

Рис. 5.

В реальных ситуациях причины возникновения вогнутых фронтов могут быть весьма разнообразные (неоднородность потока, рефракция, отражение, нестационарность распространения и т. п.), но динамика их в процессе фокусирования будет содержать те основные элементы, которые обсуждены выше.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. М.: ИЛ, 1962.
2. Whitham G. B. A new approach to problems of shock dynamics. Pt 1. Two-dimensional problems.— J. Fluid Mech., 1957, v. 2, pt 2.
3. Sturtevant B., Kulkarny V. A. The focusing of weak shock waves.— J. Fluid Mech., 1976, v. 73, pt 4.
4. Obermeier F. On the propagation of weak and moderately strong, curved shock waves.— J. Fluid Mech., 1983, v. 129.
5. Численное решение многомерных задач газовой динамики/Под ред. С. К. Годунова. М.: Наука, 1976.
6. Потапкин А. В., Рудаков А. И. О численном подходе к исследованию фокусировки ударных волн.— Межвузовский сб. Красноярск, 1979.
7. Потапкин А. В., Рудаков А. И., Юдинцев Ю. Н. Численное исследование фокусировки ударных волн.— ЧММСС, 1979, т. 10, № 3.
8. Потапкин А. В. Об использовании сгущающихся сеток в расчетах течений с большими градиентами.— ЧММСС, 1983, т. 14, № 3.
9. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
10. Заславский Б. И., Сафаров Р. А. О подобии течений, возникающих при отражении слабых ударных волн от жесткой стенки и свободной поверхности.— ФГВ, 1973, т. 9, № 4.
11. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977.

Поступила 3/IX 1984 г.

УДК 519.3 — 534.222.2

#### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОМЕРНЫМ УДАРОМ ПО НЕОДНОРОДНОМУ ПОРИСТОМУ МАТЕРИАЛУ

Э. И. Андрианкин, А. Л. Глебов

(Москва)

Распространение сильной ударной волны по пористому материалу имеет место при использовании последнего для защиты от удара или взрыва, а также в порошковой металлургии при динамическом формировании пористых металлов и металлических порошков ударом или взрывом [1]. При этом часто возникает необходимость оптимизации тех или иных конструкций или процессов [2]. В данной работе на основе теоретического анализа одномерного удара по неоднородному пористому материалу поставлен ряд задач оптимального управления, а также приводится решение задачи об оптимизации неоднородной пористой преграды по отношению к кинетической энергии.

**Сильная ударная волна в пористом материале.** Для описания уплотнения пористого материала обычно используются уравнения состояния, имеющие сложный вид и ограниченную область применения [3, 4]. Ситуация упрощается в случае сильной ударной волны, при уплотнении в которой поры необратимо схлопываются. Для описания течения за первой ударной волной используем уравнение состояния для материала без пор. Предполагаем, что дальнейшее изменение удельного объема мало по сравнению с удельным объемом материала без пор. Введем обозначения:  $p_1$  — давление в ударной волне, уплотняющей пористый материал до плотности материала без пор при нормальных условиях;  $p_2$  — характерное давление, при котором удельный объем сплошного материала изменяется, скажем, в 2 раза. Для многих материалов справедливо соотношение  $p_1 \ll p_2$ . Например, для железа со степенью пористости (отношение плотности пористого материала к плотности материала без пор), лежащей в интервале 0,6—1,  $p_1 \sim 1$  ГПа [5],  $p_2 \sim 10^2 - 10^3$  ГПа. Следовательно, диапазон давлений, в котором сделанные выше предположения справедливы, довольно широк (см. также [6]).

Рассмотрим сильную ударную волну в пористом материале, имеющем первоначальный объем  $v_1 = v_0/\alpha$ , где  $v_0$  — удельный объем материала без пор при нормальных условиях,  $\alpha$  — степень пористости. Начальные давление и внутреннюю энергию положим равными нулю, поверхностной энергией пор (или частиц порошка) пренебрегаем. Когда материал без пор подчиняется соотношению  $D = c + su$  ( $D$  — скорость фронта ударной волны,  $u$  — скорость частиц за фронтом;  $c, s$  — константы), получено [5] уравнение ударной адиабаты, хорошо описывающее сжатие пористых материалов в сильной ударной волне:

$$(1) \quad p_H = \frac{c^2 (v_0 - v_H)}{[v_0 - s(v_0 - v_H)]^2} \frac{1 - \frac{\gamma_0}{2v_0} (v_0 - v_H)}{1 - \frac{\gamma_0}{2v_0} (v_1 - v_H)},$$

где  $v_H, p_H$  — удельный объем и давление на ударной адиабате;  $\gamma_0$  — коэффициент Грюнайзена при нормальных условиях.

