ПМТФ, № 4, 1973

УДК 534.222

О НЕРЕЗОНАНСНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Б. А. Конюхов, Г. М. Шалашов

(Горький)

В работе в параметрическом приближении приводится решение задачи о нелинейном взаимодействии поверхностных волн Рэлея, распространяющихся в твердом теле с заданными упругими полями. Получены укороченные уравнения, описывающие эффект модуляции поверхностных волн и выражения индекса модуляции через константы упругости третьего порядка.

1. В литературе среди нелинейных эффектов, имеющих место при распространении поверхностных волн в твердых телах, рассматривалась лишь генерация высших гармоник. Этим не исчерпываются нелинейные эффекты, и представляет интерес изучение взаимодействия нескольких поверхностных волн, а также взаимодействие поверхностных волн с внутренними упругими полями твердой среды. В данной работе проведено теоретическое рассмотрение параметрических взаимодействий поверхностных волн Рэлея с объемными упругими полями, удовлетворяющими граничным условиям.

Рассмотрение может быть проведено на базе асимптотических методов. Для этого необходимо решать систему нелинейных волновых уравнений с соответствующими граничными условиями.

Сформулируем задачу: пусть по границе твердое тело — вакуум распространяется рэлеевская волна в направлении оси x (здесь введена обычная декартова система координат), однородная по y и неоднородная по z (вектор нормали к поверхности твердого тела направлен по z). На твердое тело действует внешнее произвольное модулирующее поле (удовлетворяющее соответствующим граничным условиям), медленно изменяющееся в пространстве и во времени, по сравнению с колебаниями точек в рэлеевской волне. Задача сводится к определению изменений комплексной амплитуды волны Рэлея. Система нелинейных волновых уравнений для этого случая в переменных Лагранжа имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \left(K + \mu \frac{1}{3}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} = \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z}$$
$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \left(K + \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} = \frac{\partial T_{31}}{\partial x} + \frac{\partial T_{33}}{\partial z} \tag{1.1}$$

где K — модуль всестороннего сжатия, μ — модуль сдвига, T_{ik} — нелинейная часть тензора напряжений, u_i — компоненты вектора смещений (индекс 1 соответствует x, 2 $\sim y$, 3 $\sim z$). Граничные условия, определяемые отсутствием внешних сил, нормальных к поверхности твердого тела, имеют вид [1]

$$\sigma_{ik} n_k = 0 \quad \text{при } z = 0 \tag{1.2}$$

где n_k — вектор нормали к границе твердой упругой среды. В данном случае при нормали, направленной по z, имеют место соотношения

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \tag{1.3}$$

где σ_{ik} — полный тензор напряжений.

Учитывая (1.2), (1.3) и то обстоятельство, что волна по y однородна (т. е. $\partial/\partial y = 0$) можно получить граничные условия для $z = 0$ в виде

$$\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = -T_{13} \tag{1.4}$$

$$\left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial u_3}{\partial z} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} = -T_{33}$$

Таким образом задача сводится к решению уравнений (1.1) с граничными условиями (1.4) при заданном модулирующем поле $\mathbf{u}^m$.

Прежде чем приступить к решению указанной нелинейной задачи, запишем решение линейной задачи, т. е. решение системы (1.1) и (1.4) при равных нулю правых частях в форме:

$$u_1 = \mathrm{Re}\,(a_1 e^{\varkappa_1 z} + a_2 e^{\varkappa_2 z}) e^{i(\omega t - kx)} \tag{1.5}$$

$$u_3 = \mathrm{Re}\,(i\rho_1 a_1 e^{\varkappa_1 z} + i\rho_2 a_2 e^{\varkappa_2 z}) e^{i(\omega t - kx)}$$

где a_1 и a_2 — постоянные амплитуды

$$\varkappa_1{}^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_l{}^2}, \quad \varkappa_2{}^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_t{}^2}, \quad \rho_1 = -\frac{\omega^2 - c_l{}^2 k^2}{\varkappa_1 k c_l{}^2}, \quad \rho_2 = \frac{k}{\varkappa_2}$$

$$\left(c_l = \left[\frac{(K + {}^4/_3\,\mu)}{\rho_0}\right]^{1/2}, \quad c_t = (\mu/\rho_0)^{1/2}\right)$$

k — волновое число, c_l — скорость продольных волн, c_t — скорость сдвиговых волн, ρ_0 — плотность невозмущенной среды. Для однородной по y волны граничные условия линейной задачи удовлетворяются при

$$a_2 = a_1 S \qquad \left(S = -\frac{2\rho_1\rho_2}{1 + \rho_2{}^2}\right) \tag{1.6}$$

и соответствующее дисперсионное уравнение имеет решение вида

$$\omega = c_t k \xi \tag{1.7}$$

где ξ — некоторое постоянное число меньше единицы.

2. Решение задачи о нелинейном взаимодействии волны Рэлея с модулирующим упругим полем будем искать в параметрической форме

$$u_1(x,\ t) = \mathrm{Re}\,[a_1(x,\ t)\, e^{\varkappa_1 z} + a_2(x,\ t)\, e^{\varkappa_2 z}]\ e^{i(\omega t - kx)} + \tag{2.1}$$
$$+ u^m(x, y, z, t) + \mu^* w_1$$

$$u_3(x,\ t) = \mathrm{Re}\,[i\rho_1 a_1(x,\ t)\, e^{\varkappa_1 z} + i\rho_2 a_2(x,\ t)\, e^{\varkappa_2 z}] e^{i(\omega t - kx)} +$$
$$+ u^m(x, y, z, t) + \mu^* w_2$$

