УДК 533.6.011.51

СКОРОСТЬ ЗВУКА В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ПОКОЯЩЕЙСЯ СРЕДЕ

С. П. Баутин

Уральский государственный университет путей сообщения, 620034 Екатеринбург
E-mail: SBautin@math.usart.ru

Рассматривается модель Куропатенко многокомпонентной среды, в которой число искомых функций совпадает с числом уравнений. Определены значения скоростей звука в покоящейся многокомпонентной среде. Получена формула многочлена степени N, положительные корни которого задают квадраты скоростей звука в среде с N компонентами. В случае $N = 2$ значения двух скоростей звука определены в явном виде. Показано, что найденное таким образом максимальное значение скорости звука в двухкомпонентной среде азота и кислорода с объемными концентрациями, соответствующими воздуху, отличается (в относительных величинах) от скорости звука в воздухе менее чем на 0,3 %. Численными расчетами установлено наличие трех скоростей звука в трехкомпонентной среде. Доказано, что если скорость звука во всех N компонентах одна и та же, то максимальная скорость звука в такой среде равна этой скорости и в среде имеется еще только одна, причем меньшая скорость звука.

Ключевые слова: многокомпонентная среда, звуковая характеристика, скорость звука.

В работе [1] предложена новая математическая модель для описания течений многокомпонентных сред — специальная квазилинейная система уравнений с частными производными. Данная система уравнений построена на основе законов сохранения смеси, полученных из законов сохранения для компонентов. При этом учитывается как парное взаимодействие различных компонентов, так и кластерное взаимодействие компонентов с введенной виртуальной сплошной средой. Одним из основных достоинств модели Куропатенко (МК) является ее замкнутость: МК многокомпонентных сред содержит одинаковое количество уравнений и функций, и для ее замыкания не требуется дополнительных гипотез, конкретизирующих свойства смеси.

В данной работе МК многокомпонентных сред рассматривается в случае плоскосимметричных течений, когда каждый из N компонентов представляет собой идеальный политропный газ. Основной целью работы является получение аналитического выражения для вычисления скорости звука в такой покоящейся многокомпонентной среде.

В рассматриваемом случае МК, записанная в безразмерных переменных, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + u_i\,\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} + \sigma_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0; \tag{1}$$

$$\sigma_i\,\frac{\partial u_i}{\partial t} + \Big[(\gamma_i - 1)c_{vi}^0 T_i + (u - u_i)^2\Big(\frac{\sigma_i}{\sigma} - \frac{1}{2}\Big)\Big]\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} +$$
$$+ \sigma_i\Big[u\Big(1 - \frac{\sigma_i}{\sigma}\Big) + \frac{\sigma_i}{\sigma}u_i\Big]\frac{\partial u_i}{\partial x} + (\gamma_i - 1)c_{vi}^0\sigma_i\,\frac{\partial T_i}{\partial x} + \frac{(u - u_i)\sigma_i}{\sigma}\sum_{j=1, j\ne i}^{N}(u - u_j)\,\frac{\partial \sigma_j}{\partial x} -$$
$$- \frac{(u - u_i)\sigma_i}{\sigma}\sum_{j=1, j\ne i}^{N}\sigma_j\,\frac{\partial u_j}{\partial x} - \alpha_i\sum_{j=1, j\ne i}^{N}\alpha_j a_{ji}(u_j - u_i) = 0; \tag{2}$$