В интересующей нас области давлений

$$(2) \quad |v_0 - v| \ll v_0.$$

В дальнейшем будем пользоваться лагранжевыми координатами  $(m, t)$ , где  $m$  — полная масса одного квадратного метра слоя стенки между ее границей и данным сечением,  $t$  — время. Пусть  $m_s$  — лагранжева координата фронта ударной волны. Из (1), (2) и соотношений на ударном фронте следует выражение для скорости фронта ударной волны в пористом материале:

$$(3) \quad \dot{m}_s = a \left( \frac{p_H}{p_H + \delta} \right)^{1/2}, \quad a = \frac{c}{v_0}, \quad \delta = \frac{a^2 v_0 (1 - \alpha)}{\alpha}.$$

После уплотнения пористого материала ударной волной дальнейшее его поведение при выполнении условия (2) достаточно хорошо описывается изэнтропой, проходящей через точку  $(p_H, v_H)$ . Из условия изэнтропичности  $dE = -p dv$ , а также уравнения (1) и уравнения состояния для материала без пор, используемого в [5], получим уравнение изэнтропы для ударно-сжатого пористого материала в приближении (2):

$$(4) \quad p = a^2 (v_0 - v) + \frac{\gamma_0}{2} \frac{1 - \alpha}{\alpha} p_H.$$

Формулы (3), (4) справедливы для материала с произвольной степенью пористости.

**Одномерный удар по неоднородному пористому материалу.** Для области за фронтом ударной волны запишем уравнения

$$(5) \quad \partial v / \partial t = \partial u / \partial m, \quad \partial u / \partial t = -\partial p / \partial m.$$

Исключая из (4), (5) величины  $u, v$ , имеем уравнения, описывающие давление за ударной волной и движение самого фронта:

$$(6) \quad \partial^2 p / \partial t^2 = a^2 \partial^2 p / \partial m^2, \quad t \geq 0, \quad m \in [0, m_s(t)];$$

$$(7) \quad p(0, t) = \omega(t);$$

$$(8) \quad m_s = \chi(p(m_s, t), m_s), \quad m_s(0) = 0;$$

$$(9) \quad \chi(p, m) = a \left( \frac{p}{p + \delta(m)} \right)^{1/2}, \quad \delta(m) = \frac{a^2 v_0 (1 - \alpha(m))}{\alpha(m)}.$$

Здесь  $m_s(t)$  — лагранжева координата фронта;  $\omega(t)$  — заданное давление на левой границе стенки;  $\alpha(m)$  — заданная зависимость степени пористости материала от  $m$ . Предполагаем, что неоднородность материала сводится только к зависимости  $\alpha(m)$ . Отметим, что поле давлений за ударной волной описывается волновым уравнением (6) с  $a = \text{const}$ , несмотря на неоднородный нагрев ударно-сжатого материала.

Поскольку правая граница области течения неизвестна, необходимо добавить к (8) еще одно условие на этой границе. Для его получения вычислим приращение скорости  $du$  на правой границе  $m_s(t)$  за время  $dt$  двумя способами, каждый раз выражая приращение через давление и его производные. С одной стороны, это можно сделать с помощью равенств (4), (5), а с другой — используя соотношения Гюгоньо. Приравняв полученные выражения и произведя необходимые преобразования, найдем условие на неизвестной границе

$$(10) \quad \partial p(m_s, t) / \partial t + \psi \partial p(m_s, t) / \partial m = \varphi \alpha'(m_s),$$

где

$$(11) \quad \psi = \psi(p, m) = \frac{4p + 3\delta(m)}{4p + \delta(m)} \chi(p, m);$$

$$(12) \quad \varphi = \varphi(p, m) = \frac{a^2 v_0}{\alpha^2(m)} \frac{p}{4p + \delta(m)} \chi(p, m).$$