где $a_1(x, t)$, $a_2(x, t)$ медленно меняющиеся функции x и t, μ^* — безразмерный параметр, имеющий смысл акустического числа Маха, $(\mu^* = u/\lambda)$, w_i — добавка, учитывающая неточность приближенного решения (2.1). Подставляя (2.1) в (1.1) и приравнивая коэффициенты при $e^{i(\omega t - kx)}$ после разложения в ряд Фурье, можно получить уравнения для w_i

$$
(2.2)\quad
\begin{gathered}
(c_l^2k^2-\omega^2)w_1-c_t^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}+ik(c_l^2-c_t^2)\frac{\partial w_3}{\partial z}=\Big(\alpha_{11}\frac{\partial a_1}{\partial t}+\alpha_{12}\frac{\partial a_1}{\partial x}+\\
+\alpha_{13}\frac{\partial a_1}{\partial z}+F_{11}\Big)e^{\varkappa_1 z}+\Big(\beta_{11}\frac{\partial a_2}{\partial t}+\beta_{12}\frac{\partial a_2}{\partial x}+\beta_{13}\frac{\partial a_2}{\partial z}+F_{12}\Big)e^{\varkappa_2 z}\\
(c_t^2k^2-\omega^2)w_3-c_l^2\frac{\partial^2 w_3}{\partial z^2}+ik(c_l^2-c_t^2)\frac{\partial w_1}{\partial z}=\Big(\alpha_{21}\frac{\partial a_1}{\partial t}+\alpha_{22}\frac{\partial a_1}{\partial x}+\\
+\alpha_{23}\frac{\partial a_1}{\partial z}+F_{13}\Big)e^{\varkappa_1 z}+\Big(\beta_{21}\frac{\partial a_2}{\partial t}+\beta_{22}\frac{\partial a_2}{\partial x}+\beta_{23}\frac{\partial a_2}{\partial z}+F_{32}\Big)e^{\varkappa_2 z}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(\alpha_{11}=-2i\omega,\ \alpha_{12}=-ik[2c_l^2-\rho_1^2(c_l^2-c_t^2)],\ \alpha_{13}=k\rho_1(c_l^2+c_t^2)\\
\alpha_{21}=2\rho_1\omega,\ \alpha_{22}=k\rho_1(c_l^2+c_t^2),\ \alpha_{23}=ik[2\rho_1^2c_l^2-(c_l^2-c_t^2)]\\
\beta_{11}=-2i\omega,\quad \beta_{12}=-ik\rho_1(c_l^2+c_t^2),\ \beta_{13}=\frac{k}{\rho_2}[2c_t^2+\rho_2^2(c_l^2-c_t^2)]\\
\beta_{21}=2\rho_2\omega,\ \beta_{22}=\frac{k}{\rho_2}[2\rho_2^2c_t^2+(c_l^2-c_t^2],\quad \beta_{23}=ik(c_l^2+c_t^2))
\end{gathered}
$$

где F_{ik} — коэффициенты Фурье, получающиеся при усреднении правых частей уравнений (1.1). При выводе F_{ik} учитываются условия

$$
(2.3)\quad
\begin{gathered}
\left|\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_i\partial x_k}\right|\ll k\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right|\ll k^2|a_i|,\quad \left|\frac{\partial^2 a_i}{\partial t^2}\right|\ll\omega\left|\frac{\partial a_i}{\partial t}\right|\ll\omega^2|a_i|\\
\left|\frac{\partial^2 u_i^m}{\partial x_i\partial x_k}\right|\ll k\left|\frac{\partial u_i^m}{\partial x_k}\right|\ll k^2|u_i^m|;\quad \left|\frac{\partial^2 u_i^m}{\partial t^2}\right|\ll\omega\left|\frac{\partial u_i^m}{\partial t}\right|\ll\omega^2|u_i^m|
\end{gathered}
$$

Полученные коэффициенты F_{ik} определяются соотношениями вида

$$
(2.4)\quad
\begin{gathered}
F_{11},\ F_{31}=\langle F_i\rangle\ \{i=1.3,\ \ \gamma=\varkappa_1,\ \ A_1=a_1,\ \ A_2=0,\ \ A_3=i\rho_1 a_1\}\\
F_{12},\ F_{32}=\langle F_i\rangle\ \{i=1.3;\ \ \gamma=\varkappa_2;\ A_1=a_2;\ \ A_2=0,\ \ A_3=i\rho_2 a_2\}\\
\langle F_i\rangle=\Big(\mu+\frac{A}{4}\Big)\Big(-k^2A_l\frac{\partial u_l^m}{\partial x_i}+\gamma^2A_l\frac{\partial u_l^m}{\partial x_i}-k^2A_l\frac{\partial u_i^m}{\partial x_l}+\gamma^2A_l\frac{\partial u_i^m}{\partial x_l}-\\
-2k^2A_i\frac{\partial u_1^m}{\partial x}+2\gamma^2A_i\frac{\partial u_3^m}{\partial z}-2ik\gamma A_i\frac{\partial u_1^m}{\partial z}-2ik\gamma A_i\frac{\partial u_3^m}{\partial x}\Big)+\\
+\Big(K+\frac{\mu}{3}+\frac{A}{4}+B\Big)\Big(-k^2\delta_{1i}A_l\frac{\partial u_i^m}{\partial x}+\gamma^2\delta_{3i}A_l\frac{\partial u_l^m}{\partial z}-ik\gamma\delta_{1i}A_l\frac{\partial u_l^m}{\partial z}-\\
-ik\gamma\delta_{3i}A_l\frac{\partial u_l^m}{\partial x}-ik\gamma A_3\frac{\partial u_i^m}{\partial x}-k^2A_1\frac{\partial u_i^m}{\partial x}-ik\gamma A_1\frac{\partial u_i^m}{\partial z}+\\
+\gamma^2A_3\frac{\partial u_1^m}{\partial z}\Big)+\Big(K-\frac{2}{3}\mu+B\Big)\Big(-k^2A_i\frac{\partial u_l^m}{\partial x_l}+\gamma^2A_i\frac{\partial u_l^m}{\partial x_l}\Big)+\\
+\Big(B+\frac{A}{4}\Big)\Big(-k^2A_1\frac{\partial u_1^m}{\partial x_i}+\gamma^2A_3\frac{\partial u_3^m}{\partial x_i}+\gamma^2\delta_{3i}A_l\frac{\partial u_3^m}{\partial x_i}-ik\gamma A_1\frac{\partial u_3^m}{\partial x_i}-\\
-k^2\delta_{1i}A_l\frac{\partial u_1^m}{\partial x_l}-ik\gamma A_3\frac{\partial u_1^m}{\partial x_i}-ik\gamma\delta_{3i}A_l\frac{\partial u_1^m}{\partial x_l}-\\
-ik\gamma\delta_{1i}A_l\frac{\partial u_3^m}{\partial x_l}\Big)+(B+2C)\Big(-k^2\delta_{1i}A_1\frac{\partial u_l^m}{\partial x_l}-ik\gamma\delta_{3i}A_1\frac{\partial u_l^m}{\partial x_l}-\\
-ik\gamma\delta_{1i}A_3\frac{\partial u_l^m}{\partial x_l}+\gamma^2\delta_{3i}A_3\frac{\partial u_l^m}{\partial x_l}\Big)
\end{gathered}
$$

