УДК 533.7

Ю. Е. Горбачев

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСУЩЕЙ ФАЗЫ В ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЕ

Для описания разреженной газовзвеси обычно используют систему уравнений Больцмана (УБ), записанных для каждого из компонентов (см. обзор в [1]). Режимы, допускающие такое описание, рассмотрены в [2] и характеризуются системой неравенств ($i, j = 1, 2$): $r_i \ll d_i$, $\max_i r_i \lessapprox l_j$ $(j \neq i)$, где r_i — радиусы компонентов смеси, $d_i = n_i^{-1/3}$, n_i, l_i — численная плотность и длина свободного пробега i-го компонента $(l_i \sim (r_i^2 n_i)^{-1})$. Метод решения этой системы различными модификациями Энскога — Чепмена (ЭЧ) приведен в [3—6].

Ряд преимуществ в изучении систем, описываемых УБ, предоставляет использование кинетических моделей. В таком подходе учет сложных физико-химических процессов, происходящих на поверхности частицы, сводится к вычислению соответствующих коэффициентов модели (выражающихся через коэффициенты обмена), и переход к макроскопическому описанию (в том числе получение выражений для коэффициентов переноса) реализуется значительно проще, чем при решении полного УБ методом ЭЧ. Различные варианты кинетических моделей для смесей исследовались в [2, 7—9]. В настоящей работе рассмотрен вопрос о построении кинетической модели для легкого компонента и анализе ее в рамках метода ЭЧ при произвольной функции распределения тяжелого компонента.

В основу исследований положена система УБ:

$$df_1/dt_1 = J_{11}(f_1, f_1) + J_{12}(f_1, f_2),\; df_2/dt_1 = J_{22}(f_2, f_2) + J_{21}(f_2, f_1),$$

где $d/dt_i = \partial/\partial t + \mathbf{v}_i \cdot \partial/\partial \mathbf{r}$.

Рассмотрим гетерогенную смесь, характеризуемую существенным различием масс и характерных радиусов компонентов: $\varepsilon^2 = m_1/m_2 \ll 1$, $r_1 \ll r_2$. При этом приведенная масса $\mu_{12} \sim m_1$, а при оценке сечений рассеяния можно полагать $\sigma_{11} \sim r^2{}_1$, $\sigma_{12} \sim r_2{}^2$, $\sigma_{22} \sim 4\sigma_{12}$.

Для столкновительных членов J_{ij} воспользуемся интегралами столкновений больцмановского типа, записанными в симметризованной форме:

$$J_{ij} = \frac{(m_1 m_2)^3}{\mu_{ij}} \int d\mathbf{v}_j\, d\mathbf{v}'_i\, d\mathbf{v}'_j\, \delta_{\mathbf{p}} \delta_E \sigma_{ij}^d \left(f'_i f'_j - f_i f_j\right), \tag{1}$$

где $\delta_{\mathbf{p}}$ и δ_E — δ-функции сохранения импульса и кинетической энергии сталкивающейся пары; штрихи означают принадлежность величин к характеристикам состояния после столкновения; σ^d — дифференциальное сечение рассеяния, аналитические аппроксимации которого для упругих столкновений подробно изучены в [10]. В частности, в [11] для расчета сечения столкновения легкого компонента с тяжелым и внутри тяжелого предлагалось описывать соответствующие взаимодействия потенциалом Кихары.

Построение кинетической модели (т. е. конечно-кратной аппроксимации интеграла (1)) состоит из двух этапов: нахождение квазистационарных распределений $f_i{}^0$; разложение функции распределения и интеграла столкновений по наборам функций ψ_α.

Квазистационарные распределения $f_i{}^0$ определяются набором медленных переменных $\Gamma_{i\gamma} = (f_i, \chi_{i\gamma})$, где $\chi_{i\gamma}$ — приближенные столкновительные инварианты (СИ) [12]:

$$n_i^{-1}(\chi_{i\gamma}, J_i) \leqslant O(k_i), \tag{2}$$

$J_i = \sum_j J_{ij}$, $(\varphi, \psi) = \int \varphi\psi\, d\mathbf{v}$, k_i — число Кнудсена i-го компонента; подразумевается, что χ соответствующим образом обезразмерена.

При построении кинетической модели для легкого компонента остановимся на ситуации, когда он может быть описан в терминах обычных медленных (гидродинамических) переменных n_1, $\mathbf{u}_1$, T_1 (плотность, скорость и температура). В качестве функции, вблизи которой будем производить линеаризацию функции распределения легкого компонента, возьмем максвелл-больцмановское распределение ($\varphi_1 \ll 1$)

$$(3) \qquad f_1 = f_{10}(1+\varphi_1), \quad f_{10}(\mathbf{v}) = n_1\left(\frac{m_1}{2\pi kT_1}\right)^{3/2} \exp\left(-m_1\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u}_1)^2}{2kT_1}\right).$$

Из условий, налагаемых на функцию распределения, и свойств f_{10} следуют соотношения

$$(4) \qquad \int f_{10}\varphi_1\{1, \mathbf{v}, (1/2)(\mathbf{v}-\mathbf{u}_1)^2\}d\mathbf{v} = 0.$$