Решение уравнения (6) запишем в виде

$$(13) \quad p(m, t) = f(t - m/a) + g(t + m/a),$$

где  $f, g$  — произвольные функции. Из (8), (9) следует, что  $m_s \leq a$ , поэтому при  $m \in [0, m_s(t)]$ ,  $t \geq 0$  (т. е. в области течения за скачком) аргументы функций  $f$  и  $g$  неотрицательны. Из условия (7) ясно, что  $g(t) = \omega(t) - f(t)$ , поэтому

$$(14) \quad p(m, t) = f(t - m/a) - f(t + m/a) + \omega(t + m/a).$$

При подстановке последней формулы в условие (10) исходная задача сводится к задаче для системы дифференциальных уравнений с одной независимой переменной с отклоняющимся аргументом нейтрального типа [7]. В качестве независимой переменной удобно взять величину  $\xi = t + m_s(t)/a$ , введем также обозначение  $\eta(\xi) = 2m_s(t)/a$ . Получаем задачу для системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями  $\eta(\xi)$ ,  $f(\xi)$  (штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной):

$$(15) \quad \eta'(\xi) = 2 - \frac{2a}{a + \chi};$$

$$(16) \quad f'(\xi) = \omega'(\xi) + \frac{a - \psi}{a + \psi} f'(\xi - \eta(\xi)) - \frac{a\varphi\alpha'}{a + \psi}.$$

Здесь  $\xi \geq 0$ ; начальное множество состоит из одной точки  $\xi = 0$ ; условия на начальное множество:  $\eta(0) = 0$ ,  $f(0) = 0$  (последнее условие взято для удобства, в действительности значение  $f(0)$  может быть произвольным). В правых частях уравнений (15), (16),  $\chi, \psi, \varphi$  — заданные формулами (9), (11), (12) функции двух переменных; значения аргументов этих функций равны соответственно  $f(\xi - \eta(\xi)) = f(\xi) + \omega(\xi)$  и  $a\eta(\xi)/2$ . Значение аргумента функции  $\alpha'$  в (16) равно  $a\eta(\xi)/2$ .

Решение задачи (15), (16) существует и единственно [8]. Эту задачу можно решать численно, изменяя  $\xi$  с некоторым шагом, но нужно хранить в памяти все вычисленные значения функции  $f(\xi)$  и ее производной; необходимые на каждом шаге значения  $f$  и  $f'$  для запаздывающих значений аргумента можно вычислять с помощью интерполяции. Если функция  $f(\xi)$  найдена, то поле давлений определяется по формуле (14). Недостаток описанного метода — требование гладкости функций  $\omega(t)$  и  $\alpha(m)$ .

Возможен и иной подход к решению исходной задачи (6)–(12), представляющий собой вариант метода характеристик. При этом подходе функции  $\omega(t)$  и  $\alpha(m)$  предполагаются кусочно-постоянными (количество и величины скачков произвольны). Функции  $f$  и  $g$  в формуле (13) также будут кусочно-постоянными. По своему происхождению  $f$ -скачки (т. е. скачки функции  $f$ ) могут быть двух видов: порождаемые  $\omega$ -скачками и возникающие при отражении  $g$ -скачков от левой границы. Аналогично существует два вида  $g$ -скачков: порождаемые  $\alpha$ -скачками в момент прихода ударной волны и порождаемые  $f$ -скачками в тот момент, когда они догоняют ударную волну. Формулы для величин скачков функций  $f$  и  $g$  следуют из граничных условий.

Таким образом, вместо исходной задачи имеем задачу об описании движения системы скачков. Эту задачу можно решать численно, изменяя время с некоторым шагом и каждый раз вычисляя новые параметры скачков (учитывая рождение новых скачков) и координату фронта ударной волны. При этом на каждом шаге поле давлений определяется по формуле (13).

Из закона сохранения импульса в интегральной форме получим формулу для поля скоростей

$$u(m, t) = u(m_s, t) + \frac{1}{a} \left[ f\left(t - \frac{m}{a}\right) - f\left(t - \frac{m_s}{a}\right) \right] - \frac{1}{a} \left[ g\left(t + \frac{m}{a}\right) - g\left(t + \frac{m_s}{a}\right) \right],$$

где  $u(m_s, t) = \frac{1}{a} [p_H(p_H + \delta)]^{1/2}$ ; последняя формула следует из (8), (9) и соотношений Гюгонио.