Из (2.2) следует, что дифференциальный оператор, действующий на W_i в левой части, совпадает с соответствующим дифференциальным оператором линейной задачи. При этом зависимость w_i от z здесь «быстрая», т. е. пространственный масштаб изменения w_i по z порядка длины волны λ. Уравнения для w_1 и w_3 образуют квазилинейную по z неавтономную систему. Вынужденное решение этой задачи есть суперпозиция решений для отдельных слагаемых вынуждающей силы, стоящей в правой части уравнений (2.2).

Как показано в теории асимптотических методов, приближенное решение (2.1) сходится к решению задачи, если w_i будет меняться по «быстрым» переменным так же, как и решение линейной задачи. Для удовлетворения этого условия потребуем, чтобы

$$w_i = w_i^{\circ} e^{\varkappa z} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.2), можно получить для w_i° алгебраическую систему вида

$$R_1 w_1^{\circ} + p_1 w_2^{\circ} = Q_1, \quad R_2 w_3^{\circ} + p_2 w_1^{\circ} = Q_2 \tag{2.6}$$

Определитель системы (2.6) обращается в нуль. Требуя ненарастания w_i° (т. е. ограниченности) и удовлетворяя условие совместимости системы (2.6), можно получить искомые укороченные уравнения для медленно меняющихся амплитуд $a_1\,(x,\,t)$ и $a_2\,(x,\,t)$

$$\begin{gathered}\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{c_l^2}{c_t \xi}\frac{\partial a_1}{\partial x} + i\frac{c_l^2 \rho_1}{c_t \xi}\frac{\partial a_2}{\partial z} + \frac{iF_{11} - \rho_1 F_{31}}{2\omega(1-\rho_1^2)} = 0\\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{c_t}{\xi}\frac{\partial a_2}{\partial x} + i\frac{c_t}{\rho_2 \xi}\frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{iF_{12} - \rho_2 F_{32}}{2\omega(1-\rho_2^2)} = 0\end{gathered} \tag{2.7}$$

При выводе (2.7) учтено дисперсионное соотношение (1.7). Структура модулируемых волн по z при выводе (2.7) считается такой же, как и в линейной задаче, так как по z амплитуда меняется «быстро».

3. Последнее обстоятельство необходимо учесть при выводе усредненных граничных условий. Для получения этих граничных условий подставим (2.1) в (1.4). Приравнивая в полученных таким образом выражениях члены порядка μ^*, можно записать систему для w_i

$$\begin{gathered}c_t^2\frac{\partial w_1}{\partial z} - ikc_t^2 w_3 = \Phi_{13} - i\rho_1 c_t^2\frac{\partial a_1}{\partial x} - i\rho_2 c_t^2\frac{\partial a_2}{\partial x}\\ c_l^2\frac{\partial w_3}{\partial z} - ik(c_l^2 - 2c_t^2)w_1 = \Phi_{33} - i\rho_1 c_l^2\frac{\partial a_1}{\partial z} - i\rho_2 c_l^2\frac{\partial a_2}{\partial z}\end{gathered} \tag{3.1}$$

Граничные условия записаны для поверхности $z = 0$, и этот факт следует учесть при дифференцировании по z в (3.1). Величины Φ_{ik} в (3.1) есть соответствующие коэффициенты Фурье, получающиеся при усреднении правых частей (1.4) по быстрым переменным