$$
\begin{gathered}
c_{vi}^0 \sigma_i \,\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big[\gamma_i c_{vi}^0 (u-u_i)\Big(1-\frac{\sigma_i}{\sigma}\Big)T_i - u_i^2\Big]\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} + \\
+ \sigma_i \Big\{ c_{vi}^0 \Big[\frac{1}{2}\,\gamma_i \Big(1+\frac{\sigma_i}{\sigma}\Big) - 1\Big] T_i - \frac{3}{2}\,u_i^2 - \frac{1}{2}\,(u-u_i)^2 \Big\} \frac{\partial u_i}{\partial x} + c_{vi}^0 \sigma_i \Big(u_i + \frac{1}{2}\,\gamma_i (u-u_i)\Big)\frac{\partial T_i}{\partial x} - \\
- \frac{1}{2}\,\gamma_i c_{vi}^0 \,\frac{\sigma_i T_i}{\sigma} \sum_{j=1, j\ne i}^{N} (u-u_j)\,\frac{\partial \sigma_j}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\gamma_i c_{vi}^0 \,\frac{\sigma_i T_i}{\sigma} \sum_{j=1, j\ne i}^{N} \sigma_j \,\frac{\partial u_j}{\partial x} - \\
- \sum_{j=1, j\ne i}^{N} \Big\{ \frac{1}{2}\,\alpha_i \alpha_j a_{ji} (u_j - u_i)^2 + b_{ji}\big[\alpha_i (\gamma_j - 1) c_{vj}^0 \sigma_j T_j - \alpha_j (\gamma_i - 1) c_{vi}^0 \sigma_i T_i\big] + \\
+ \alpha_i \alpha_j c_{ji} (T_j - T_i) \Big\} = 0; \qquad (3)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
p_i \,\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + c_{vi}^0 \alpha_i (u-u_i) T_i \Big(\gamma_i \,\frac{\sigma_i}{\sigma} - 1\Big)\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} + \gamma_i c_{vi}^0 \alpha_i \sigma_i T_i \Big(1 - \frac{\sigma_i}{\sigma}\Big)\frac{\partial u_i}{\partial x} - \\
- c_{vi}^0 \alpha_i (u-u_i) \sigma_i \,\frac{\partial T_i}{\partial x} + p_i u_i \,\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} + \\
+ \gamma_i c_{vi}^0 \,\frac{\alpha_i \sigma_i T_i}{\sigma} \sum_{j=1, j\ne i}^{N} (u-u_j)\,\frac{\partial \sigma_j}{\partial x} - \gamma_i c_{vi}^0 \,\frac{\alpha_i \sigma_i T_i}{\sigma} \sum_{j=1, j\ne i}^{N} \sigma_j \,\frac{\partial u_j}{\partial x} = 0. \qquad (4)
\end{gathered}
$$

Здесь $1 \leqslant i \leqslant N$; $N \geqslant 2$ — число компонентов в многокомпонентной среде, т. е. система содержит $4N$ уравнений.

В (1)–(4) искомыми функциями для каждого i-го компонента являются парциальная плотность σ_i, скорость u_i, температура T_i, объемная концентрация α_i. Общее число искомых функций в системе (1)–(4) также равно $4N$. При этом $\sigma_i = \alpha_i \rho_i$, где ρ_i — плотность i-го компонента;

$$
\sigma = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j, \qquad u = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i u_i \text{ —}
$$

парциальная плотность и скорость виртуальной среды соответственно.

Уравнения состояния каждого i-го компонента принимаются в виде

$$
P_i = (\gamma_i - 1) c_{vi}^0 \rho_i T_i, \qquad E_i = c_{vi}^0 T_i, \qquad p_i = \alpha_i P_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,
$$

где P_i, E_i — давления и внутренние энергии компонентов; $\gamma_i = \text{const} > 1$, $c_{vi}^0 > 0$ — показатели политропы и коэффициенты удельной теплоемкости компонентов. Тогда квадрат скорости звука в каждом компоненте равен

$$
c_i^2 = \gamma_i (\gamma_i - 1) c_{vi}^0 T_i.
$$

Постоянные положительные обменные коэффициенты a_{ji}, b_{ji}, c_{ji} считаются заданными, причем

$$
a_{ji} = a_{ij}, \quad b_{ji} = b_{ij}, \quad c_{ji} = c_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.
$$

Прежде чем исследовать вопрос о скорости звука в покоящейся многокомпонентной среде, т. е. вопрос о наличии соответствующих характеристик системы (1)–(4), приведем одно принципиальное замечание.

При выводе МК многокомпонентных сред в работе [1], как и при выводе других моделей гетерогенных сред (см., например, [2]), постулируется выполнение равенства

$$
\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1. \qquad (5)
$$

Однако и в [1], и в данной работе в системе (1)–(4) равенство (5) в явном виде не присутствует. Здесь это равенство специально не рассматривается, что позволяет исследовать систему, содержащую только дифференциальные, но не функциональные уравнения. К тому же при добавлении к системе (1)–(4) соотношения (5) она становится переопределенной: число уравнений больше числа искомых величин. Дальнейший анализ этой переопределенной системы крайне затруднителен.