Из формулы (4) и соотношений на ударном фронте имеем выражение для удельной внутренней энергии в произвольной точке течения:

$$(17) \quad E(m, t) = \frac{1}{2a^2} [p(m, \tau) \delta(m) + p^2(m, t)],$$

где  $\tau$  — решение уравнения

$$(18) \quad m_s(\tau) = m.$$

Для оценки эффективности демпфирования удара пористой стенкой может представлять интерес полная энергия, необратимо перешедшая в тепло, точнее говоря, полная внутренняя энергия стенки при ее разгрузке ( $p = 0$  при всех  $m$ ):

$$(19) \quad W = \frac{1}{2a^2} \int_0^M p_H(m) \delta(m) dm,$$

где  $M$  — лагранжева координата конца стенки;  $p_H(m) = p(m, \tau)$ ;  $\tau(m)$  — решение уравнения (18).

Приведем результаты расчета действия импульса нагрузки на трехслойную стенку, для которой

$$(20) \quad \alpha(m) = \begin{cases} 1 & \text{при } m \in [0, 100], \\ 0,5 & \text{при } m \in [100, 200], \\ 1 & \text{при } m \in (200, 300]. \end{cases}$$

Материал стенки — железо (средний слой пористый),  $a = 2,91 \cdot 10^7$ ,  $v_0 = 1,27 \cdot 10^{-4}$ ,  $M = 300$  (что соответствует толщине стенки 5,08 см), размер-

ные величины там, где это не указано, даются в системе СИ. Импульс давления прямоугольный, с амплитудой  $p_0 = 10^{10}$  и длительностью  $\tau = 10^{-5}$ .

Полная энергия, переданная стенке импульсом давления,

$$(21) \quad K = \int_0^{\tau} p(0, t) u(0, t) dt.$$

Мерой эффективности демпфирующего действия стенки будем считать кинетическую энергию, оставшуюся у стенки после ее ударного уплотнения (чем меньше энергия, тем больше эффективность защиты):  $I = K - W$  (см. формулу (19)). Напомним, что полный импульс стенки от момента окончания действия импульса нагрузки и до начала взаимодействия стенки с другими объектами остается постоянным.

Для трехслойной стенки (20)  $K = 4,99 \cdot 10^7$ ,  $W = 2,30 \cdot 10^7$ ,  $I = 2,69 \cdot 10^7$ ; для сравнения укажем, что для однородной стенки из материала без пор, имеющей ту же массу (толщина 3,81 см),  $I = K = 3,44 \cdot 10^7$ ,  $W = 0$ . Для однородной пористой стенки, имеющей те же массу и толщину, что и неоднородная стенка (20), что соответствует  $\alpha = 0,75$ , получены значения  $K = 7,35 \cdot 10^7$ ,  $W = 5,61 \cdot 10^7$ ,  $I = 1,74 \cdot 10^7$ . Из приведенных величин видно, что эффективность демпфирования удара пористыми стенками может быть значительной.

**Задачи оптимального управления ударом.** Выше задача об ударе по неоднородной пористой стенке сформулирована в трех различных формах: краевая для волнового уравнения с неизвестной границей — задача А (формулы (6) — (12)); для системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом — задача В (формулы (15), (16)); о движении системы скачков — задача С. С физической точки зрения все три формы эквивалентны, поэтому будем для определенности исходить из задачи А. На ее основе возможна постановка ряда задач оптимального управления, соответствующих различным ситуациям. Рассмотрим некоторые из них. (Ниже всюду управляющие функции берутся из некоторого разумным образом выбранного класса функций, например из множества кусочно-дифференцируемых функций, заданных на отрезке. В дальнейшем класс допустимых управлений специально не оговаривается.)