Прежде чем перейти к непосредственной записи модельного кинетического уравнения, заметим, что при его решении методом ЭЧ функция φ_1 разлагается в ряд вида

$$(5) \qquad \varphi_1 = \sum_{q=0} k_1^q \varphi_{1(q)}.$$

Вопрос о том, с какого члена начинается это разложение, зависит от решения уравнения для квазистационарного распределения

$$(6) \qquad J_{11}(f_1^0) + J_{12}(f_1^0, f_2) = o(k_1).$$

Если межкомпонентное взаимодействие, определяемое членом J_{12} в (6), приводит к сильному отклонению f_1^0 от f_{10} в том смысле, что $1 \gg \varphi_{1(0)} = (f_1^0 - f_{10})/f_{10} \gg k_1$ (причем $\varphi_{1(0)}$ удовлетворяет соотношениям (4)), то ряд (5) начнется с члена с $q = 0$, а в гидродинамических уравнениях произойдут изменения уже в нулевом порядке по числу Кнудсена. Если же межкомпонентное взаимодействие вносит малые возмущения, то отклонение от равновесной функции f_{10} будет малым ($\leqslant O(k_1)$) и поправки в гидродинамических уравнениях возникнут лишь в навье-стоксовском приближении.

Перейдем теперь к построению модели. Функцию φ_1 из (3) будем разлагать по базисной системе, образованной комбинацией полиномов Сонина и неприводимых тензоров [13]:

$$\varphi_1 = \sum_{lm} a_{l,(\mu)_l,m}\psi_{lm}Y_{l,(\mu)_l}.$$

Коэффициенты разложения a являются тензорными функциями порядка l, зависящими от пространственной и временной переменных. Суммирование по l символизирует суммирование по l-индексам $(\mu)_l$. Для упрощения записи в дальнейшем иногда будем указывать только порядок тензора; $Y_{l,(\mu)_l}$ — неприводимые тензоры порядка l, $\psi_{lm}(c^2)$ — полная система ортогональных полиномов:

$$\psi_{lm} = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{m!}{\Gamma(l+m+3/2)}\right]^{1/2} S^m_{l+1/2}(c_1^2), \quad \mathbf{c} = \sqrt{\frac{m_1}{2kT_1}}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1),$$

$S^m_{l+1/2}(c^2)$ — полиномы Сонина — Лагерра. Явный вид нескольких первых функций Y и ψ можно найти, например, в [13].

Соотношение (4) порождает известные связи коэффициентов a с гидродинамическими величинами:

$$(7) \qquad a_{00} = a_{1,\alpha,0} = a_{01} = 0,$$

$$\Pi_{1\alpha\beta} = P_{1\alpha\beta} - p_1\delta_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{4}{15}}\, n_1kT_1\mathring{a}_{2,\alpha\beta,0}, \quad p_1 = n_1kT_1,$$

$$q_{1\alpha} = -n_1kT_1\sqrt{\frac{5kT_1}{6m_1}}\, a_{1,\alpha,1}$$

$$\left(\mathring{a}_{2,\alpha\beta,0} \equiv \frac{1}{2}(a_{2,\alpha\beta,0} + a_{2,\beta\alpha,0}) - \frac{1}{3}a_{2,\gamma\gamma,0}\delta_{\alpha\beta}\right).$$

Здесь индексами греческого алфавита обозначены декартовы координаты тензора напряжений $\mathbf{P}$ и вектора потока тепла $\mathbf{q}$, определяемых соотношениями

$$(8)\quad \mathbf{P}_1 = \int m_1 (\mathbf{v} - \mathbf{u}_1)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_1) f_1 d\mathbf{v}, \quad \mathbf{q}_1 = \int \frac{m_1}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_1)^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}_1) f_1 d\mathbf{v}.$$

Линеаризованный с помощью (3) интеграл для легкого компонента можно представить в виде двух слагаемых:

$$(9)\qquad L = L^0 + L^1(\varphi_1),\ L^0 = J_{12}(f_{10}, f_2),$$

$$L^1(\varphi_1) = \frac{m_1^6}{\mu_{11}^2} \int d\tilde{\mathbf{v}}_1\, d\mathbf{v}_1'\, d\tilde{\mathbf{v}}_1' \delta_{\mathbf{p}} \delta_E \sigma_{11}^d f_{10}(\mathbf{v}_1) f_{10}(\tilde{\mathbf{v}}_1) [[\varphi_1]] +$$

$$+ \frac{(m_1 m_2)^3}{\mu_{12}} \int d\mathbf{v}_2\, d\mathbf{v}_1'\, d\mathbf{v}_2' \delta_{\mathbf{p}} \delta_E \sigma_{12}^{d} (f_{10}' f_2' \varphi_1' - f_{10} f_2 \varphi_1),$$

$$[[\varphi]] \equiv \varphi' + \tilde{\varphi}' - \varphi - \tilde{\varphi}.$$

Разлагая L по той же базисной системе функций, что и φ, получим

$$(10)\quad \frac{d}{dt_1} \varphi_1 + (1 + \varphi_1) \frac{d}{dt_1} \ln f_{10} = \sum_{kl} A_{kl} \psi_{kl} Y_k + \sum_{klmn} B_{mn}^{kl} a_{mn} \psi_{kl} Y_k,$$

