

РАСЧЕТ СУПЕРКАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКИХ
ПРОФИЛЕЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА

И. И. Ефремов, В. М. Роман

(Киев)

На основе потенциала ускорений и приближенного решения сингулярных интегральных уравнений по методу дискретных особенностей получены численные результаты по распределению давлений, толщины каверны и суммарных характеристик тонких полностью кавитирующих профилей, движущихся вблизи свободной поверхности невесомой жидкости или твердой стенки с учетом конечного числа кавитации.

Заметим, что задача об установившемся движении полностью кавитирующего профиля вблизи свободной поверхности в линейной постановке рассматривалась Джонсоном [1], Ауслендером [2] и Джимом [3]. В этих работах методом конформных отображений строится разложение комплексного потенциала в окрестности бесконечно удаленной точки. В случае бесконечной каверны были получены также аналитические выражения для суммарных характеристик [1,2].

С математической точки зрения рассматриваемая задача сводится к отысканию потенциала скорости с разрывами касательных и нормальных производных или же к нахождению потенциала ускорений с разрывами значений самой функции и нормальных производных. Рассмотрение обеих задач приводят к одним и тем же результатам.

1. Рассмотрим следующую схему кавитационного обтекания тонкого профиля.

Каверна начинается сверху на передней кромке, внизу сходит с задней кромки и замыкается на эллиптический контур, на некотором расстоянии $l > 1$ от передней кромки.

Введем прямоугольную систему координат, жестко связанную с телом, с началом в передней кромке, осью абсцисс вдоль невозмущенного потока со скоростью v_∞ и осью ординат, направленной вертикально вверх.

Для потенциала ускорений или давления краевая задача формулируется в следующем виде:

вне профиля и каверны

$$\Delta P = 0, \quad P = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} \quad (1.1)$$

Кинематическое условие на смачиваемой части профиля и границе каверны дает

$$2 \frac{d}{dx} \left[f_c(x) \pm \frac{1}{2} t(x) \right] = - \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \int_{-\infty}^x \frac{\partial P}{\partial y}(\lambda, y) d\lambda \quad (1.2)$$

Здесь $f_c(x)$ — срединная линия профиля и каверны; $t(x)$ — толщина каверны.

Кроме того, на верхней и нижней границах каверны должно выполняться также и динамическое условие постоянства давления

$$P|_{y \rightarrow 0^+} \rightarrow -\kappa, \quad \kappa = \frac{P_\infty - P_k}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} \quad (1.3)$$

где κ — число кавитации, P_∞ и P_k — соответственно давление на бесконечности и в каверне.

К этим граничным условиям следует добавить условие отсутствия возмущений на бесконечности, а также условие на свободной поверхности ($y = h$) или на твердой стенке ($y = -h$).

Соответственно

$$P|_{y=h} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0 \quad (1.4)$$

Пользуясь формулами Грина и методом отображений относительно свободной поверхности или твердой стенки представим решение сформулированной краевой задачи (1.1 — 1.4) для потенциала ускорений или давления в следующем виде:

$$P(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l (\ln r + \nu \ln r_1) \left[\frac{\partial P}{\partial \eta} \right] (\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial}{\partial y} [\ln r - \nu \ln r_1] \gamma(\xi) d\xi \quad (1.5)$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}, \quad r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + 2\nu h)^2} \quad (1.6) \\ \gamma(x) = P_-(x) - P_+(x), \quad \left[\frac{\partial P}{\partial \eta} \right] = \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_- - \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_+$$

Здесь $\nu = -1$ для свободной поверхности, $\nu = +1$ для твердой стенки, $\gamma(x)$ — скачок давления P , $[dP/d\eta]$ — скачок нормальной производной давления.

Ядра интегралов в формуле (1.5) построены с учетом граничных условий на свободной поверхности или твердой стенке.