1. Рассмотрим демпфирование импульсной нагрузки пористой стенкой. Поставим задачу нахождения оптимальной структуры стенки, т. е. такой структуры, для которой при заданном импульсе давления кинетическая энергия, остающаяся у стенки после прохождения ударной волны, минимальна. В данном случае функция  $\omega(t)$  в задаче А задана,  $\alpha(m)$  — искомое управление. Имеем

$$(22) \quad I = K - \bar{W} \rightarrow \min,$$

где  $K$  и  $W$  вычисляются по формулам (21), (19). Сформулируем ограничения на значения пористости  $\alpha$  и на полный размер стенки:

$$(23) \quad \alpha(m) \in [\alpha_{\min}, 1];$$

$$(24) \quad l = v_0 \int_0^M \frac{dm}{\alpha(m)} \leq l_{\max}.$$

Таким образом, имеем задачу оптимального управления (6)—(12), (22)—(24).

2. Можно сформулировать задачу, обратную задаче 1: определение оптимального импульса давления при пробивании пористой стенки с заданной структурой. В данном случае максимизируется кинетическая энергия стенки,  $\alpha(m)$  задано,  $\omega(t)$  — управление. При этом ограничения, накладываемые на допустимые управления, могут быть различными в зависимости от конкретной физической ситуации.

3. Рассмотрим следующее видоизменение задачи 1: демпфирование ударной нагрузки пористой стенкой, когда ударник — твердая, недеформируемая пластина (скорость звука бесконечна) с заданной массой  $M_p$  и

начальной скоростью  $u_{p0}$ . В этом случае в исходной задаче А условие на левой границе (7) заменяется на условие

$$p(0, t) + M_p \partial u(0, t) / \partial t = 0, \quad u(0, 0) = u_{p0},$$

следующее из уравнения движения твердого ударника. Управлением является структура стенки  $\alpha(m)$ . Минимизируется суммарная кинетическая энергия стенки и ударника:

$$(25) \quad I = \frac{1}{2} M_p u_{p0}^2 - W \rightarrow \min.$$

(Данный критерий оптимальности аналогичен использованному в [2].) Ограничения на  $\alpha$  те же, что и в задаче 1.

4. Рассмотрим задачу об оптимизации демпфирования удара пористой стенкой, когда ударник — также пористая пластина (структура ударника задана). В этом случае в исходной задаче А вместо условий (7),  $u(m, 0) = 0$  используем начальные и граничные условия

$$p(0, t) = 0, \quad u(m, 0) = \begin{cases} u_{p0}, & m \in [0, M_p] \\ 0, & m \in (M_p, M] \end{cases}$$

Ударник соответствует отрезку  $[0, M_p]$  лагранжевой координаты, а мишень — отрезку  $[M_p, M]$ . Область течения имеет две неизвестные границы  $m_{sp}(t)$  и  $m_s(t)$ , соответствующие двум ударным волнам (в ударнике и в мишени). Здесь  $\alpha(m)$ ,  $m \in [0, M_p]$  — заданная структура ударника;  $\alpha(m)$ ,  $m \in [M_p, M]$  — управление (структура мишени). Минимизируется суммарная кинетическая энергия ударника и стенки, определяемая формулой (25). Ограничения на управление здесь такие же, что и в задаче 1.

5. Можно поставить задачу, обратную задаче 4: определение оптимальной структуры ударника при пробивании пористой стенки с заданной структурой, когда ударник — также пористая пластина.

6. Рассмотрим задачу оптимизации разогрева ударом пористого материала: для заданного импульса нагрузки (7) определить структуру стенки  $\alpha(m)$ , для которой средняя температура некоторой заданной части стенки  $[m_1, m_2]$  после ударного уплотнения будет максимальной:

$$W_1 = \int_{m_1}^{m_2} p_H(m) \delta(m) dm \rightarrow \max,$$

где  $p_H(m)$  — то же, что и в формуле (19).

7. В порошковой металлургии при динамическом формовании пористых металлов и металлических порошков сильным ударом или взрывом может быть поставлена задача об оптимизации структуры исходной пористой заготовки с точки зрения устранения остаточных напряжений в получаемой детали. Например, если известно распределение внутренней энергии (температуры) в уплотненном металле  $E_0(m)$ , приводящее при остывании детали к минимальным внутренним напряжениям, то можно поставить задачу о нахождении структуры заготовки, при которой отклонение распределения внутренней энергии материала после уплотнения от  $E_0(m)$  минимально:

$$I = \int_0^M \left[ \frac{1}{2a^2} p_H(m) \delta(m) - E_0(m) \right]^2 dm \rightarrow \min.$$

Здесь  $\omega(t)$  — заданная функция;  $\alpha(m)$  — управление (с теми же ограничениями, что и в задаче 1). На правой границе стенки можно использовать условие  $u(M, t) = 0$ .