где коэффициенты разложения определяются через L^0 и L^1:

$$(11)\qquad A_{kl} = \frac{1}{n_1 Q_k} (L^0, \psi_{kl} Y_k), \quad B_{mn}^{kl} = \frac{1}{n_1 Q_k} (L^1 (\psi_{mn} Y_m), \quad \psi_{kl} Y_k),$$

$$Q_k = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{[4\pi]} Y_k(\mathbf{c}^0) Y_k(\mathbf{c}^0) d\mathbf{c}^0.$$

В выражении для Q_k подразумевается скалярное произведение тензоров, а интегрирование проводится по телесному углу, соответствующему вектору $\mathbf{c}^0 = \mathbf{c}/c$. В (11) используется то же скалярное произведение, что и в (2). Легко получить $A_{00} = 0$. Коэффициенты B представляются в виде двух слагаемых $B = B^0 + B'$, отвечающих первому и второму слагаемым в L^1 из (9). Свойства B^0 хорошо изучены (см., например, [13]), здесь не будем на них останавливаться, отметим лишь, что

$$(12)\qquad B_{mn}^{0kl} = B_{kl}^{0mn}, \quad B_{00}^{0kl} = B_{10}^{0kl} = B_{01}^{0kl} = 0.$$

Для окончательной формулировки модели необходимо выбрать способ «обрыва» бесконечных сумм в (10). Действуя в духе работы [13], проведем замену: при $|k + 2l| > N$, $|m + 2n| > N$ полагаем $A_{kl} = 0$ и $B_{mn}^{kl} \to -\nu_N \delta_{km} \delta_{ln}$, где первый символ Кронекера — тензор размерности $2k = 2m$. Для ν_N естественно воспользоваться обычно применяемой аппроксимацией $\nu_N = -B_{N,0}^{0N,0}$.

Предложенная процедура позволяет сформулировать модель порядка N в виде

$$D\varphi_1 = \sum_{|k+2l| \leqslant N} A_{kl} \psi_{kl} Y_k + \sum_{|k+2l| \leqslant N} \left(B_{mn}^{kl} + \nu_N \delta_{km} \delta_{ln}\right) a_{mn} \psi_{kl} - \nu_N \varphi_1$$

(D — оператор в левой части (10)). Отметим, что в отличие от изотропного случая в полученной модели N-го порядка уже не удается избавиться от неприводимого тензора порядка N.

Простейшей моделью, учитывающей наличие предполагаемых пяти приближенных столкновительных инвариантов, является модель второго порядка. Чтобы избежать громоздкости, возникающей в моделях более высокого порядка, продемонстрируем основные особенности, вносимые примесной фазой на примере этой модели. Используя свойства коэффициентов A и B (см. (12) и текст выше), получим (подразумевается суммирование по повторяющимся индексам)

$$D\varphi_1 = \left(A_{01} + \sqrt{\frac{4}{15}}\frac{\Pi_{\xi\eta}}{p_1} B'^{01}_{2,\xi\eta,0}\right)\psi_{01}Y_0 + \tag{13}$$
$$+ \left(A_{1,\alpha,0} + \sqrt{\frac{4}{15}}\frac{\Pi_{\xi\eta}}{p_1} B'^{1,\alpha,0}_{2,\xi\eta,0}\right)\psi_{10}Y_{1,\alpha} +$$
$$+ \left(A_{2,\alpha\beta,0} + \sqrt{\frac{4}{15}}\frac{\Pi_{\xi\eta}}{p_1} B'^{2,\alpha\beta,0}_{2,\xi\eta,0}\right)\psi_{20}Y_{2,\alpha\beta} - \nu_2\varphi_1.$$

Здесь использовались $\mathrm{Sp}_{\xi\eta}B'^{2,\alpha\beta,0}_{2,\xi\eta,0} = 0$ и связь $a_{2,\xi\eta,0}$ с тензором напряжений (7). Отметим, что модель порядка N, как и в однокомпонентном случае, не содержит $B_N{}^0$, а в нее входят лишь значения $B_N{}'$. Выясним физический смысл коэффициентов A. Рассмотрим величины

$$F_{12\alpha} = \int m_1 v_{1\alpha} J_{12}\, d\mathbf{v}_1, \quad M_{12\alpha\beta} = \int m_1 (v_1 - u_1)_\alpha (v_1 - u_1)_\beta J_{12}\, d\mathbf{v}_1,$$
$$Q_{12} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\, M_{12} = \int \frac{m_1}{2} v_1^2 J_{12}\, d\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1\cdot \mathbf{F}_{12},$$

характеризующие передаваемый импульс, напряжение и энергию. Используя явный вид функций ψ и Y, получим

$$A_{1,\alpha,0} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{F^0_{12,\alpha}}{n_1\sqrt{2m_1kT_1}}, \quad A_{01} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{Q^0_{12}}{n_1kT_1}.$$

Аналогично A_{20} выражается через M^0. Верхний индекс 0 у F, Q и M означает, что эти величины вычисляются с равновесной функцией распределения f_{10}.

