системы. Отметим, что случай $C_8 = C_5 = C_6 = 0$ соответствует двумерному разлету бесконечного газового цилиндра, в то время как вариант с неравенством нулю этих величин соответствует разлету газового эллипсоида в продольном магнитном поле.

Система уравнений для F_{ik} может быть решена до конца в наиболее простых случаях. Один из них — вращающийся бесконечный газовый цилиндр кругового сечения, причем значение γ для интегрируемости уравнений предположим равным 2. Имеются отличные от нуля элементы матрицы $F_{xx} = F_{yy}$, $F_{xy} = -F_{yx}$. Проводя преобразования, из (7), (3) при $F_{xx} = R\sin\chi$, $F_{xy} = R\cos\chi$ находим

$$R = \sqrt{u/2}, \quad \dot{\chi}^2 = \frac{1}{u}\left(C_1 - \frac{2\alpha}{\psi} - \frac{\dot{u}^2}{4u}\right), \quad \varphi = \frac{u}{2}. \tag{8}$$

Интегрируя (8) при исходных данных

$$F_{xx}(0) = F_{yy}(0) = 1, \quad \dot{F}_{xx}(0) = \dot{F}_{yy}(0) = b, \quad F_{xy}(0) = F_{yx}(0) = \dot{F}_{xy}(0) = \dot{F}_{yx}(0) = 0, \quad C_1 = 2(b^2 + \alpha),$$

$$C_3 = \omega_0^2, \quad \psi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{b^2 + \alpha}{b\omega_0}\right), \quad u = \frac{2}{\omega_0^2}\left[\omega_0^2 + 2(b^2 + \alpha)\right] + \frac{4\sqrt{b^2\omega_0^2 + (b^2 + \alpha)^2}}{\omega_0^2}\sin(\omega_0 t + \psi),$$

получаем

$$\chi = \frac{\omega_0 t}{2} - \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + 4\alpha}}\operatorname{arctg}\left\{\frac{\left[2(b^2 + \alpha) + \omega_0^2\right]\operatorname{tg}\left(\dfrac{\omega_0 t}{2} + \psi\right) - 2\sqrt{b^2\omega_0^2 + (b^2 + \alpha)^2}}{\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + 4\alpha}}\right\}.$$

Наиболее интересные характеристики этого случая — радиус цилиндра и момент импульса относительно продольной оси — определяются соотношениями

$$R = \left\{\frac{\omega_0^2 + 2(b^2+\alpha)}{\omega_0^2} + \frac{2}{\omega_0^2}\sqrt{b^2\omega_0^2 + (b^2+\alpha)^2}\sin(\omega_0 t + \psi)\right\}^{1/2},$$

$$M_z = \frac{8\pi}{15}\rho_{00}a_0^5(F_{xx}\dot{F}_{yx} + F_{xy}\dot{F}_{yy}) = \frac{4\pi}{15}\rho_{00}a_0^5\sqrt{u\left(C_1 - \frac{2\alpha}{\varphi} - \frac{\dot{u}^2}{4u}\right)}.$$

Поведение R — колебания относительно некоторого равновесного значения, поведение M_z также колебательного характера. Когда $\gamma = 5/3$, система не интегрируема просто до конца, но легко определяются величины R и M_z. В этом случае

$$R = \sqrt{u/2}, \quad M_z = \frac{4\pi}{15}\rho_{00}a_0^5\left[u\left(C_1 - \frac{2\alpha}{\gamma-1}\left(\frac{2}{F_{zz}u}\right)^{\gamma-1} - (\dot{F}_{zz})^2 - \frac{\dot{u}^2}{4u}\right)\right]^{1/2}.$$

Поведение этих величин подобно приведенному выше, но колебания носят нестационарный характер (см. (7)).