$$\begin{gathered}\Phi_{13},\ \ \Phi_{33} = \langle T_{ik}\rangle\ \{i = 1.3;\ \ k = 3,\ \ A_1 = a_1,\ \ A_2 = 0,\ \ A_3 = i\rho_1 a_1,\\ \gamma = \varkappa_1\} + \langle T_{ik}\rangle\{i = 1.3, k = 3, A_1 = a_2, A_2 = 0, A_3 = i\rho_2 a_2, \gamma = \varkappa_2\}\\ \langle T_{ik}\rangle = \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\left(-ikA_l\delta_{13}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_k} - \gamma A_l\delta_{3i}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_k} - ikA_l\delta_{1k}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_i} + \right.\\ + \gamma A_l\delta_{3k}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_i} + \gamma A_k\delta_{3l}\frac{\partial u_i^m}{\partial x_l} - ikA_k\delta_{1l}\frac{\partial u_i^m}{\partial x_l} - ikA_i\delta_{1l}\frac{\partial u_k^m}{\partial x_l} +\\ + \gamma A_i\delta_{3l}\frac{\partial u_k^m}{\partial x_l} - ikA_l\delta_{1k}\frac{\partial u_i^m}{\partial x_l} + \gamma A_l\delta_{3k}\frac{\partial u_i^m}{\partial x_l} - ikA_i\delta_{1l}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_k} +\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$
\begin{aligned}
&+\gamma A_i\delta_{3l}\frac{\partial u_i^m}{\partial x_k}\Big)+\Big(K-\frac{2}{3}\mu+B\Big)\Big[\delta_{ik}\Big(-ikA_m\delta_{1n}\frac{\partial u_m^m}{\partial x_n}+\\
&+\gamma A_m\delta_{3n}\frac{\partial u_m^m}{\partial x_n}\Big)-ikA_l\delta_{1l}\frac{\partial u_i^m}{\partial x_k}+\gamma A_l\delta_{3l}\frac{\partial u_i^m}{\partial x_k}-ikA_i\delta_{1k}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_i}+\\
&+\gamma A_i\delta_{3k}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_l}\Big]+\frac{A}{4}\Big(-ikA_k\delta_{1l}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_i}+\gamma A_k\delta_{3l}\frac{\partial u_i^m}{\partial x_i}-ikA_l\delta_{1k}\frac{\partial u_k^m}{\partial x_l}+\\
&+\gamma A_l\delta_{3i}\frac{\partial u_k^m}{\partial x_l}\Big)+B\Big[\Big(-ikA_k\delta_{1i}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_l}+\gamma A_k\delta_{3i}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_l}-ikA_l\delta_{1l}\frac{\partial u_k^m}{\partial x_i}+\\
&+\gamma A_l\delta_{3l}\frac{\partial u_k^m}{\partial x_i}+\frac{\delta_{ik}}{2}\Big(-ikA_m\delta_{1n}\frac{\partial u_n^m}{\partial x_m}+\gamma A_m\delta_{3n}\frac{\partial u_n^m}{\partial x_m}-ikA_n\delta_{1m}\frac{\partial u_m^m}{\partial x_n}+\\
&+\gamma A_n\delta_{3m}\frac{\partial u_m^m}{\partial x_n}\Big)\Big]+2C\Big(-ikA_l\delta_{1l}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_l}+\gamma A_l\delta_{3l}\frac{\partial u_l^m}{\partial x_l}\Big)\delta_{ik}
\end{aligned}
$$

Запишем решение системы (2.2) в виде суммы общего решения однородной и частного решения неоднородной систем (при учете условий совместимости)

$$
\begin{aligned}
&w_1=w'e^{\varkappa_1 z}+w''e^{\varkappa_2 z}\\
(3.3)\qquad &w_3=i\rho_1 w'e^{\varkappa_1 z}+i\rho_2 w''e^{\varkappa_2 z}+V_1\Big(\alpha_{11}\frac{\partial a_1}{\partial t}+\alpha_{12}\frac{\partial a_1}{\partial x}+\alpha_{13}\frac{\partial a_1}{\partial z}+F_{11}\Big)\times\\
&\times e^{\varkappa_1 z}+V_2\Big(\beta_{11}\frac{\partial a_2}{\partial t}+\beta_{12}\frac{\partial a_2}{\partial x}+\beta_{13}\frac{\partial a_2}{\partial z}+F_{12}\Big)l^{\varkappa_2 z}\\
&\Big(V_1=-\frac{i}{k\varkappa_1(c_l^2-c_t^2)},\quad V_2=-\frac{i}{k\varkappa_2(c_l^2-c_t^2)}\Big)
\end{aligned}
$$

где w', w'' — постоянные амплитуды порядка μ^*.

При условии (3.3) граничные условия (3.1) примут вид

$$
\begin{aligned}
&c_t^2(\varkappa_1+k\rho_1)w'+c_t^2(\varkappa_2+k\rho_2)w''=i\nu_{11}\frac{\partial a}{\partial t}+i\nu_{12}\frac{\partial a}{\partial x}+\nu_{13}\Big(\frac{\partial a_1}{\partial z}\Big)_0+\\
(3.4)\qquad &+\nu_{14}\Big(\frac{\partial a_2}{\partial z}\Big)_0+\Phi_{13}+\frac{c_t^2(F_{11})_0}{k\rho_1(c_l^2-c_t^2)}+\frac{c_t^2(F_{12})_0}{k\rho_2(c_l^2-c_t^2)}\\
&i\,[c_l^2\varkappa_1\rho_1-k(c_l^2-2c_t^2)]\,w'+i\,[c_l^2\varkappa_2\rho_2-k(c_l^2-2c_t^2)]\,w''=\nu_{21}\frac{\partial a}{\partial t}+\\
&+\nu_{22}\frac{\partial a}{\partial x}+i\nu_{23}\Big(\frac{\partial a_1}{\partial z}\Big)_0+i\nu_{24}\Big(\frac{\partial a_2}{\partial z}\Big)_0+\Phi_{33}-\frac{ic_l^2[(F_{11})_0+(F_{12})_0]}{k(c_l^2-c_t^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\nu_{11}=-\frac{2c_t^3\xi(1+S\rho_1\rho_2)}{\rho_1(c_l^2-c_t^2)},\quad \nu_{12}-\frac{2(c_l^2-\rho_1^2c_l^2+\rho_1^2c_t^2+S\rho_1\rho_2c_t^2)\,c_t^2}{k(c_l^2-c_t^2)}\\
&\nu_{14}=\frac{c_t^2[2c_t^2+(\rho_2^2-1)(c_l^2-c_t^2)]}{c_l^2-c_t^2},\quad \nu_{21}=\frac{2c_l^2c_t\xi(S+1)}{c_l^2-c_t^2},\quad \nu_{13}=\frac{2c_t^4}{c_l^2-c_t^2}\\
&\nu_{22}=\frac{c_l^2[(c_l^2-c_t^2)(1-\rho_1^2)+(1+S)(c_l^2-c_t^2)]}{c_l^2-c_t^2},\quad \nu_{23}=\frac{2c_t^2c_l^2\rho_1}{c_l^2-c_t^2},\\
&\nu_{24}=\frac{2c_t^2c_l^2}{\rho_2(c_l^2-c_t^2)}\Big)
\end{aligned}
$$