Обычной процедурой от (13) можно перейти к уравнениям переноса:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial n_1\mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{r}} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1\cdot\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{F}_1 - \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{P}_1, \tag{14}$$
$$\frac{\partial kT_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1\cdot\frac{\partial kT_1}{\partial \mathbf{r}} = \frac{2}{3n_1}\left(\frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{P}_1 : \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{r}}\right) - \Xi_1,$$

где $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{q}_1$ вводились в (8), а $\mathbf{F}_1$ и Ξ_1 для модели второго порядка имеют вид

$$F_{1\gamma} = \sqrt{\frac{kT_1}{3m_1}}\left(A_{1,\gamma,0} + \sqrt{\frac{4}{15}}\frac{\Pi_{1\alpha\beta}}{p_1} B'^{1,\gamma,0}_{2,\alpha\beta,0}\right), \tag{15}$$
$$\Xi_1 = kT_1\sqrt{\frac{2}{3}}\left(A_{01} + \sqrt{\frac{4}{15}}\frac{\Pi_{1\alpha\beta}}{p_1} B'^{01}_{2,\alpha\beta,0}\right).$$

Для замыкания системы (14) необходимо решить уравнение (13). Рассмотрим сначала ситуацию, когда межкомпонентное взаимодействие изменяет равновесное распределение в нулевом порядке по числу Кнудсена. Такое распределение задается соотношением (6), что для нашей модели означает обращение правой части (13) в нуль при замене $\varphi_1 \to \varphi_{1(0)}$. Последнее соотношение легко разрешается относительно $\varphi_{1(0)}$. Учитывая, что $\varphi_{1(0)}$ должно удовлетворять также соотношениям (4), получим

$$\varphi_{1(0)} = \nu_2^{-1}\left(\mathring{A}_{2,\alpha\beta,0} + \sqrt{\frac{4}{15}}\frac{\Pi_{\xi\eta}}{p_1} B'^{2,\alpha\beta,0}_{2,\xi\eta,0}\right)\psi_{20}Y_{2,\alpha\beta}. \tag{16}$$

Применяя этот результат для расчета тензора напряжений согласно (8), придем к матричному уравнению

$$\Pi_{ij} = \sqrt{\frac{4}{15}}\nu_2^{-1}p_1\mathring{A}_{2,ij,0} + \Delta^{\xi\eta}_{ij}\Pi_{\xi\eta}, \tag{17}$$
$$p_1 = n_1kT_1, \quad \Delta^{\xi\eta}_{ij} = \frac{4}{15}\nu_2^{-1}B'^{2,ij,0}_{2,\xi\eta,0}.$$

Используя свойства $A_{2,0}$ и B'^{20}_{20}, легко показать, что $\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Pi} = 0$ и $\Pi_{\alpha\beta} = \Pi_{\beta\alpha}$.

Из (16) следует отсутствие потока тепла: $\mathbf{q} = 0$. В этом проявляется «дефект» модели второго порядка. Для модели третьего порядка в нулевом приближении по k_1 получаем ненулевой поток тепла, обусловленный отсутствием равновесия в двухкомпонентной среде.

Чтобы проанализировать ряд особенностей, содержащихся в выражениях (15), (17), рассмотрим широко распространенный режим течения, соответствующий случаю $\max\{k_2, k_2/\alpha_{21}\} \gg 1$, где k_2 — число Кнудсена для тяжелого компонента, а α_{21} — параметр, обезразмеривающий интеграл столкновений J_{21} и характеризующий межфазное взаимодействие. В этом режиме f_2 — медленная переменная (так называемый бесстолкновительный режим). Тогда в качестве квазистационарного распределения примесной фазы можно выбрать $f_{2\text{н}}$ — начальное распределение. Часто такое распределение оказывается максвелловским с параметрами $\mathbf{u}_{20}$, T_{20}. Заметим, что эти величины — не медленные переменные, а лишь параметры функции $f_{2\text{н}}$, т. е. релаксация, вообще говоря, происходит через медленное изменение самого вида функции f_2, а не только ее параметров. Подобная ситуация имеет место, например, при впрыскивании максвелловского пучка частиц в поток газа или при прохождении ударной волны через пылевое облако, когда перед фронтом ударной волны обе фазы находятся в равновесии с общей гидродинамической скоростью и общей температурой.

Такой выбор квазистационарного распределения позволяет непосредственно вычислить коэффициенты A и B. Выражения для этих величин еще более упрощаются, если воспользоваться малостью параметра ε. Перейдем в (11) к новым переменным интегрирования с помощью замены

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \frac{1}{1+\varepsilon^2}\mathbf{G}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{V} - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\mathbf{G}, \quad \mathbf{g} = \sqrt{\frac{m_1}{2kT_1}}\,\mathbf{G}$$