Выражаемым в элементарных функциях является также решение при $F_{zz}^2 = u/2$. В этом случае уравнение для χ при вращении сфероида вокруг продольной оси упрощается, принимая вид

$$\dot{\chi} = \sqrt{\frac{1}{u}\left(C_1 - \frac{6\alpha}{u} - \frac{3\dot{u}^2}{8u}\right)}. \tag{9}$$

Соотношение для определения u преобразуется к виду

$$\frac{3}{2}\ddot{u} + \omega_0^2 u = 2(C_1 + C_3). \tag{10}$$

Решая (10), получаем

$$u = A\sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0 t + \psi\right) + \frac{2}{\omega_0^2}(C_1 + C_3). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9) и проводя интегрирование при исходных данных $F_{xx}(0) = F_{yy}(0) = F_{zz}(0) = 1$, $F_{xy}(0) = F_{yx}(0) = 0$, $\dot{F}_{xy}(0) = \dot{F}_{yx}(0) = 0$, $\dot{F}_{xx}(0) = \dot{F}_{yy}(0) = \dot{F}_{zz}(0) = b$, $C_1 = 3(b^2+\alpha)$, $C_3 = \omega_0^2$, $\operatorname{tg}\psi = -\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{b^2+\alpha}{b\omega_0}$,

$$A = 2\sqrt{3}\sqrt{2b^2\omega_0^2 + 3(b^2+\alpha)^2}/\omega_0^2,$$

получаем окончательно

$$\chi = \frac{\omega_0 t}{2} - \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + 6\alpha}}\operatorname{arctg}\left\{\frac{[\omega_0^2 + 3(b^2+\alpha)]\operatorname{tg}\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0 t + \psi\right\} - \sqrt{3}\sqrt{2b^2\omega_0^2 + 3(b^2+\alpha)^2}}{\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + 6\alpha}}\right\}.$$

В случае некругового сечения эллипсоида (цилиндра) имеется возможность проинтегрировать соотношения, соответствующие закону сохранения момента импульса и завихренности. Как и выше, считаем, что отличны от нуля элементы матрицы F_{xx}, F_{yy}, F_{xy}, F_{yx}. Уравнения (4) записываются при этом в форме

$$\dot{F}_{xx}F_{xy} + \dot{F}_{yx}F_{yy} - F_{xx}\dot{F}_{xy} - F_{yx}\dot{F}_{yy} = -\left(\frac{eB}{mc}\right)(F_{xx}F_{yy} - F_{xy}F_{yx}) + C_2,$$

$$F_{xx}\dot{F}_{yx} + F_{xy}\dot{F}_{yy} - F_{yy}\dot{F}_{xy} - F_{yx}\dot{F}_{xx} = -\frac{1}{2}\left(\frac{eB}{mc}\right)(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + F_{xy}^2 + F_{yx}^2) + C_4.$$

Последовательно складывая и вычитая эти соотношения друг из друга и проводя преобразования, получим уравнения

$$\text{(12)}\qquad \begin{gathered} \left(\frac{F_{xy} - F_{yx}}{F_{xx} + F_{yy}}\right)^{\cdot} = \frac{eB}{2mc}\left[1 + \left(\frac{F_{xy} - F_{yx}}{F_{xx} + F_{yy}}\right)^2\right] + \frac{C_2 + C_4}{(F_{xx} + F_{yy})^2}, \\ \left(\frac{F_{xx} - F_{yy}}{F_{xy} + F_{yx}}\right)^{\cdot} = \frac{eB}{2mc}\left[1 + \left(\frac{F_{xx} - F_{yy}}{F_{xy} + F_{yx}}\right)^2\right] + \frac{C_2 - C_4}{(F_{xy} + F_{yx})^2}, \end{gathered}$$

которые при определенных начальных условиях легко интегрируются. Действительно, возможен подбор начальных условий, при которых $C_2 = C_4 = 0$. Интегрирование (12) при этом дает

$$\text{(13)}\qquad \frac{F_{xy} - F_{yx}}{F_{xx} + F_{yy}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_0 t}{2} + \psi_1\right), \quad \frac{F_{xx} - F_{yy}}{F_{xy} + F_{yx}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_0 t}{2} + \psi_2\right).$$