Естественно, что включение или невключение условия (5) в систему МК многокомпонентных сред также оказывает существенное влияние и на количество характеристик, и на значения скоростей распространения вдоль этих характеристик.

Возможны два варианта обоснования невключения соотношения (5) в систему (1)–(4): 1) доказать, что соотношение (5) является следствием системы (1)–(4); 2) для каждого полученного решения системы (1)–(4) проверять справедливость равенства (5).

В первом случае имеет место следующая

Теорема. *Если для описываемых МК многокомпонентных сред* (1)–(4) *равновесных по скоростям течений, т. е. в случае*

$$u_i(t,x) = u_j(t,x) = u(t,x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{6}$$

имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t,x)\big|_{t=0} = 1, \tag{7}$$

то при всех t, x, при которых непрерывны $u_i(t,x)$ и $p_i(t,x) \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant N$, справедливо равенство (5)*.*

Доказательство. В случае выполнения условия (6) и при выполнении неравенств $p_i(t,x) \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant N$ все уравнения (4) переходят в уравнения переноса

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + u(t,x)\,\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

суммирование которых приводит к аналогичному уравнению для функции $\alpha(t,x) = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i(t,x)$:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u(t,x)\,\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

Для уравнения (8) условие (7) является начальным, обеспечивающим единственность решения. Существование решения у уравнения переноса (8) обеспечивает непрерывность функции $u(t,x)$. Этим единственным решением уравнения (8) является функция

$$\alpha(t,x) = 1.$$

Теорема доказана.

Доказательство аналогичной теоремы в общем случае представляет собой сложную задачу.

В данной работе не строятся сложные решения системы (1)–(4), а исследуется только одно свойство этой системы на конкретном простом решении, для которого справедлива приведенная теорема. Поэтому в данной работе отсутствует необходимость обосновывать второй вариант невключения равенства (5) в систему (1)–(4) в случае других точных решений.

Система (1)–(4) имеет точное решение

$$\begin{gathered} \sigma_i = \sigma_i^0 = \mathrm{const} > 0, \quad u_i = 0, \quad T_i = T_i^0 = \mathrm{const} > 0, \\ \alpha_i = \alpha_i^0 = \mathrm{const} > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \text{ —} \end{gathered} \tag{9}$$

однородный покой, в котором компоненты находятся в равновесии не только по скоростям (все скорости равны нулю), но и по температурам и давлениям:

$$T_i^0 = 1, \qquad P_i^0 = P^0 = \mathrm{const} > 0.$$

Для построения такого решения сначала выбираются константы α_i^0, так чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^0 = 1.$$

Затем необходимо выбрать константы ρ_i^0, так чтобы давления всех компонент были равны, например, единице:

$$1 = P^0 = (\gamma_i - 1) c_{vi}^0 \rho_i^0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Отсюда однозначно определяются константы ρ_i^0:

$$\rho_i^0 = 1/[(\gamma_i - 1) c_{vi}^0], \qquad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Поскольку $\sigma_i^0 = \alpha_i^0 \rho_i^0$, после однозначного определения констант ρ_i^0 также однозначно определяются константы σ_i^0:

$$\sigma_i^0 = \alpha_i^0/[(\gamma_i - 1) c_{vi}^0], \qquad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Построенное точное решение (9) системы (1)–(4), называемое однородным равновесным покоем, обозначается $\boldsymbol{U}_i^0$, $1 \leqslant i \leqslant N$.

Как известно, характеристики квазилинейной системы определяются только на конкретном заданном решении [3]. Далее характеристики системы (1)–(4) строятся именно на однородном равновесном покое (9). Для этого в рассматриваемой системе (1)–(4) в коэффициенты, стоящие перед частными производными, подставляются значения газодинамических параметров (9). Для упрощения расчетов в полученных уравнениях коэффициенты перед производными по времени делаются равными единице с помощью деления на соответствующие константы. Кроме того, учитывается, что $(c_i^0)^2 = \gamma_i(\gamma_i - 1) c_{vi}^0$, и вводятся обозначения $\theta_i^0 = (c_i^0)^2$, $\delta_i^0 = \sigma_i^0/\sigma^0$. В результате для главной части системы получаем выражение

$$\boldsymbol{U}_t + G \boldsymbol{U}_x,$$

где вектор неизвестных функций $\boldsymbol{U}$ содержит $4N$ компонент: σ_1, u_1, T_1, α_1, $\ldots$, σ_N, u_N, T_N, α_N; матрица G имеет размеры $4N \times 4N$.