Структура a_1 и a_2 по z различна. Определитель системы (3.4) равен нулю, а условие ее совместимости можно рассматривать как укороченные граничные условия

$$
(3.5)\qquad i(\nu_{11}-n\nu_{21})\frac{\partial a}{\partial t}+i(\nu_{12}-n\nu_{22})\frac{\partial a}{\partial x}+(\nu_{13}-n\nu_{23})\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}\right)_0+
$$

$$
+(\nu_{14}-n\nu_{24})\left(\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)_0+\Phi_{13}-in\Phi_{33}+\frac{(c_t^2-n\rho_1c_l^2)}{k(\rho_1c_i^2-\rho_1c_t^2)}(F_{11})_0+\frac{(c_t^2\rho_2-nc_l^2)}{k\rho_2(c_l^2-c_t^2)}(F_{12})_0
$$

$$
\left(n=-\frac{2c_t^2\rho_1}{\rho_1c_l^2-c_l^2+2c_t^2}\right)
$$

где $(\partial a_1/\partial z)_0$ и $(\partial a_2/\partial z)_0$ — производные при z, стремящимся к 0.

4. Таким образом, (2.7) и (3.5) есть укороченная формулировка задачи о модуляции поверхностной волны Рэлея произвольным упругим полем. Практический интерес представляет решение в приповерхностном слое, где амплитуды модулированных волн значительны. Устремляя z к нулю и рассматривая (2.7) при условии (1.6), можно получить

$$
(4.1)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}\right)_0&=\frac{ic_t\xi}{\rho_1c_l^2}\left[\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{c_l^2}{c_t\xi}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{i(F_{11})_0-\rho_1(F_{31})_0}{2\omega(1-\rho_1^2)}\right]\\
\left(\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)_0&=\frac{i\rho_2\xi}{c_t}\left[S\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{Sc_t}{\xi}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{i(F_{12})_0-\rho_2(F_{32})_0}{2\omega(1-\rho_2^2)}\right]
\end{aligned}
$$

Искомое укороченное уравнение, описывающее медленные изменения комплексной амплитуды волны Рэлея под действием модулирующего поля $\mathbf{u}^m$, примет вид

$$
(4.2)\qquad \frac{\partial a}{\partial t}+v\frac{\partial a}{\partial x}=a\left(ir_1\frac{\partial u_x^m}{\partial x}+ir_2\frac{\partial u_y^m}{\partial y}+ir_3\frac{\partial u_z^m}{\partial z}+r_4\frac{\partial u_x^m}{\partial z}+r_5\frac{\partial u_z^m}{\partial x}\right)
$$

$$
\left(v=\sigma_0\left[\nu_{12}+n\nu_{22}+\frac{1}{\rho_1}(\nu_{13}-n\nu_{23})+S\rho_2(\nu_{14}-n\nu_{24})\right]\right.
$$

$$
\left.\frac{1}{\sigma_0}=\nu_{11}+\nu_{21}+\frac{c_t\xi}{\rho_1c_l^2}(\nu_{13}-n\nu_{23})+\frac{\rho_2\xi S}{c_t^2}(\nu_{14}-n\nu_{24})\right)
$$

Выражения для коэффициентов r_i имеют вид

$$
\begin{aligned}
r_1&=\sigma_1N_3+\sigma_2N_5+\sigma_3N_7+\sigma_4N_8+\sigma_0M_3-n\sigma_0M_5\\
r_2&=\sigma_1N_1+\sigma_2N_2+\sigma_3\rho_1N_1+\sigma_4\rho_2N_2+\sigma_0M_1-n\sigma_0M_2\\
r_3&=\sigma_1N_{11}+\sigma_2N_{13}+\sigma_3N_{15}+\sigma_4N_{17}+\sigma_0M_8-n\sigma_0M_{10}\\
r_4&=-\sigma_1N_4+\sigma_2N_6+\sigma_3N_8+\sigma_4N_9-\sigma_0M_4-n\sigma_0M_6\\
r_5&=-\sigma_1N_{10}-\sigma_2N_{12}+\sigma_3N_{14}+\sigma_4N_{16}-\sigma_0M_7-n\sigma_0M_9
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_1=\frac{\sigma_0[2c_l^2(1-\rho_1^2)(c_t^2+n\rho_1c_l^2)-(c_l^2-c_t^2)(\nu_{13}-n\nu_{23})]}{2\rho_1kc_l^2(1-\rho_1^2)(c_l^2-c_t^2)}
$$

$$
\sigma_2=\frac{\sigma_0[2c_t^2(1-\rho_2^2)(c_t^2\rho_2+nc_l^2)-\rho_2(c_l^2-c_t^2)(\nu_{14}-n\nu_{24})]}{2kc_t^2(1-\rho_2^2)(c_l^2-c_t^2)}
$$

$$
\sigma_3=\frac{\sigma_0(\nu_{13}-n\nu_{23})}{kc_l^2(1-\rho_1^2)},\qquad \sigma_4=\frac{\sigma_0\rho_2^2(\nu_{14}-n\nu_{24})}{kc_i^2(1-\rho_2^2)}
$$

$$
N_1=-\frac{\omega^2}{c_l^2}\left(K-2\frac{\mu}{3}+B+2C\right),\qquad N_2=-\frac{\omega^2}{2c_t^2}(K-{}^2/_3\mu+B)
$$