и аналогичной замены для штрихованных переменных. В силу сделанных предположений функции $f_1(\mathbf{v}_1)$ и $f_2(\mathbf{v}_2)$, входящие в коэффициенты модели, слабо отличаются от максвелловских, поэтому можно считать, что они имеют характерный вид с максимумом при $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i = n_i^{-1}\int \mathbf{v}_i f_i\, d\mathbf{v}_i$ (средней скорости) и шириной максимума $\sqrt{m_i/2kT_i}$. Вследствие нормированности и соотношения $\varepsilon \ll 1$ функция f_2 имеет резкий пик, и в рамках асимптотического метода Лапласа остальные функции можно считать достаточно плавными и вычислять в точке $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2$. Оставшийся интеграл вычисляется тривиально с учетом $\int f_2\, d\mathbf{v}_2 = n_2$. Пренебрегая в полученном выражении членами $\sim \varepsilon^2$, имеем

$$(18)\quad B'^{mn}_{ij} = \frac{n_2}{\pi Q_m}\sqrt{\frac{2kT_1}{\pi m_1}}\int g^3\, dg\, d\mathbf{n}\, d\mathbf{n}'\sigma^d(g, \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')\exp(-(\mathbf{g}-\mathbf{w})^2)\times$$
$$\times\,\psi_{ij}((\mathbf{g}-\mathbf{w})^2)\,Y_i(\mathbf{g}-\mathbf{w})\,[\psi_{mn}((\mathbf{g}'-\mathbf{w})^2)\,Y_m(\mathbf{g}'-\mathbf{w}) -$$
$$-\,\psi_{mn}((\mathbf{g}-\mathbf{w})^2)\,Y_m(\mathbf{g}-\mathbf{w})];$$
$$Q_0 = Q_1 = 1,\ Q_2 = 2/3,\ Q_3 = 4/25,\ \mathbf{w} = \sqrt{m_1/2kT_1}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{20}).$$

Выражения для A легко найти, если воспользоваться соотношением $A_{mn} = B'^{mn}_{00}$.

Вернемся теперь к расчету тензора напряжений (17) и характеристик межфазного взаимодействия (15). В приближении малой анизотропии ($||\Delta|| \ll 1$) в первом порядке теории возмущений получим $\left(I^{\varphi\psi}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\varphi}\delta_{\beta\psi}\right)$

$$(19)\qquad \Pi_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{4}{15}}\,\nu_2^{-1}p_1\left(I^{\varphi\psi}_{\alpha\beta} - \Delta^{\varphi\psi}_{\alpha\beta}\right)^{-1}\mathring{A}_{2,\varphi\psi,0} \approx$$
$$\approx \sqrt{\frac{4}{15}}\,\nu_2^{-1}p_1\left(A_{2,\alpha\beta,0} + \Delta^{\varphi\psi}_{\alpha\beta}A_{2,\varphi\psi,0}\right).$$

Используя для сечения взаимодействия модель твердых сфер в нулевом приближении по Δ, находим (выражения для коэффициентов A, B приведены в приложении)

$$P_{\alpha\beta} = p_1\delta_{\alpha\beta} + \frac{\sqrt{6}}{5}\nu_2^{-1}\Phi(w)\,w^2W_{\alpha\beta}, \quad W_{\alpha\beta} = w^{-2}\left(w_\alpha^0 w_\beta\right), \tag{20}$$

$$\Phi(w) = 4n_2\sigma_{12}\sqrt{\frac{kT_1}{3\pi m_1}}\left[1 + \frac{2}{w}\int\limits_0^w dq e^{-q^2}\left(w^2q^2 - wq^3 + \frac{1}{3}q^4\right)\right].$$

Таким образом, присутствие второго компонента приводит к возникновению существенно анизотропного слагаемого в тензоре напряжений. В рассмотренном приближении дополнительное «давление» имеет место лишь в направлении вдоль относительной скорости. При учете второго слагаемого в (19) дополнительные вклады возникнут во всех направлениях. Здесь не будем выписывать соответствующие выражения ввиду их громоздкости, однако они легко могут быть восстановлены с использованием выражения (П.2). Найденные поправки к тензору напряжений естественно назвать релаксационным давлением, поскольку они исчезают при переходе системы к равновесию, когда происходит выравнивание скоростей ($\mathbf{w} = 0$).

Для силы межфазного взаимодействия в рамках тех же предположений имеем

$$F_{1\gamma} = \sqrt{\frac{kT_1}{3m_1}}\left\{\Phi(w)\,w_\gamma + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}\nu_2^{-1}\Phi(w)\,w^2\left[a_1W_{\alpha\beta}^2\frac{w_\gamma}{w} + \right.\right. \tag{21}$$

$$\left.\left. + a_2\left(W_{\gamma\beta}\frac{w_\beta}{w} + W_{\alpha\beta}\frac{w_\alpha}{w}\right)\right]\right\},$$

$$a_i = \frac{4}{3}n_2\sigma_{12}\sqrt{\frac{kT_1}{5\pi m_1}}\int\limits_0^\infty dq q^4 e^{-q^2}\int\limits_{-1}^1 dx\sqrt{q^2 + w^2 + 2qwx}\,\xi_i,$$

$$\xi_1 = q(5x^3 - 3x) + w(3x^2 - 1), \quad \xi_2 = qx(1 - x^2).$$

Как видно из (21), помимо составляющей вдоль относительной скорости, межкомпонентная сила $\mathbf{F}_1$ имеет составляющие и в остальных направлениях, что обусловлено существенным возмущением функции распределения легкого компонента.

Межфазный энергообмен определяется выражением

$$\Xi_1 = -2\sqrt{\frac{2}{3}}kT_1\Phi(w)\,w\left(w + (a_1 + 2a_2)\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}\nu_2^{-1}W_{\alpha\beta}^2\right) \tag{22}$$

($a_{1,2}$ те же, что и в (21)).