Характеристики системы (1)–(4) на решении (9) являются прямыми линиями:

$$x - x_0 = k(t - t_0) \tag{10}$$

(x_0, t_0 — постоянные; k — скорости распространения малых возмущений, называемых в газовой динамике скоростями звука [3]). Прямая (10) является характеристикой на решении (9) тогда и только тогда, когда значение числа k есть корень характеристического уравнения

$$\Delta_N = \det(G - kE) = 0. \tag{11}$$

Сначала рассмотрим случай $N = 2$, т. е. случай двухкомпонентной среды. Определитель Δ_2 является определителем восьмого порядка:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -k & \sigma_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & -k & g_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{32} & -k & 0 & 0 & g_{36} & 0 & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & -k & 0 & g_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & \sigma_2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{65} & -k & g_{67} & 0 \\ 0 & g_{72} & 0 & 0 & 0 & g_{76} & -k & 0 \\ 0 & g_{82} & 0 & 0 & 0 & g_{86} & 0 & -k \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$g_{21} = \frac{\theta_1^0}{\gamma_1 \sigma_1^0}, \quad g_{23} = \frac{\theta_1^0}{\gamma_1}, \quad g_{32} = \frac{\gamma_1(1+\delta_1^0)}{2} - 1, \quad g_{36} = \frac{\gamma_1 \delta_2^0}{2},$$

$$g_{42} = \frac{\theta_1^0 \sigma_1^0 (1-\delta_1^0)}{\gamma_1 - 1}, \quad g_{46} = -\frac{\theta_1^0 \sigma_1^0 \delta_2^0}{\gamma_1 - 1}, \quad g_{65} = \frac{\theta_2^0}{\gamma_2 \sigma_2^0}, \qquad g_{67} = \frac{\theta_2^0}{\gamma_2},$$

$$g_{72} = \frac{\gamma_2 \delta_1^0}{2}, \quad g_{76} = \frac{\gamma_2(1+\delta_2^0)}{2} - 1, \quad g_{82} = -\frac{\theta_2^0 \sigma_2^0 \delta_1^0}{\gamma_2 - 1}, \quad g_{86} = \frac{\theta_2^0 \sigma_2^0 (1-\delta_2^0)}{\gamma_2 - 1}.$$

В результате несложных тождественных преобразований получаем следующее представление искомого определителя Δ_2 через определитель четвертого порядка:

$$\Delta_2 = k^4 \begin{vmatrix} -k & g_{23} & 0 & 0 \\ g_{32}+1 & -k & g_{36} & 0 \\ 0 & 0 & -k & g_{67} \\ g_{72} & 0 & g_{76}+1 & -k \end{vmatrix}.$$

Этот определитель раскладывается по первой строке:

$$\Delta_2 = k^4 \{ k^4 - [(1+\delta_1^0)\theta_1^0 + (1+\delta_2^0)\theta_2^0] k^2/2 + (1+\delta_1^0+\delta_2^0)\theta_1^0\theta_2^0/4 \} \equiv k^4 P_2(k^2).$$

Многочлен четвертой степени от k в фигурных скобках является биквадратным многочленом от $\lambda = k^2$. С учетом того что $\delta_1^0 + \delta_2^0 = 1$, корни этого многочлена $P_2(\lambda)$ задаются формулой

$$\lambda_\pm = [(1+\delta_1^0)\theta_1^0 + (1+\delta_2^0)\theta_2^0]/4 \pm \sqrt{[(1+\delta_1^0)\theta_1^0 + (1+\delta_2^0)\theta_2^0]^2 - 8\theta_1^0\theta_2^0}/4.$$

Так как подкоренное выражение

$$[(1+\delta_1^0)\theta_1^0 + (1+\delta_2^0)\theta_2^0]^2 - 8\theta_1^0\theta_2^0 = [(1+\delta_1^0)\theta_1^0 - (1+\delta_2^0)\theta_2^0]^2 + 4\delta_1^0\delta_2^0\theta_1^0\theta_2^0$$

положительно при $\delta_i^0 > 0$, $\theta_i^0 > 0$, $i = 1, 2$, то оба корня $\lambda_\pm$ также положительны и многочлен $P_2(k^2)$ имеет четыре действительных корня.