$$
\begin{aligned}
N_3&=\varkappa_1^2(2K+{}^5/_3\mu+A+4B+2C)-k^2(3K+4\mu+2A+6B+2C)\\
N_4&=\rho_1\varkappa_1^2(K+{}^4/_3\mu+{}^1/_2A+B)-\rho_1k^2(4K+{}^{13}/_3\mu+2A+4B)\\
N_5&=-k^2(K+{}^7/_3\mu+A+2B)
\end{aligned}
$$

$$N_6 = -k^2\rho_2(\mu + {}^1/_2A + B) - \varkappa_2 k(3K + 2\mu + A + 2B)$$

$$N_7 = -k^2\left(\mu + {}^1/_2\,A + B\right) + \varkappa_1^2(K + {}^{10}/_3\mu + {}^3/_2A + 3B)$$

$$N_8 = -k^2\rho_2(K + {}^4/_3\mu + {}^1/_2A + B) - k\varkappa_2(\mu + {}^1/_2A + B)$$

$$N_9 = k^2(\mu + {}^1/_2A + B) + \varkappa_1^2(K + {}^4/_3\mu + {}^1/_2A + B)$$

$$N_{10} = -k^2\rho_1(K + {}^{10}/_3\mu + {}^3/_2A + 3B) + \rho_1\varkappa_1^2(\mu + {}^1/_2A + B)$$

$$N_{11} = \varkappa_1^2(2K + {}^5/_3\mu + A + 4B + 2C) - k^2(K - {}^2/_3\mu + 2B + 2C)$$

$$N_{12} = -k^2\rho_2(K + {}^4/_3\mu + {}^1/_2A + B) - k\varkappa_2(\mu + {}^1/_2A + B)$$

$$N_{13} = k^2(\mu + {}^1/_2A + B) - k\varkappa_2(\mu + {}^1/_2A + B)$$

$$N_{14} = \varkappa_1^2(2K - {}^1/_3\mu + {}^1/_2A + 3B) - k^2(K + {}^4/_3\mu + {}^1/_2A + B)$$

$$N_{15} = \rho_1\varkappa_1^2(3K + 4\mu + 2A + 5B + 2C) - \rho_1 k^2(2K + {}^5/_3\mu + A + 4B + 2C)$$

$$N_{16} = -k^2\left(K + {}^4/_3\mu + {}^1/_2\,A + B\right) + \varkappa_2^2(\mu + {}^1/_2A + B)$$

$$N_{17} = \varkappa_2 k(2K + {}^5/_3\mu + A + 3B) - \rho_2 k^2(K + {}^4/_3\mu + {}^1/_2A + B)$$

$$M_1 = -\varkappa_1(K - {}^2/_3\mu + 2B) - \varkappa_2(K - {}^2/_3\mu + B + \rho_2^2 B)$$

$$M_2 = -(\varkappa_1\rho_1 + \varkappa_2\rho_2)(K - {}^2/_3\mu + 2B)$$

$$M_3 = -[\varkappa_1(K + {}^7/_3\mu + A + 2B) + \varkappa_2(K + {}^4/_3\mu + {}^1/_2A + B) + k\rho_2(\mu + {}^1/_2A + B)]$$

$$M_4 = -[\rho_1\varkappa_1(K + {}^4/_3\mu + {}^1/_2A + B) - k(K + {}^4/_3\mu + {}^1/_2A + B)]$$

$$M_5 = -[-k(K - {}^2/_3\mu + 4B + 2C) + \rho_1\varkappa_1(K - {}^2/_3\mu + 2B)]$$

$$M_6 = -\Big[\varkappa_1(K + {}^4/_3\mu + {}^3/_4A + 3B) + \varkappa_2(K + {}^4/_3\mu + {}^1/_2A + B) +$$
$$+ k\rho_2\left(\mu + {}^1/_4\,A + 2B\right)\Big]$$

$$M_7 = -[-k(B + \mu) + \rho_1\varkappa_1(\mu + {}^1/_2A + B)]$$

$$M_8 = -[\varkappa_1(K + {}^7/_3\mu + {}^3/_4A + 2B) + k\rho_2(\mu + {}^1/_4A + B) +$$
$$+ \varkappa_2(K + {}^1/_3\mu + {}^1/_4A + B)]$$

$$M_9 = -[\varkappa_1(K + {}^4/_3\mu + {}^3/_4A + 2B) + \varkappa_2(\mu + {}^1/_2A + B) +$$
$$+ k\rho_2(K + {}^1/_3\mu + {}^1/_4A + B)]$$

$$M_{10} = -[\varkappa_1\rho_1(3K + 4\mu + 2A + 6B + C) + k(K + {}^1/_3\mu + {}^3/_4A + 2B + C)]$$

Задавая комплексную амплитуду в виде $a = a_0 e^{i\varphi}$, получим уравнения для медленно меняющихся амплитуд и фаз вида

$$(4.3)\qquad \frac{\partial a_0}{\partial t} + v\,\frac{\partial a_0}{\partial x} = a_0\left(r_4\,\frac{\partial u_x^m}{\partial z} + r_5\,\frac{\partial u_z^m}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(r_4\,\frac{\partial u_x^m}{\partial x} + r_2\,\frac{\partial u_y^m}{\partial y} + r_3\,\frac{\partial u_z^m}{\partial z}\right)$$

Анализируя полученную систему (4.3), отметим, что в отличие от объемных волн [2] при распространении рэлеевской волны в присутствии модулирующего поля $\mathbf{u}^m$ имеет место как фазовая, так и амплитудная модуляция (одного порядка по эффективности). Для детального анализа решения системы (4.3) рассмотрим конкретные виды модулирующих полей, удовлетворяющих граничным условиям (1.2).