Соотношения (13) позволяют свести число неизвестных до минимума. В частности, при $\psi_1 - \psi_2 = \pi/2$, вводя $F_{xx} = R\sin\chi$, $F_{yy} = R\cos\chi$, $\delta = \omega_0 t/2 + \psi_1$, получаем $F_{xy} = F_{xx}\operatorname{tg}\delta$, $F_{yx} = -F_{yy}\operatorname{tg}\delta$, $R = \sqrt{u\cos^2\delta}$,

$$\text{(14)}\qquad \dot{\chi}^2 = \frac{1}{u\cos^2\delta}\left\{2C_1\cos^2\delta - (R^{\cdot})^2 - \frac{\omega_0}{2}\operatorname{tg}\delta\,(R^2)^{\cdot} - \frac{\omega_0^2 u}{4} - \dot{F}_{zz}^2\cos^2\delta - \right.$$
$$\left. - \frac{4\alpha\cos^2\delta}{\gamma - 1}\left[\frac{\cos^2\delta}{F_{zz}R^2\sin\chi\cos\chi}\right]^{\gamma-1}\right\}.$$

Уравнения (14) весьма доступны для численного анализа и соответствуют движению трехосного эллипсоида, вращающегося в магнитном поле, совпадающем с одной из осей эллипсоида.

Рассмотренные выше частные случаи соответствуют различному соотношению между магнитным полем (характерная величина ω_0) и давлением газа (характерная величина α). Случай (8) соответствует достаточно сильному магнитному полю, которое способно удерживать от разлета вращающееся облако газа. Случай (9) соответствует слабому магнитному полю, не влияющему существенно на характер расширения облака (после участка сжатия). Возможно конструирование общего поведения в случае, например, задачи о сжатии и разлете вращающегося заряженного газового столба (эллипсоида) в продольном магнитном поле применением на соответствующих участках либо решения типа (8), либо типа (9). Уравнения допускают конструирование более сложных точных решений, соответствующих встречающимся на практике задачам, вариацией вида F_{zz}.

Кроме возможных приложений в астрофизике и физике плазмы, отмеченных вначале, приведенные результаты интегрирования системы (2) представляют и самостоятельный интерес, поскольку обнаруживают случаи, являющиеся достаточно сложными, но позволяющими получить решение в элементарных функциях или свести окончательные интегралы к табличным.

Поступила 19 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Новое решение уравнений гидродинамики.— ДАН СССР, 1956, т. 111, № 1.
2. **Dyson J. F.** Dynamics of spinning gas cloud.— J. Matt. Mech., 1968, vol. 18, N 1.
3. **Анисимов С. И., Лысиков Ю. И.** О расширении газового облака в вакуум.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
4. **Богоявленский О. И.** Динамика гравитирующего газового эллипсоида.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.
5. **Анисимов С. И., Иногамов Н. А.** Развитие неустойчивости и потеря симметрии при изэнтропическом сжатии сферической капли.— Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, № 3.

УДК 533.95 : 537.15

НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АКТИВНОЙ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ПЛАЗМЫ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. П. Ковтун

(*Тбилиси*)

Исследование распространения волн в активной молекулярной плазме (АМП) представляет интерес в связи с развитием физики мощных газовых лазеров и изучением процессов, происходящих в космических лазерах. Так, в последнее время большое внимание уделяется лазерам с накачкой электронными пучками [1], в которых при большой плотности плазмы определенную роль в генерации шумов начинает играть взаимодействие между высокочастотными полями и резонансными уровнями молекулярного газа [2].

Взаимодействие свободных электронов с активной компонентой плазмы приводит к возникновению ряда неустойчивостей, которые могут оказаться нежелательными в ряде экспериментов с мощными газовыми лазерами. Некоторые из этих неустойчивостей были рассмотрены в работах [3—5].

Представляет интерес изучение поведения АМП во внешних полях, как возможных факторах подавления некоторых неустойчивостей.

В данной работе рассматривается АМП, находящаяся в высокочастотном электрическом поле. Активная компонента считается двухуровневой. Предполагая плазму холодной и бесстолкновительной, будем исходить из системы уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]\right), \\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} + \Omega^2 \boldsymbol{\xi} = -\frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}, \mathbf{B}]\right), \\
\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(g_m N \mathbf{u}) = 0, \\
\operatorname{rot}\mathbf{B} = -\frac{4\pi e}{c} n\mathbf{v} - \frac{4\pi e}{c} g_m N \mathbf{u} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ — скорости соответственно свободных и связанных электронов; $\boldsymbol{\xi}$ — смещение связанных электронов; n — плотность электронов; $N = N_1 - N_2 < 0$ — разность населенностей уровней; g_m — сила осциллятора. Остальные обозначения общепринятые.