Следовательно, при $N = 2$ характеристическое уравнение (11) $\Delta_2 = 0$ имеет восемь действительных корней с учетом их кратности.

Первый из корней характеристического уравнения является нулевым четырехкратным корнем

$$k_{1,2,3,4} = 0,$$

которому в двухкомпонентной среде соответствует контактная характеристика кратности четыре. Следующие четыре корня характеристического многочлена задаются формулами

$$k_{5,6} = \pm\sqrt{\lambda_+}, \qquad k_{7,8} = \pm\sqrt{\lambda_-}.$$

Этим корням соответствуют четыре звуковые характеристики (каждая кратности единица). Звуковые характеристики двухкомпонентной среды распространяются вправо и влево с двумя скоростями звука $c_h > c_l$:

$$c_h = \Big\{(1+\delta_1^0)\theta_1^0 + (1+\delta_2^0)\theta_2^0 + \sqrt{[(1+\delta_1^0)\theta_1^0 - (1+\delta_2^0)\theta_2^0]^2 + 4\delta_1^0\delta_2^0\theta_1^0\theta_2^0}\Big\}^{1/2}/2; \qquad (12)$$

$$c_l = \Big\{(1+\delta_1^0)\theta_1^0 + (1+\delta_2^0)\theta_2^0 - \sqrt{[(1+\delta_1^0)\theta_1^0 - (1+\delta_2^0)\theta_2^0]^2 + 4\delta_1^0\delta_2^0\theta_1^0\theta_2^0}\Big\}^{1/2}/2 \qquad (13)$$

(c_h — бóльшая скорость звука в покоящейся многокомпонентной среде; c_l — меньшая скорость звука в той же среде).

Наличие четырех звуковых характеристик в случае двухкомпонентных сред вполне объяснимо. Система (1)–(4) по виду близка к системам многоскоростных моделей многокомпонентных сред, в которых в случае двухскоростной среды [4] также имеется четыре звуковые характеристики, попарно распространяющиеся в разных направлениях.

Если для определенности, но не нарушая общности, считать, что у второго компонента (в противном случае просто меняется нумерация компонентов) скорость звука больше: $c_2^0 > c_1^0$, то из формул (12), (13) получим следующие неравенства:

$$c_2^0 > c_h > c_1^0 > c_l. \qquad (14)$$

Представляется, что неравенства (14) являются физически осмысленным результатом использования МК многокомпонентной среды (1)–(4). Действительно, рассматриваемая модель помимо упругого взаимодействия частиц среды учитывает также обмен импульсом и энергией между частицами различных компонентов. Такое взаимодействие приводит к уменьшению доли энергии, расходуемой при упругом взаимодействии. Поскольку именно упругое взаимодействие определяет скорость распространения возмущений в среде, учет дополнительных взаимодействий приводит к уменьшению скоростей звука в многокомпонентной среде по сравнению со скоростями звука в каждом компоненте.

Сравним значение скорости звука в воздухе, полученное в физических экспериментах [5, 6], с вычисленным по формуле (12). Как известно, в воздухе объемная доля азота N_2 составляет 78,08 %, кислорода O_2 — 20,95 % [5, 6]. Оставшиеся 0,97 % приходятся в основном на инертные и углекислый газы. Будем считать воздух двухкомпонентной средой и распределим оставшиеся 0,97 % пропорционально между азотом и кислородом, т. е. объемные концентрации азота и кислорода положим равными 0,7886, 0,2114 соответственно. При нормальных условиях (давление равно 1 атм, температура — 16,7 °C) плотности азота и кислорода равны 1,250 46 и 1,428 97 кг/м^3 соответственно. При этом скорости звука в азоте и кислороде имеют значения 347,6 и 323,8 м/с. Подставив эти значения в формулы (12), (13), получим $c_h = 342{,}697\,429$, $c_l = 232{,}236\,655$. В [6] приведены значения скорости звука в воздухе: при $T = 0$, 10, 20 °C $c_a = 331{,}8$, 337,8, 343,8 м/с. Определяя линейной интерполяцией значение c_a при $T = 16{,}7$ °C, получаем $c_a = 341{,}82$. Различие относительных значений величин c_h и c_a $(|c_a - c_h|/c_a) \cdot 100$ % не превышает 0,3 %. Это свидетельствует о том, что для воздуха как для двухкомпонентной среды МК многокомпонентной среды адекватна результатам физических экспериментов по определению скорости звука.