Соотношения (20) — (22) замыкают в нулевом приближении по числу Кнудсена уравнения переноса (14) в случае сильного влияния примесного компонента. В первом порядке по k_1 возникают очень громоздкие выражения, и здесь не будем па них останавливаться. В процессе релаксации относительная скорость w уменьшается и возмущение функции распределения становится малым, т. е. ряд (5) начнется с члена с $q=1$ ($\varphi_{1(0)} = 0$). При этом схема решения уравнения (13) изменится, поскольку в нулевом приближении по k_1 имеет $f_1 = f_{10}$. Следовательно, при замыкании уравнений переноса (14) при $k_1 \to 0$ получим $P_{1\alpha\beta} = p_1\delta_{\alpha\beta}$, что означает $\Pi_{\alpha\beta} = 0$. Эффекты анизотропии оказываются малыми и не проявляются в рассматриваемом приближении.

В первом приближении по параметру k_1 из (13) имеем

$$\varphi_1 = -\nu_2^{-1}\left[\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1)\cdot\nabla kT_1 + 2\,(c^0c)_{\alpha\beta}\colon\left(\overset{\circ}{U}_{1\alpha\beta} - \right.\right. \tag{23}$$

$$\left.\left. - \frac{2}{15}\frac{\Pi_{1\xi\eta}}{p_1}B'^{2,\alpha\beta,0}_{2,\xi\eta,0}\right)\right], \quad \overset{\circ}{U}_{1\alpha\beta} = (\nabla^0u_1)_{\alpha\beta} - \sqrt{\frac{1}{15}}\overset{\circ}{A}_{2,\alpha\beta,0}.$$

Подстановка (23) в выражение (8) для $\mathbf{P}$ приводит к матричному уравнению

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha\beta}^{\varphi\psi}\Pi_{\varphi\psi}, \quad \mathbf{\Gamma} = -2\mu_1\mathring{\mathbf{U}}_1, \quad \mu_1 = n_1kT_1\nu_2^{-1} \tag{24}$$

(Δ то же, что и в (17)). Используя свойства $\mathbf{\Gamma}$ и $B_{20}^{\prime 20}$, легко показать, что $\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Pi} = 0$ и $\Pi_{\alpha\beta} = \Pi_{\beta\alpha}$.

Аналогичная процедура для вектора потока тепла приводит к $\mathbf{q} = -\lambda_1\nabla \ln kT_1$, $\lambda_1 = \frac{15}{4}\frac{k}{m_1}\mu_1$. Заметим, что в модели третьего порядка для $\mathbf{q}$ получаем уже матричное уравнение типа (24), причем в соответствующем аналоге возникает дополнительное к $\nabla \ln kT_1$ слагаемое (аналог A_{20}). В случае малой анизотропии аналогично (19) получаем

$$P_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha\beta}^{\varphi\psi}\Gamma_{\varphi\psi}. \tag{25}$$

Найденные результаты означают неньютоновский характер течения и анизотропию коэффициента вязкости. Заметим, что анизотропия тензора напряжений (как в случае сильного, так и слабого влияния примесного компонента) суть отражение того факта, что присутствие примеси, не находящейся в равновесии с несущим компонентом и оказывающей на последний направленное воздействие, делает несущую фазу незамкнутой неизотропной системой.

В заключение выпишем структуру тензора напряжений, определяемого соотношением (25), с использованием для коэффициентов аппроксимации (18) и выражений, полученных в приложении:

$$\begin{gathered} P_{1\alpha\beta} = (p_1 + p_1^*)\,\delta_{\alpha\beta} - 2\mu_{1\alpha\beta}^{*mn}\mathring{U}_{1mn} + \\ + 2\mu_1\tilde{b}_3(\mathring{U}_{1\beta n}w_nw_\alpha + \mathring{U}_{1\alpha n}w_nw_\beta)/w^2, \\ p_1^* = -\tilde{b}_0\Gamma_{mn}W_{mn}, \quad \mu_{1\alpha\beta}^{*mn} = \mu_1\left[(1-\tilde{b}_1)\,I_{\alpha\beta}^{mn} - \tilde{b}_2W_{mn}\frac{w_\alpha w_\beta}{w^2}\right]. \end{gathered} \tag{26}$$

Расчет коэффициентов B' в пренебрежении зависимости транспортных сечений рассеяния от своих аргументов дает значения параметров

$$\tilde{b}_i = \frac{4}{15}\nu_2^{-1}b_i, \quad b_i = \frac{n_2\sigma_{12}}{10}\sqrt{\frac{2kT_1}{m_1}}\int_0^\infty dqq^4e^{-q^2}\int_{-1}^{1} dx\,\sqrt{q^2 + w^2 + 2qwx}\,\eta_i,$$

$$\eta_0 = \frac{1}{3}\,[q^2(6x^2 - 15x^4 + 1) + 4w^2(3x^2 - 1)], \quad \eta_1 = 2q^2(x^2 - 1)^2,$$

$$\eta_2 = q^2(35x^4 - 30x^2 + 3) - 4w^2(3x^2 - 1), \ \eta_3 = 2q^2(6x^2 - 5x^4 - 1).$$

Входящие в выражение для тензора напряжений p^*_1 и μ^*_1 имеют смысл релаксационного давления и тензора эффективной вязкости. Таким образом, реология двухкомпонентной среды существенно отличается от ньютоновской как в результате зависимости тензора напряжений от скорости, так и в результате анизотропии коэффициента вязкости. Кроме того, в тензоре напряжений возникает дополнительный член (последнее слагаемое в (26)), имеющий совершенно иную структуру: напряжения оказываются пропорциональны не только элементам тензора скоростей деформаций, но и диадам, составленным из относительных скоростей.