Далее будет рассмотрено численное решение задачи 1 (аналогичный подход можно использовать и для задач 2—7). Переходя к дискретному аналогу задачи 1, будем считать пористую стенку состоящей из  $n$  однородных слоев равной массы, имеющих значения пористости  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .



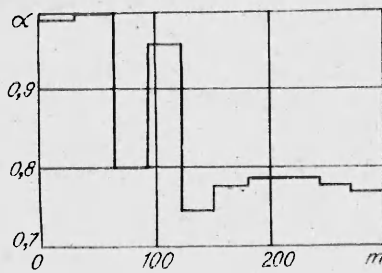


Рис. 1.

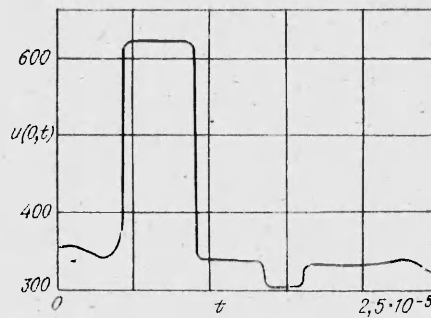


Рис. 2.

При этом вместо исходной задачи  $A$  будем использовать задачу  $C$ . Таким образом, задача оптимального управления оказывается сведенной к задаче минимизации функции  $n$  переменных  $I(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  [9]. Конкретное вычисление  $I$  производится посредством численного решения задачи  $C$ .

Для решения полученной задачи математического программирования воспользуемся методом Хука — Дживса [10], модифицированным с учетом ограничений, следующих из (23), (24):

$$(26) \quad \alpha_i \in [\alpha_{\min}, 1], \quad i = 1, \dots, n;$$

$$(27) \quad f(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} \leq A = \frac{l_{\max}}{v_0 \Delta m},$$

где  $\Delta m$  — удельная масса каждого слоя. Учет ограничений (26), (27) может быть произведен либо методом штрафных функций [9, 11], либо описанным ниже.

В алгоритме Хука — Дживса координаты  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  последовательно получают приращения величиной  $\pm \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Если приращение  $k$ -й координаты не ведет к уменьшению минимизируемой функции, то оно отбрасывается (т. е. восстанавливается прежнее значение  $\alpha_k$ ). Приращения координат, ведущие к нарушению хотя бы одного из ограничений (26), (27), также отбрасываем (то же происходило бы при введении штрафных функций, т. е. слагаемых в  $I$ , быстро растущих при нарушении ограничений).

Модификация алгоритма Хука — Дживса заключается в перемещении текущей точки параллельно ограничивающей гиперповерхности в случае близости к ней, если описанные выше шаги не приводят к уменьшению  $I$ . Если текущая точка находится вблизи ограничивающей гиперповерхности  $f(\alpha) = A$ , то всегда найдется хотя бы одна такая координата  $\alpha_k$ , которую можно менять в обе стороны, т. е. текущая точка находится вдали от ограничивающих гиперплоскостей  $\alpha_k = \alpha_{\min}$  и  $\alpha_k = 1$ . При этом если последовательные приращения всех переменных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  не дали результата (т. е. значение  $I$  не уменьшилось), то последовательно для всех  $l \neq k$  производится набор шагов вида

$$(28) \quad \Delta \alpha_k = \pm \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_l^4}{\alpha_k^4} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \Delta \alpha_l = \left( \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_l} - \frac{1}{\alpha_k + \Delta \alpha_k} \right)^{-1} - \alpha_l.$$

Шаг (28) представляет собой смещение евклидовой длины  $\varepsilon$ , сделанное в двумерной плоскости  $(\alpha_k, \alpha_l)$ , при котором точка остается на поверхности  $f(\alpha) = \text{const}$ . Если последовательные шаги вида (28) также не дают результата, величина шага  $\varepsilon$  уменьшается и производится контроль сходимости (при  $\varepsilon$  меньше заданной точности текущая точка считается точкой минимума).