Выполнение граничных условий (1.2) и (1.4) приводит к системе интегральных уравнений

$$2 \frac{d}{dx} \left[f_c(x) + \frac{1}{2} t(x) \right] = \frac{1}{2} \int_0^x \left[\frac{\partial P}{\partial \eta} \right] (\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x - \xi}{2h} \left[\frac{\partial P}{\partial \eta} \right] (\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_0^l \left[\frac{\partial P}{\partial \eta} \right] (\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{1}{x - \xi} - \nu \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} \right] \gamma(\xi) d\xi \\ 2 \frac{d}{dx} \left[f_c(x) - \frac{1}{2} t(x) \right] = -\frac{1}{2} \int_0^x \left[\frac{\partial P}{\partial \eta} \right] (\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x - \xi}{2h} \left[\frac{\partial P}{\partial \eta} \right] (\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{4} \int_0^l \left[\frac{\partial P}{\partial \eta} \right] (\xi) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{1}{x - \xi} - \nu \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} \right] \gamma(\xi) d\xi \\ - \kappa = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l (\ln |x - \xi| + \nu \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + 4h^2}) \left[\frac{\partial P}{\partial \eta} \right] (\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{2} \gamma(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{2h}{(x - \xi)^2 + 4h^2} \gamma(\xi) d\xi \quad (1.7)$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем

$$2t'(x) = \int_0^x \left[\frac{\partial P}{\partial \eta} \right] (\xi) d\xi = 2q(x) \quad (1.8)$$

Принимая во внимание (1.8), интегрируем по частям второе и третье уравнения системы (1.7), наложив условие $q(0) = q(l) = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[f_c(x) - \frac{1}{2} t(x) \right] = -\frac{1}{2} q(x) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{2h}{(x-\xi)^2 + 4h^2} q(\xi) d\xi - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \gamma(\xi) \left[\frac{1}{x-\xi} - \nu \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \right] d\xi \\ \kappa = & \frac{1}{\pi} \int_0^l q(\xi) \left[\frac{1}{x-\xi} + \nu \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \right] d\xi + \frac{1}{2} \gamma(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{2h\gamma(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\ & \int_0^l q(\xi) d\xi = t(l) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

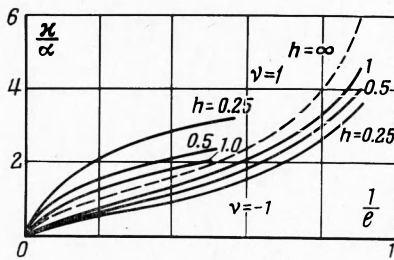
Последнее соотношение представляет собой условие замыкания каверны в точке. Каверна в точке замыкания имеет вертикальную касательную.

Уравнения системы (1.9) будут особыми интегральными уравнениями с ядрами Коши общего вида. Неизвестные плотности интегралов $\gamma(x)$ и $q(x)$ в системе (1.9) можно рассматривать как интенсивности двойного и простого слоев, распределенных соответственно на отрезках $[0,1]$ и $[0,l]$. Из физических соображений вытекает, что решение системы (1.9) следует искать в следующих классах функций.

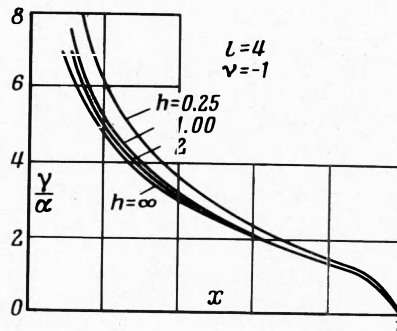
Функция γ имеет интегрируемую особенность при $x=0$ и ограничена при $x=1$ (условие Жуковского — Чаплыгина).

Функция q ограничена при $x=0$ и имеет интегрируемую особенность при $x=l$.