Следует отметить, что обнаруженная структура уравнений гидродинамики для несущего компонента может оказаться существенной при исследовании устойчивости течений двухкомпонентных смесей и распространения звука в таких средах.

Приложение. На основе выражения (18) для коэффициентов модели B' и указанной связи коэффициентов A и B' получим представление для них в виде квадратур, содержащих σ_d и σ_v — сечение диффузии и вязкости (для модели твердых сфер $(3/2)\sigma_v = \sigma_d = \sigma$):

$$\nu_2 = \frac{64 n_1}{3} \sqrt{\frac{kT_1}{15\pi m_1}} \int x^2 e^{-x} \left(\sigma_{11} + \frac{3}{2}\sigma_{v11}\right) dx, \quad A_{1,\alpha,0} = -\Phi(w)\, w_\alpha,$$

$$A_{01} = 2w_\alpha A_{1,\alpha,0} = -2\Phi(w)\, w^2, \quad A_{2,\alpha\beta,0} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Phi(w)\, w^2 W_{\alpha\beta}$$

(функция $\Phi(w)$ и тензор W вводились в (20)),

$$B'^{1,\gamma,0}_{2,\alpha\beta,0} = -a_1 \frac{w_\alpha w_\beta w_\gamma}{w^3} - a_2 \left(\delta_{\alpha\gamma} \frac{w_\beta}{w} + \delta_{\beta\gamma} \frac{w_\alpha}{w}\right) -$$

$$- \delta_{\alpha\beta} \frac{w_\gamma}{w} \left[a_3 w + a_2 - \frac{a_4 + a_5 w}{3}\right],$$

$$a_i = \frac{4n_2}{3} \sqrt{\frac{kT_1}{5\pi m_1}} \int dq\, q^4 e^{-q^2} \int_{-1}^{1} dx \sqrt{q^2 + w^2 + 2qwx}\, \sigma_{d12} \xi_i,$$

$$\xi_1 = q(5x^3 - 3x) + w(3x^2 - 1),\ \xi_2 = qx(1 - x^2),$$

$$\xi_3 = 1 - x^2,\ \xi_4 = q,\ \xi_5 = 1$$

(коэффициенты $a_{1,2}$, вычисленные в модели твердых сфер, приведены в (21)),

(П.1) $$B'^{01}_{2,\alpha\beta,0} = 2w_\gamma B'^{1,\gamma,0}_{2,\alpha\beta,0};$$

(П.2) $$B'^{2,mn,0}_{2,ij,0} = -b_1 \delta_{ij}\delta_{mn} - b_2 W_{ij}\delta_{mn} - b_3 \delta_{ij} W_{mn} - b_4 W_{ij} W_{mn} -$$

$$- b_5 (\delta_{mi}\delta_{ni} + \delta_{mj}\delta_{ni}) - b_6 (W_{jn}\delta_{im} + W_{in}\delta_{jm} + W_{jm}\delta_{in} + W_{im}\delta_{jn}),$$

$$b_i = \frac{n_2}{10} \sqrt{\frac{2kT_1}{\pi m_1}} \int_0^\infty dq\, q^4 e^{-q^2} \int_{-1}^{1} \sqrt{q^2 + w^2 + 2qwx}\, \zeta_i,$$

$$\zeta_1 = \frac{q}{3}\left[\sigma_{v12} q (7x^4 - 6x^2 - 1) + \left(\frac{3}{2}\sigma_{v12} - \sigma_{d12}\right)\frac{w}{3}(-19x^3 + 3x + 2)\right],$$

$$\zeta_2 = 2q\left[\sigma_{v12} q (5x^4 - 6x^2 + 1) + \left(\frac{3}{2}\sigma_{v12} - \sigma_{d12}\right)\frac{2wx}{3}(7x^2 - 5)\right],$$

$$\zeta_3 = 2q\left[\sigma_{v12} q (5x^4 - 6x^2 + 1) + \left(\sigma_{v12} - \frac{2}{3}\sigma_{d12}\right)\frac{8wx}{3}(x^2 - 1)\right],$$

$$\zeta_4 = \frac{1}{2}\left[3\sigma_{v12} q^2 (35x^4 - 30x^2 + 3) + 16\left(\frac{3}{2}\sigma_{v12} - \sigma_{d12}\right) qwx (5x^2 - 3) + \right.$$

$$\left. + 8\left(\frac{3}{2}\sigma_{v12} - 2\sigma_{d12}\right) w^2 (3x^2 - 1)\right],$$