Пусть модулирующее поле — поле однородных деформаций в стержне, создаваемых растягивающей силой P, которая направлена вдоль оси стержня. В этом случае справедливы соотношения [1]

$$(4.4)\qquad \frac{\partial u_x^m}{\partial x}=\frac{P}{E}(\cos^2\theta-\sigma\sin^2\theta),\quad \frac{\partial u_y^m}{\partial y}=\frac{P}{E}(\sin^2\theta-\sigma\cos^2\theta),\quad \frac{\partial u_z^m}{\partial z}=-\frac{P\sigma}{E}$$

где E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, θ — угол между направлением P и осью x, угол между осью z и P равен 90°. Подставляя соотношения (4.4) в систему (4.3) и интегрируя, можно получить для стационарного режима ($t = t_0 + x/v$) решение вида

$$(4.5)\qquad \varphi=\varphi_0+\frac{PL}{vE}[r_1(\cos^2\theta-\sigma\sin^2\theta)+r_2(\sin^2\theta-\sigma\cos^2\theta)-r_3\sigma]$$

Анализируя полученный результат, отметим, что в случае однородного поля напряжений амплитудная модуляция отсутствует, а фаза рэлеевской волны при фиксированном L пропорциональна давлению P. Такой результат аналогичен соответствующему решению для объемных волн [2]. Аналогично можно получить решение для P, переменного во времени. Пусть $P = P_0t$, тогда, пользуясь (4.4), получим решение (4.3) в виде

$$(4.6)\qquad \varphi=\varphi_0+\frac{P_0L}{vE}[r_1(\cos^2\theta-\sigma\sin^2\theta)+r_2(\sin^2\theta-\sigma\cos^2\theta)-\sigma r_3]\times \left(t+\frac{L}{2v}\right)$$

В этом случае фаза рэлеевской волны будет квадратично изменяться с расстоянием, и полное выражение для колебательного члена в (2.1) имеет вид

$$(4.7)\qquad e^{i(\omega t-kx+\varphi)}=\exp\left\{\left[\omega+\frac{P_0L}{vE}(r_1\cos^2\theta-r_1\sigma\sin^2\theta+r_2\sin^2\theta-r_2\cos^2\theta\sigma-r_3\sigma)\right]t-kL-\frac{P_0L}{2Ev}(r_1\cos^2\theta-r_1\sigma\sin^2\theta+r_2\sin^2\theta-r_2\sigma\cos^2\theta-r_3\sigma)\right\}$$

Из (4.7) следует, что частота рэлеевской волны линейно изменяется по мере пробега волны.

Рассмотрим синусоидальное изменение $\mathbf{P}$. Пусть $\mathbf{P}$ — однородная стоячая волна в стержне, т. е.

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}_0\sin\mathbf{k}_m\mathbf{r}\cos\Omega t$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{k}_m$ — волновое число.

Интегрируя (4.3) при учете (4.4), получим следующее выражение:

$$(4.8)\qquad \varphi=\varphi_0+\frac{P_0L}{Ev}[r_1(\cos^2\theta-\sigma\sin^2\theta)+r_2(\sin^2\theta-\sigma\cos^2\theta)-r_3\sigma]\times\left\{\frac{\sin\Delta^-L}{\Delta^-L}\cos(\Omega t-\mathbf{k}_m\mathbf{r}_\perp+\Delta^-L)+\frac{\sin\Delta^+L}{\Delta^+L}\cos(\Omega t+\mathbf{k}_m\mathbf{r}_\perp+\Delta^+L)\right\}$$

$$\left(\Delta^-=\frac{\Omega-k_mv\cos\theta}{2v},\quad \Delta^+=\frac{\Omega+k_mv\cos\theta}{2v},\quad \mathbf{k}_m\mathbf{r}_\perp=k_my\sin\theta\right)$$

Из (4.8) следует, что имеет место чисто фазовая модуляция рэлеевской волны, как и в случае объемных волн. Можно указать также и на некоторые отличия. Возбуждение и прием волн Рэлея в отличие от объемных можно производить в любой точке поверхности акустического резонатора. Поэтому при модуляции стоячими низкочастотными полями индекс модуляции рэлеевских волн будет зависеть от координат точек излучения и приема. При этом интегрирование в (4.3) ведется не по всей длине резонатора, как в случае объемных волн, а в пределах от x_1 до x_2, где x_1 и x_2 — координаты точек излучения и приема рэлеевских волн. При этом решение для фазы волны примет вид

$$
(4.9)\qquad \varphi = \varphi_0 + \frac{P_0 L}{Ev}\,[r_1(\cos^2\theta - \sigma\sin^2\theta) + r_2(\sin^2\theta - \sigma\cos^2\theta) - r_3\sigma] \times
\times \left[\frac{\sin\Delta^- L}{\Delta^- L}\cos(\Omega t + k_m x_2\cos\theta + k_m y\sin\theta + \Delta^- L) + \right.
\left. + \frac{\sin\Delta^+ L}{\Delta^+ L}\cos(\Omega t - k_m x_1\cos\theta + k_m y\sin\theta + \Delta^+ L)\right]
$$

где L — расстояние, пройденное волной.