Замечание 1. Обычно воздух приводят в качестве примера гомогенных сред, для которых не вводятся объемные концентрации, поскольку считается, что газы, составляющие воздух, перемешаны на молекулярном уровне, т. е. объемы, занимаемые каждым из составляющих многокомпонентную среду газов, равны между собой: $V_1 = \ldots = V_N = V$ [7]. Тем не менее предположение о том, что воздух является гетерогенной средой, у которой $V_1 + \ldots + V_N = V$ [7], не представляется противоречивым. Дело в том, что обмен импульсом и энергией между различными компонентами гетерогенной среды определяется значениями обменных коэффициентов a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}. Однако при вычислении значений скоростей распространения характеристик эти величины не используются. Кроме того, в результате многочисленных экспериментов для воздуха определены значения объемной концентрации α_i каждого газа, входящего в его состав. Это позволяет использовать формулы (12), (13) для определения адекватности МК многокомпонентной среды соответствующим результатам физических экспериментов.

Замечание 2. Для гетерогенных моделей двухкомпонентных сред в случае равновесия по скоростям и давлениям можно определить равновесную скорость звука (скорость Вуда) [2]:

$$c = 1\Big/\sqrt{\rho\Big(\frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2}+\frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2}\Big)}, \qquad \rho = \alpha_1\rho_1+\alpha_2\rho_2.$$

При указанных выше параметрах для воздуха из данной формулы получается значение $c = 342{,}17$ м/с, которое ближе к экспериментальному значению c_a, чем вычисленное значение c_h. Однако следует учитывать, что формула Вуда для скорости получена с использованием выведенного уравнения состояния всей многокомпонентной среды в виде $p = p(\rho, T, \alpha_1)$ и в предположении, что в этом случае "...движение равновесной двухфазной смеси описывается обычными уравнениями однофазной сплошной среды" [2. С. 48], т. е. $c = \sqrt{\partial p/\partial\rho}\,\big|_{S=\mathrm{const}}$, где S — энтропия. В отличие от формулы Вуда для скорости формулы для c_h и c_l получены при анализе всей системы (1)–(4), которая, естественно, отличается от традиционной системы уравнений газовой динамики для однокомпонентной среды.

Для формул (12), (13) имеет место следующее. Пусть оба компонента имеют одинаковые скорости звука:

$$c_1^0 = c_2^0 = c^0, \tag{15}$$

поэтому $\theta_1^0 = \theta_2^0$. В частности, выражение (15) может быть следствием равенства термодинамических параметров компонентов:

$$\gamma_1 = \gamma_2, \qquad c_{v1}^0 = c_{v2}^0.$$

Тогда независимо от конкретных значений объемных концентраций каждого компонента, т. е. независимо от значений $\delta_{1,2}^0 = \sigma_{1,2}^0/\sigma^0$ $(\delta_1^0+\delta_2^0 = 1)$, получаем следующие выражения для скоростей звука в двухкомпонентной среде:

$$c_h = c^0, \qquad c_l = c^0/\sqrt{2}. \tag{16}$$

То, что в частном случае равенства скоростей звука у обоих компонентов и у всей смеси бóльшая скорость звука также совпадает с общей скоростью звука, представляется ожидаемым физическим свойством.

Тот факт, что при равенстве скоростей звука у обоих компонентов двухкомпонентной среды имеется еще одна скорость звука, отличная от общей и строго меньше ее, является, по-видимому, следствием как математических, так и физических фактов.

Из равенства скоростей звука еще не следует равенство $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$, т. е. из равенства термодинамических параметров компонентов не следует равенство их газодинамических параметров. Предельный переход от $\boldsymbol{U}_1 \neq \boldsymbol{U}_2$ к $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$ в рамках уравнений с частными производными не является "непрерывным", что следует из рассмотренного ниже модельного примера.