Аналитическое решение системы (1.9) найдено только в предельном случае ($h \rightarrow \infty$ и $l \rightarrow \infty$) [4]. Ниже рассматривается один вариант численного решения системы (1.9) и получение на этой основе гидродинамических характеристик.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для решения системы (1.9) воспользуемся методом дискретных особенностей. Данный метод является обобщением метода $3/4$, впервые примененного в работах Пистолези, Вайссингера, Фолкнера и наиболее полно разработанного для некавитирующих несущих систем в работах С. М. Белоцерковского [5] и его учеников под названием метода дискретных вихрей. Метод состоит в замене непрерывного распределения особенностей в слоях дискретным и получении на этой основе системы линейных алгебраических уравнений путем применения формул механических квадратур. Порядок расположения особенностей и точек, в которых удовлетворяются граничные условия, определяется классом функций, в котором ищется решение.

2. Как известно из работ [4,6,7], перепад давления на кавитирующем профиле вблизи передней кромки имеет особенность порядка $\delta^{-1/4}$ при $\delta \rightarrow 0$. Метод дискретных вихрей дает хорошее приближенное решение задачи о некавитирующем профиле, когда особенность решения на передней кромке порядка $\delta^{-1/2}$ при $\delta \rightarrow 0$. Поэтому для улучшения сходимости метода $3/4$ в системе (1.9) произведем предварительно замену переменных $\xi = t^2$ и $x = z^2$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[f_c(x) - \frac{1}{2} t(x) \right] \Big|_{x=z^2} = -\frac{1}{2} q(z) + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{l}} \frac{2ht}{(z^2-t^2)^2 + 4h^2} q(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \gamma(t) \left[\frac{1}{z^2-t^2} - v \frac{z^2-t^2}{(z^2-t^2)^2 + 4h^2} \right] t dt \\ & \kappa = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{l}} q(t) \left[\frac{1}{z^2-t^2} + v \frac{z^2-t^2}{(z^2-t^2)^2 + 4h^2} \right] t dt + \\ & + \frac{1}{2} \gamma(z) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{2ht}{(z^2-t^2)^2 + 4h^2} \gamma(t) dt \\ & \int_0^{\sqrt{l}} q(t) t dt = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если N — количество разбиений длины хорды профиля $[0, 1]$, а M — количество разбиений отрезка $[1, \sqrt{l}]$, то для каждого отрезка разбиений точки с особенностями и расчетные точки выбираются следующим образом:

для $\gamma(t)$

$$z_i = \left(i - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{N}, \quad t_j = \left(j - \frac{3}{4}\right) \frac{1}{N} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

для $q(t)$

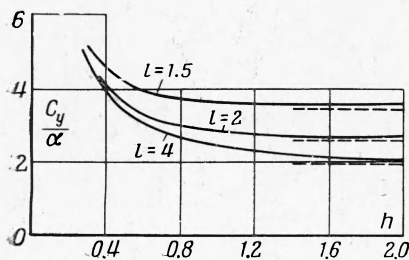
$$z_k = \left(k - \frac{3}{4}\right) \frac{1}{N}, \quad t_m = \left(m - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{N} \quad (k, m = 1, 2, \dots, N)$$

$$z_k = 1 + \left(k - \frac{3}{4}\right) \frac{\sqrt{l}-1}{M}, \quad t_m = 1 + \left(m - \frac{1}{4}\right) \frac{\sqrt{l}-1}{M} \quad (k, m = 1, 2, \dots, M) \quad (2.2)$$

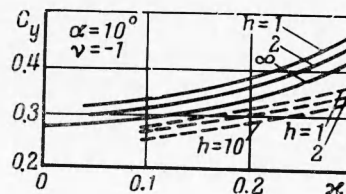
Сходимость изложенного метода исследуется на основе сравнения точного и приближенного решений для различных значений N и M в случае безграничной жидкости.

В гидродинамике течений с кавитацией практический интерес представляют следующие две задачи; 1) определить форму каверны и гидродинамические характеристики при заданной форме тела; 2) задано распределение давления (нагрузки) по телу.

Требуется определить форму тела и каверны и гидродинамические характеристики.



Фиг. 3



Фиг. 4

В соответствии с этим рассмотрим два примера.