Ниже приведены результаты расчета оптимальной структуры демпфирующей пористой стенки для прямоугольного импульса давления с амплитудой  $p_0 = 10^{10}$  и длительностью  $\tau = 10^{-5}$ . Материал стенки — же-

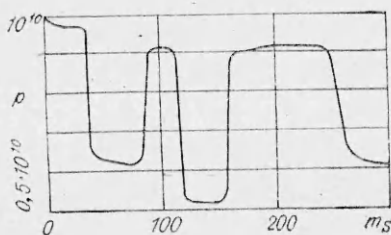


Рис. 3.

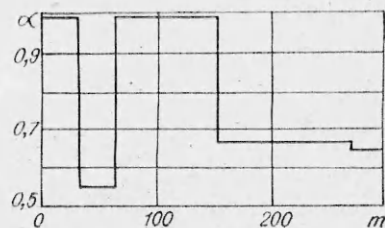


Рис. 4.

лезу, удельная масса стенки  $M = 300$ . Допустимые значения пористости  $\alpha = 0,25-1$ . Ограничение на толщину стенки  $l_{\max} = 5,08$  см (что соответствует толщине однородной стенки с  $\alpha = 0,75$ ). Точность по  $\alpha$  выбрана равной 0,01.

Расчет, проведенный для трехслойной структуры ( $n = 3$ ), дал следующие оптимальные параметры:  $\alpha_1 = 0,98$ ,  $\alpha_2 = 0,75$ ,  $\alpha_3 = 0,78$ ,  $I = 1,67 \cdot 10^7$ ,  $l = 4,62$  см.

Затем был выполнен более точный расчет ( $n = 10$ ). Поскольку алгоритм Хука — Дживса осуществляет поиск локального минимума, точка минимума может зависеть от выбора начального приближения. Из расчетов видно, что оптимальная структура стенки и значение минимизируемого функционала для набора существенно различных начальных приближений практически одни и те же. На рис. 1 показана оптимальная структура пористой стенки, полученная при начальном приближении  $\alpha(m) = 0,9 = \text{const}$  ( $I = 2,98 \cdot 10^7$ ). Значения  $I$  и  $l$  при этом практически те же, что и для оптимальной трехслойной структуры. На рис. 2, 3 приведены рассчитанные зависимости скорости нагружаемой поверхности от времени и давления за фронтом ударной волны от его координаты для пористой стенки с оптимальной структурой.

Расчеты повторены для различных амплитуд и длительностей импульса давления:  $p_0 = (0,5-2) \cdot 10^{10}$ ,  $\tau = (0,75-1,5) \cdot 10^{-5}$ . Оказалось, что при малых значениях произведения  $p_0\tau$  (полный импульс, переданный стенке) оптимальная стенка — практически однородная стенка с  $\alpha \approx 0,75$ . Для средних значений величины  $p_0\tau$  типична оптимальная структура стенки, показанная на рис. 1. И наконец, при дальнейшем увеличении  $p_0\tau$  для оптимальной структуры характерно «уширение» максимума зависимости  $\alpha(m)$  в средней части стенки. На рис. 4 показана оптимальная структура пористой стенки для  $p_0 = 2 \cdot 10^{10}$ ,  $\tau = 1,25 \cdot 10^{-5}$ , начальное приближение  $\alpha(m) = 0,76 = \text{const}$  ( $I = 1,62 \cdot 10^8$ ). Оптимальной стенке соответствуют толщина  $l = 5,07$  см и значение минимизируемого функционала  $I = 1,21 \cdot 10^8$ . С увеличением полного импульса  $p_0\tau$  выигрыш в значении минимизируемого функционала для оптимальной структуры (по сравнению с однородной пористой стенкой при  $\alpha = 0,75$ ) заметно растет.