Пусть в системе

$$\begin{aligned} &v_t + a_1 v_x + b_1 w_x = 0,\\ &w_t + a_2 w_x + b_2 v_x = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

коэффициенты $a_i > b_i > 0$, $i = 1, 2$ постоянные. Тогда система (17) имеет две характеристики, распространяющиеся со скоростями

$$c_{h,l} = [a_1 + a_2 \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4b_1 b_2}\,]/2.$$

Если в последней формуле положить

$$a_1 = a_2 = a, \qquad b_1 = b_2 = b,$$

то

$$c_h = a + b > a - b = c_l,$$

т. е. при равенстве соответствующих коэффициентов системы (17) все же имеется две скорости звука.

Если в системе (17) положить $v = w$, то она расщепляется на два независимых уравнения

$$v_t + (a_1 + b_1)v_x = 0, \qquad w_t + (a_2 + b_2)w_x = 0,$$

у каждого из которых имеется по одной характеристике и следующие скорости распространения:

$$c_1 = a_1 + b_1, \qquad c_2 = a_2 + b_2.$$

В случае $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$ эти скорости одинаковы: $c_1 = c_2 = a + b$.

Если по аналогии с описанной процедурой в системе (1)–(4) в случае $N = 2$ положить $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$, то для каждого $i = 1, 2$ система (1)–(4) расщепляется на две системы, эквивалентные системе уравнений газовой динамики. Если наряду с равенством газодинамических параметров принять равенство термодинамических параметров, то скорости звука, определяемые этими двумя системами уравнений газовой динамики, будут одинаковыми.

Одной из возможных физических причин справедливости соотношений (15), (16) является следующая. Например, у двухкомпонентной среды, состоящей из воды и водяного пара, термодинамические параметры компонентов одинаковые. Однако при этом между компонентами возможен обмен импульсом и энергией. Именно такое взаимодействие учитывает МК многокомпонентной среды. И именно из-за взаимодействия различных компонентов и расхода энергии на это взаимодействие отсутствует равенство газодинамических параметров у различных компонентов. Поэтому необходимо рассматривать не две отдельные системы уравнений газовой динамики, а всю систему (1)–(4) при $N = 2$, у которой в однородном покое имеется две скорости звука: $c_h > c_l$.

В случае трех- и четырехкомпонентных сред после вычисления определителей Δ_3, Δ_4 получается формула

$$\Delta_N = k^{2N} P_N(k^2), \tag{18}$$

где при $\lambda = k^2$ многочлен $P_N(\lambda)$ принимает вид

$$P_N(\lambda) = \lambda^N - \frac{\lambda^{N-1}}{2}\sum_{i=1}^N (1 + \delta_i^0)\theta_i^0 + \frac{\lambda^{N-2}}{4}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^N (1 + \delta_i^0 + \delta_j^0)\theta_i^0\theta_j^0 -$$
$$- \frac{\lambda^{N-3}}{8}\sum_{\substack{i,j,m=1\\ i<j<m}}^N (1 + \delta_i^0 + \delta_j^0 + \delta_m^0)\theta_i^0\theta_j^0\theta_m^0 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^l\,\frac{\lambda^{N-l}}{2^l}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_l=1\\ i_1<\ldots<i_l}}^N \Big(1 + \sum_{j=1}^l \delta_{i_j}^0\Big)\prod_{j=1}^l \theta_{i_j}^0 + \ldots + (-1)^N\,\frac{1}{2^N}\Big(1 + \sum_{i=1}^N \delta_i^0\Big)\prod_{i=1}^N \theta_i^0. \tag{19}$$

С учетом того что $\delta_1^0 + \ldots + \delta_N^0 = 1$, последнее слагаемое в формуле (19) равно

$$\frac{(-1)^N}{2^{N-1}} \prod_{i=1}^{N} \theta_i^0 .$$

Для произвольного N формулы (18), (19) доказываются индукцией, определители Δ_N при произвольном значении $N \geqslant 3$ вычисляются по той же схеме, что и в случае $N = 2$.

Среди корней характеристического многочлена

$$\Delta_N \equiv k^{2N} P_N(k^2)$$

степени $4N$ в случае $N \geqslant 3$ имеется нулевой корень кратности $2N$, которому соответствует контактная характеристика той же кратности. Остальные корни характеристического многочлена Δ_N таковы, что их квадраты есть корни многочлена $P_N(\lambda)$ степени N ($\lambda = k^2$).

При $N \geqslant 3$ достаточно трудно доказать, что все корни многочлена $P_N(\lambda)$ есть действительные положительные числа.