Пример 1. Пластина под углом атаки α . В этом случае

$$\frac{d}{dx} \left[f_c(x) - \frac{1}{2} t(x) \right] = -\alpha$$

Систему интегральных уравнений (2.1) заменим системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j \left[\frac{1}{z_i^2 - t_j^2} - v \frac{z_i^2 - t_j^2}{(z_i^2 - t_j^2)^2 + 4h^2} \right] t_j + \pi q_i - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{4ht_m q_m}{(z_i^2 - t_m^2)^2 + 4h^2} - \\ & - \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{4ht_m q_{N+m}}{(z_i^2 - t_m^2)^2 + 4h^2} = 2\pi\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ & \frac{\pi}{2} \gamma_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{2ht_j \gamma_j}{(z_k^2 - t_j^2)^2 + 4h^2} + \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N q_m \left[\frac{1}{z_k^2 - t_m^2} + \frac{v(z_k^2 - t_m^2)}{(z_k^2 - t_m^2)^2 + 4h^2} \right] t_m + \\ & + \frac{2(\sqrt{l}-1)}{M} \sum_{m=1}^M q_{N+m} \left[\frac{1}{z_k^2 - t_m^2} + v \frac{z_k^2 - t_m^2}{(z_k^2 - t_m^2)^2 + 4h^2} \right] t_m - \pi\alpha = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \\ & - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{2ht_j \gamma_j}{(z_k^2 - t_j^2)^2 + 4h^2} + \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N q_m \left[\frac{1}{z_k^2 - t_m^2} + v \frac{z_k^2 - t_m^2}{(z_k^2 - t_m^2)^2 + 4h^2} \right] t_m + \\ & + \frac{2(\sqrt{l}-1)}{M} \sum_{m=1}^M q_{N+m} \left[\frac{1}{z_k^2 - t_m^2} + v \frac{z_k^2 - t_m^2}{(z_k^2 - t_m^2)^2 + 4h^2} \right] t_m - \pi\alpha = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, M) \\ & \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N t_m q_m + \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{m=1}^M t_m q_{N+m} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

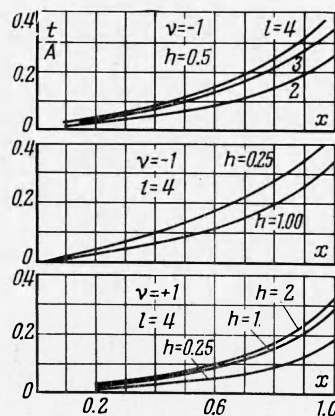
После решения системы (2.3) гидродинамические характеристики и толщины каверны определяются по формулам

$$\begin{aligned} C_y &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N t_j \gamma_j, \quad C_m = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N t_j^3 \gamma_j, \quad x_c = \frac{C_y}{C_m} \\ C_d &= -\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{dy}{dx} \right)_{t_j} t_j \gamma_j \quad (2.4) \\ t_n &= \frac{2}{N} \sum_{m=1}^n t_m q_m \quad (n \leq N) \\ t_n &= \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N t_m q_m + \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{m=1}^M t_m q_{N+m} \quad (n > N) \end{aligned}$$

Срединная линия $f_c(x)$ определяется из первого уравнения (2.1).

Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-2М при $N = 8$ и $M = 16$ для различных длин каверны и различных h . Результаты расчетов x , γ , C_y приведены на фиг. 1—3. На фиг. 4 результаты расчета по изложенной линеаризованной теории (сплошные линии) сравниваются с точным решением (штриховые линии) по нелинейной теории [8]. Сравнение показывает, что линейная теория дает завышенные результаты для подъемной силы полностью кавитирующей пластинки под свободной поверхностью.

При $h \rightarrow \infty$ имеется хорошее совпадение результатов расчета с точным решением, полученным Гюрстом [7] (штриховые линии на фиг. 1 и 3). Погрешность в определении суммарных характеристик не превышает 4%. С увеличением длины каверны точность приближенного решения улучшается.



Фиг. 5