$$\zeta_5 = \frac{1}{2}\left[\sigma_{v12} q^2 (6x^2 - 7x^4 + 1) + \left(\frac{3}{2}\sigma_{v12} - \sigma_{d12}\right)\frac{16x}{3}(1 - x^2)\right],$$

$$\zeta_6 = \frac{q}{2}\left[3\sigma_{v12} q (6x^2 - 5x^4 - 1) + 8\left(\frac{3}{2}\sigma_{v12} - \sigma_{d12}\right) wx (1 - x^2)\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Богданов А. В., Горбачев Ю. Е., Дубровский Г. В. и др.** К кинетической теории смеси газа с твердыми частицами. I.— Л., 1985.— (Препр./ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР; № 941).
2. **Дубровский Г. В., Кондратенко А. В., Федотов В. А.** Кинетическая модель структурной газовзвеси // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1983.— № 1.
3. **Струминский В. В.** Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей // ПММ.— 1974.— Т. 38, вып. 2.
4. **Лунькин Ю. П., Мымрин В. Ф.** Кинетическая модель газовзвеси // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1981.— № 1.
5. **Галкин В. С., Макашев Н. К.** Условия применимости и молекулярно-кинетический вывод уравнений многотемпературной, многоскоростной газодинамики // ЖВММФ.— 1983.— Т. 23, № 6.
6. **Dang Hong Tiem.** Derivation of generalized hydrodynamic equation for binary gas mixtures // J. de Méc. Théor. et Appl.— 1984.— V. 3, N 4.

7. **Сирович Л.** Кинетическое моделирование газовых смесей // Некоторые вопросы кинетической теории газов/Под ред. В. П. Шидловского.— М.: Мир, 1965.
8. **Коган М. Н.** Динамика разреженного газа.— М.: Наука, 1967.
9. **Черчиньяни К.** Теория и приложения уравнения Больцмана.— М.: Мир, 1978.
10. **Богданов А. В., Горбачев Ю. Е., Тиганов И. И.** Аналитические аппроксимации сечений рассеяния и частот столкновений для модельных потенциалов.— Л., 1984.— (Препр./ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР; № 893).
11. **Горбачев Ю. Е.** Расчет частот столкновений в гетерогенных средах на основе потенциала Кихары // ЖТФ.— 1980.— Т. 50, вып. 2.
12. **Колесниченко Е. Г.** О методике вывода гидродинамических уравнений для сложных систем // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1981.— № 3.
13. **Hanson F. B., Morse T. F.** Kinetic models for a gas with internal structure // Phys. Fluids.— 1967.— V. 10, N 2.

г. Ленинград *Поступила 6/I 1987 г., в окончательном варианте — 20/VI 1988 г.*

УДК 532.72

В. И. Найденов, Ю. В. Отрашевский

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В НЕПОДВИЖНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

Неустойчивость Марангони в неподвижном слое жидкости постоянной вязкости исследовалась в [1—3]. В химико-технологических процессах (например, при неизотермической хемосорбции газов жидкими пленками) часто используются вязкие жидкости с большими числами Прандтля [4]. Динамическая вязкость таких жидкостей сильно уменьшается с ростом температуры, и этот эффект, по-видимому, должен существенно влиять на критические числа Марангони, определяющие условия возникновения термокапиллярной конвекции. Учет переменности физических свойств жидкости актуален и при исследовании процессов гидромеханики и тепломассообмена при выращивании кристаллов [5—8].

Ниже решена задача об устойчивости неподвижного слоя вязкой жидкости, контактирующего с газом, с учетом зависимости поверхностного натяжения и коэффициента динамической вязкости от температур. Аналитически построена кривая нейтральной устойчивости, связывающая критическое число Марангони, градиент вязкости по толщине слоя и волновое число трехмерных возмущений.

Рассмотрим неподвижный слой жидкости, на свободной поверхности которого происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Уравнение Навье — Стокса и конвективного теплообмена примем в виде

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\rho v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j},\tag{1}$$

$$\partial T/\partial t+(\mathbf{v}\nabla T)=a\Delta T,\ \operatorname{div}\mathbf{v}=0,$$

где $\mathbf{v}=\{v_x, v_y, v_z\}$ — скорость жидкости; p — давление; T — температура; ρ, μ, a — плотность, динамический коэффициент вязкости и коэффициент температуропроводности; $a=\lambda/\rho c_p$; λ — коэффициент теплопроводности; c_p — удельная теплоемкость.

Допустим, что вязкость жидкости экспоненциально зависит от температуры, а коэффициент поверхностного натяжения — линейно:

$$\mu=\mu_w e^{-\beta(T-T_w)},\quad \sigma=\sigma_w-\varepsilon(T-T_w)\tag{2}$$

(β, ε — аппроксимирующие параметры, T_w — температура стенки). Зависимости (2) справедливы для широкого класса несжимаемых жидкостей [9 — 11].

Пусть состояние равновесия описывается стационарным решением (1), соответствующим режиму теплопроводности:

$$\mathbf{v}=0,\quad \frac{d^2\widehat{T}}{dy^2}=0,\quad \widehat{T}(0)=T_w,\quad \lambda\frac{d\widehat{T}}{dy}(h)=\alpha[T(h)-T_0].\tag{3}$$

Здесь h — толщина слоя; α — коэффициент теплообмена; T_0 — температура газа.