В случае $N = 3$ для корней кубического многочлена в [8] имеют место формулы Кардано, кроме того, доказано, что при выполнении неравенства

$$q^2/4 + p^3/27 < 0 \tag{20}$$

все корни действительные. В формуле (20)

$$p = -\frac{b^2}{3} + c, \quad q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d, \quad b = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(1+\delta_i^0)\theta_i^0, \quad d = -\frac{1}{4}\,\theta_1^0\theta_2^0\theta_3^0,$$

$$c = [(1+\delta_1^0+\delta_2^0)\theta_1^0\theta_2^0 + (1+\delta_1^0+\delta_3^0)\theta_1^0\theta_3^0 + (1+\delta_2^0+\delta_3^0)\theta_2^0\theta_3^0]/4.$$

После установления неравенства (20) достаточно легко доказать, что все корни многочлена $P_3(\lambda)$ положительны и, следовательно, многочлен $P_3(k^2)$ имеет шесть действительных корней.

При произвольных значениях

$$\delta_i^0 > 0, \quad \theta_i^0 > 0, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \delta_1^0 + \delta_2^0 + \delta_3^0 = 1$$

доказательство неравенства (20) затруднено, в частности потому, что при $\theta_i^0 \to +0$ величина $q^2/4 + p^3/27$ стремится к нулю с шестым порядком. С таким же порядком стремится к нулю левая часть неравенства (20) при $\delta_i^0 \to +0$.

В настоящее время отсутствует доказательство наличия $2N$ действительных корней у многочлена $P_N(k^2)$ при $N \geqslant 3$ и заведомо отсутствуют формулы для вычисления корней в случае $N \geqslant 5$. Тем не менее уровень развития вычислительной техники и современное программное обеспечение позволяют при заданных значениях δ_i^0, θ_i^0 для всех используемых на практике значений N достаточно легко и с необходимой точностью численно найти значения корней многочлена (19). В частности, с учетом равенства $\delta_1^0 + \delta_2^0 + \delta_3^0 = 1$ путем независимого перебора значений параметров δ_i^0, $\mu_i^0 = \theta_i^0/\theta_3^0$, $i = 1, 2$ от 0,01 до 0,99 с шагом 0,01 в предположении, что $\theta_3^0 \geqslant \theta_2^0$, $\theta_3^0 \geqslant \theta_1^0$, $0 < \delta_1^0 + \delta_2^0 < 1$, установлена справедливость неравенства (20) и тем самым в случае трехкомпонентной среды численно подтверждено наличие звуковых характеристик с тремя скоростями распространения каждой из них.

В случае равенства скоростей звука у всех N компонентов

$$c_i^0 = c^0 > 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{21}$$

т. е. при $\theta_i^0 = \theta^0 = (c^0)^2 > 0$, $i = 1, \ldots, N$, с использованием формулы (19) достаточно легко доказывается равенство

$$P_N(\lambda) = (\lambda - \theta^0)(\lambda - \theta^0/2)^{N-1}. \tag{22}$$

Таким образом, в случае, если имеют место соотношения (21), многочлен $P_N(\lambda)$ представляется в виде N действительных сомножителей, при этом оба корня многочлена: $\lambda_1 = \theta^0$, $\lambda_2 = \theta^0/2$ являются положительными числами.

Из формулы (22) следует, что в случае (21), как и в случае $N = 2$ (см. (15), (16)), скорость c_h равна общей скорости звука всех компонентов:

$$c_h = c^0. \tag{23}$$

Кратности соответствующих звуковых характеристик равны единице.

В случае (21) скорость c_l только одна:

$$c_l = c^0/\sqrt{2}, \tag{24}$$

причем кратности соответствующих ей звуковых характеристик равны $N - 1$.

Таким образом, в случае (21) формулы (22)–(24) обобщают формулы (16) на случай произвольного $N \geqslant 3$.

Автор выражает благодарность В. Ф. Куропатенко за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Куропатенко В. Ф.** Модель многокомпонентной среды // Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 6. С. 761–763.
2. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
3. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
4. **Рахматулин Х. А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 2. С. 184–195.
5. **Варгафтик Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.
6. **Эберт Г.** Краткий справочник по физике. М.: Физматгиз, 1963.
7. **Седов Л. И.** Проблемы науки. М.: Знание, 1966.
8. **Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 16/II 2007 г.,
в окончательном варианте — 15/VI 2007 г.