Задачи оптимального управления, аналогичные рассмотренным в данной работе, могут быть поставлены на основе теории, допускающей частичное уплотнение пористого материала в ударной волне [12, 13].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Роман О. В. Импульсное формование порошковых материалов. — В кн.: Тр. 2-го совещ. по обработке материалов взрывом. Новосибирск, 1982.
2. Майборода В. П. Оптимизация слоистых преград по отношению к интенсивным импульсным нагрузкам. — Расчеты на прочность, 1983, № 24.
3. Херманн В. Определяющие уравнения уплотняющихся пористых материалов. — В кн.: Проблемы теории пластичности (Механика. Новое в зарубежной науке, т. 7). М.: Мир, 1976.
4. Горовой В. А., Асатурян А. Ш., Сыпко А. В. Ударное прессование пористых металлов. — В кн.: Порошковые конструкционные материалы. Киев, 1980.
5. Мак-Куин Р. Уравнение состояния твердых тел по результатам исследования ударных волн. — В кн.: Высокоскоростные ударные явления. М.: Мир, 1973.



6. Ставер А. М., Кузьмин Г. Е., Нестеренко В. Ф. Экспериментальное исследование ударных волн в пористых средах.— В кн.: Тр. 2-го совещ. по обработке материалов взрывом. Новосибирск, 1982.
7. Эльсгольд Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964.
8. Каменский Г. А. Существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных условий решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.— Матем. сборник, 1961, т. 55, № 4.
9. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука, 1975.
10. Hooke R., Jeeves T. A. Direct search solution of numerical and statistical problems.— Comm. Assoc. for Comput. Mach., 1961, N 8.
11. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
12. Андрианкин Э. И. Плоская ударная волна в пластической среде.— В кн.: Исследования по физике и радиотехнике. М.: МФТИ, 1959, № 4.
13. Андрианкин Э. И. Распространение плоских одномерных волн при ударе в пластической среде.— В кн.: Исследования по механике и прикладной математике. М.: МФТИ, 1960, № 5.

Поступила 26/XII 1984 г.

УДК 532.529.5

## СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В СМЕСИ ГАЗА И ПЛАВЯЩИХСЯ ЧАСТИЦ

А. В. Федоров, В. М. Фомин  
(Новосибирск)

Процесс плавления твердых частиц, диспергированных в потоке газа, встречается при протекании различных газодинамических явлений в технических устройствах. В частности, при нерасчетных режимах в соплах Лаваля, имеющих в качестве рабочего тела газ с конденсированными продуктами горения топлива, структура возникающей ударной волны (УВ) усложняется по сравнению с УВ, распространяющейся по смеси газа и частиц без учета фазового перехода. Обусловлено это тем, что помимо релаксационного процесса выравнивания температур фаз в течении происходит с конечным временем релаксации переход частиц из твердого состояния в жидкое. Движущая сила этого перехода — отличие концентрации жидкого вещества от ее равновесного значения.

В [1, 2] изучена структура УВ в смеси газа и плавящихся частиц в рамках односкоростной, однотемпературной механики гетерогенных сред с учетом неравновесного процесса плавления.

Случай, когда процесс теплообмена между фазами протекает с конечной скоростью, требует рассмотрения данного вопроса на основе модели, учитывающей различие температур фаз. В то же время, считая частицы достаточно мелкими и предполагая, что они мгновенно увлекаются потоком газа, можно рассчитывать, что предложенная в [3] упрощенная модель течения смеси будет адекватна изучаемому явлению распространения УВ в смеси газа и частиц металла с учетом плавления. Полагаем, что теплота фазового перехода  $L$  не зависит от температуры плавления, обусловленной давлением смеси.

**1. Постановка задачи определения структуры ударной волны в смеси. Исследование адиабаты Гюгонио.** Рассмотрим процесс распространения УВ по смеси газа и твердых частиц. Уравнения, описывающие это явление в сопутствующей УВ системе координат, имеют вид

$$(1.1) \quad \rho u = c_1, \quad p + c_1 u = c_2, \quad e + p v + u^2/2 = c_3,$$

$$p = \frac{\bar{\alpha} R T}{w}, \quad e = \bar{c}_{v1} T + c_* T_2 + L \xi,$$

$$u \dot{\xi} = \kappa, \quad u \dot{T}_2 = q, \quad \rho_{22} = \rho_{33} = r$$

(см. обозначения в [3]). Примем функции источников

$$\kappa = -\frac{1}{\tau} (\xi - \xi_e(S, v)), \quad q = -\frac{1}{\tau_1} (T_2 - T), \quad \xi_e = \xi_0 \theta^{\frac{L}{c_{v1}} (T^{-1} - T_0^{-1})}.$$