Пусть $\mathbf{u}^m$ — поле нормальных упругих волн в пластине. Из [3] известно, что такие волны удовлетворяют граничным условиям (1.2). Без потери общности рассмотрим в качестве модулирующего поля антисимметричную сдвиговую волну в пластине. Частота колебаний в такой волне много меньше частоты волны Рэлея, распространяющейся по поверхности пластины, лежащей в плоскости xy. Согласно [3] компоненты смещений u_i^m в этом случае имеют вид

$$
(4.10)\qquad \begin{aligned}
u_x^m &= -\,u_0^m\,\sin\theta\sin\varkappa z\cos(\Omega t - k_m\cos\theta x + k_m\sin\theta y)\\
u_y^m &= u_0^m\,\cos\theta\sin\varkappa z\cos(\Omega t - k_m\cos\theta x + k_m\sin\theta y)\\
u_z^m &= 0
\end{aligned}
$$

где u_0^m — амплитуда модулирующей волны, θ — угол между осью x и направлением распространения модулирующей волны, $\varkappa$ — поперечное волновое число модулирующей волны, удовлетворяющее дисперсионному уравнению

$$
(4.11)\qquad \varkappa^2 + k_m^2 = \omega^2/c_t^2
$$

Подставляя (4.10) в (4.3) и интегрируя, найдем решения вида

$$
(4.12)\qquad \varphi = \varphi_0 + (r_2 - r_1)\sin\theta\cos\theta\,\frac{k_m u_0^m L}{v}\,\frac{\sin\Delta L}{\Delta L}\sin(\Omega t - k_m y\sin\theta - \Delta L)
$$

где $\Delta = \Delta^-$ из (4.8) и учтено, что $\varkappa b = \pi$, b — толщина пластины. Из (4.12) следует, что здесь также имеет место чисто фазовая модуляция волны Рэлея. При углах $\theta = 0$ и 90° модуляция отсутствует вообще. Аналогично можно рассмотреть модуляцию и другими видами модулирующих полей, удовлетворяющих граничным условиям (1.2). Отметим, что эффект амплитудной модуляции, описываемый первым уравнением системы (4.3), в большинстве реальных случаев не достигается. В частных случаях падения модулирующей волны под углом к поверхности $z = 0$ такое явление будет иметь место. Например, пусть продольная упругая волна падает на поверхность $z = 0$ под углом θ к оси z из твердой среды. Будем считать, что длина пробега рэлеевской волны меньше ширины фронта модулирующей волны и разностью фаз в модулирующей волне между точкой излучения и приема волны Рэлея можно пренебречь. В этом случае полное смещение $\mathbf{u}^m$ можно представить в виде [1]

$$
(4.13)\qquad \mathbf{u}^m = (u_0^m\mathbf{n}_0 e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} + u_l^m\,\mathbf{n}_l e^{i\mathbf{k}_l\mathbf{r}} + u_t^m\,[\mathbf{a}\mathbf{n}_t]\,e^{i\mathbf{k}_t\mathbf{r}})\,e^{i\Omega t}
$$

где $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}_e$ и $\mathbf{n}_t$ — единичные векторы вдоль направлений падающей продольной, отраженной продольной и отраженной сдвиговой волн соответственно, u_0^m, u_l^m и u_t^m — амплитуды соответствующих смещений, а $\mathbf{k}_0$, $\mathbf{k}_l$ и $\mathbf{k}_t$ — волновые векторы, $\mathbf{a}$ — единичный вектор в направлении z. Абсолютные значения волновых векторов равны $k_0 = k_l = \Omega/c_l$, $k_t = \Omega/c_t$ а углы θ_0, θ_l и θ_t связаны соотношениями

$$\theta_0 = \theta_l, \quad \sin\theta_t = \sin(\theta_0 c_t/c_l)$$

Учитывая (4.13), можно записать выражение для $\partial u_z^m/\partial x$ в виде

(4.14)

$$\partial u_z^m/\partial x = [k_0 (u_0^m - u_l^m) \sin\theta_0\cos\theta_l + {}^1/_2 u_t^m k_t(\cos^2\theta_t - \sin^2\theta_t)] \sin\Omega t$$

где амплитуды u^m определяются выражениями

$$u_l^m = u_0^m \frac{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t}, \qquad u_t^m = u_0^m \frac{2c_l c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 \theta_t}$$

Подставляя (4.14) в первое уравнение (4.3) и интегрируя, получим решение вида

$$a_0 = a_0^* \exp\left\{\left[k_0 (u_0^m - u_l^m) \sin\theta_0 \cos\theta_0 + u_t^m k_t \frac{1}{2} \times (\cos^2\theta_t - \sin^2\theta_t)\right] \frac{r_5 L}{v} \frac{\sin \Omega L/2v}{\Omega L/2v} \sin\left(\Omega t - \frac{\Omega L}{v}\right)\right\} \quad (4.15)$$

Для $\partial u_z^m/\partial z$ из (4.13) имеем выражение

$$\partial u_z^m/\partial z = [k_0 (u_0^m + u_l^m) \cos^2\theta_0 + u_t^2 k_t \cos^2\theta_t \sin\theta_t] \sin\Omega t \quad (4.16)$$

Решение для фазы имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 + [k_0 (u_0^m + u_l^m) \cos^2\theta_0 + u_t^m k_t \cos^2\theta_t \sin\theta_t] \frac{r_5 L}{v} \frac{\sin \Omega L/2v}{\Omega L/2v} \times \sin\left(\Omega t - \frac{\Omega L}{v}\right) \quad (4.17)$$

Согласно (4.15) и (4.17) при распространении рэлеевской волны в поле падающей продольной и отраженных продольной и поперечной волн имеет место как фазовая, так и амплитудная модуляция. Глубина амплитудной модуляции и индекс фазовой имеют различные зависимости от амплитуд модулирующих волн и их угловых соотношений.

Отметим, что эффект нерезонансного параметрического взаимодействия поверхностных волн с внутренними упругими полями твердой среды может быть использован для параметрической индикации и оценки величины этих полей.

Поступила 29 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, т. 7. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
2. *Рабинович М. И., Розенблюм А. А.* К обоснованию асимптотических методов в теории колебаний нелинейных распределенных систем. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 3.
3. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинах. В сб. «Физическая акустика», т. 1, ч. А. М., «Мир», 1966.