

### О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЛЕЙБЕНЗОНА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

1. Введение. В [1] численно исследовались решения квазилинейного параболического уравнения Лейбензона, описывающего фильтрацию газа в пористой сферической частице при периодическом изменении внешнего давления газа на ее поверхности. Постановка такой задачи связана с моделированием процессов переноса в зернах катализатора при нестационарных химико-технологических процессах, в которых зачастую удается достигнуть более эффективного протекания реакций вследствие увеличения коэффициентов массообмена. Рассматривалась система уравнений

$$(1.1) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = (b+1)^{-1} \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial p^{b+1}}{\partial r} + \frac{\partial^2 p^{b+1}}{\partial r^2} \right], \quad b \geq 1;$$

$$(1.2) \quad p(R, t) = 1 + A \cos(\omega t + \Delta);$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial r} p(0, t) = 0;$$

$$(1.4) \quad p(r, 0) = 1, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Здесь  $p$  — давление газа в порах;  $R$  — радиус частицы. Ставилась задача исследовать (для  $b = 1$ ) распределение давления по радиусу в зависимости от времени и частоты  $\omega$ , характеристики массообмена и т. д. Решение прослеживалось на временном интервале, составляющем несколько периодов  $T = 2\pi/\omega$  изменения граничных условий. Было показано, что с ростом  $\omega$  амплитуда пульсаций давления в центре шара уменьшается, при этом среднее за период давление в центре сначала растет (от  $\omega = 1$  до  $\sim 7$ ), а затем медленно падает. С ростом частоты все большая область внутри частицы становится все менее чувствительной к внешним пульсациям, однако среднее давление в центре может при этом повышаться. При дальнейшем росте  $\omega$  максимум среднего давления перемещается от центра к внешней поверхности частицы. Средний за период коэффициент массопереноса, определенный как поток газа через поверхность частицы, растет с увеличением  $\omega$ .

В данной работе в отличие от [1] методом разложения по малому параметру исследуются главным образом установившиеся решения системы (1.1)—(1.4). Их анализ показывает, что некоторые из отмеченных в [1] особенностей поведения решения (в частности, немонотонности зависимости среднего давления в центре частицы от частоты  $\omega$ , распределения среднего давления по радиусу, рост коэффициента массопереноса с увеличением частоты) связаны с малостью временного интервала, на котором прослеживалось решение. Показано, что в установившемся режиме при больших частотах практически во всем объеме частицы, за исключением тонкого переходного слоя вблизи поверхности, устанавливается постоянное среднее давление, не зависящее от частоты. Изучены особенности процессов релаксации решения к установившемуся режиму.

2. Установившийся режим. Начальные условия в этом случае теряют свое значение и требуется удовлетворить лишь граничным условиям (1.2) и (1.3). Считаем, что амплитуда  $A < 1$  (в противном случае необходимо принимать во внимание специфические эффекты, связанные с обращением давления в нуль), а начальная фаза  $\Delta = 0$  (в установившемся режиме перейти к любому другому значению  $\Delta$  можно сдвигом по времени).

Ищем решение системы (1.1)—(1.3) в виде ряда

$$(2.1) \quad p_s = 1 + \epsilon \delta_1 + \epsilon^2 \delta_2 + \dots,$$

где  $\epsilon$  — вспомогательный малый параметр, необходимый для оценки порядка различных членов уравнения (в конце положим  $\epsilon = 1$  и будем считать малой амплитуду). Подставляя (2.1) в (1.1) и приравнявая, как обычно, коэффициенты при одинаковых степенях  $\epsilon$ , получим

$$(2.2) \quad p_s(r, t) \approx 1 + \delta_1 + \delta_{2st} + \delta_{2ns} + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \operatorname{Re} \{ \mu(r) \exp(-i\omega t) \}; \\ \mu(r) &= \frac{AR}{r} \frac{\sin \gamma r}{\sin \gamma R}; \quad \gamma = k(i+1); \quad k = (\omega/2)^{1/2}; \\ \delta_{2st} &= \frac{bA^2}{4} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{Z(r)}{Z(R)} \right); \\ \delta_{2ns} &= \frac{bA^2 R^2}{4r} \operatorname{Re} \left\{ \left[ I(r) - \frac{\sin^2 \gamma r}{r \sin^2 \gamma R} - \left( I(R) - \frac{1}{R} \right) \frac{\sin \lambda r}{\sin \lambda R} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp(-2i\omega t) \right\}; \quad \lambda = \sqrt{2} k; \\ I(r) &= \lambda \int_0^r \frac{\sin^2 \gamma s}{\sin^2 \gamma R} \frac{\sin \lambda (r-s)}{s} ds; \\ Z(r) &= \exp(2kr) + \exp(-2kr) - 2 \cos(2kr). \end{aligned}$$

Ограничимся найденными квадратичными поправками (для удобства они разделены на стационарную  $\delta_{2st}$  и нестационарную  $\delta_{2ns}$  компоненты), которые при  $bA \approx 0,5-0,7$  обеспечивают приемлемую точность. Отметим, что в следующем порядке теории возмущений  $\delta_{3st} = 0$ , а  $\delta_{3ns} \sim b^2 A^3$ .

**3. Особенности нелинейных поправок.** Рассмотрим некоторые свойства полученного решения. Нелинейность исходного уравнения (1.1) приводит к возникновению дополнительной постоянной компоненты профиля давления, описываемой слагаемым  $\delta_{2st}$ . Легко видеть, что функция  $\delta_{2st}(r)$  монотонна и при малых  $r$  имеет плато, возникновение которого связано с тем, что в разложении функции  $Z(r)/r^2$  в ряд по степеням  $r$  линейные, квадратичные и кубические члены отсутствуют. С ростом  $k$  плато становится все более плоским, граница его приближается к поверхности шара, так что при  $\omega \rightarrow \infty$  среднее давление практически во всем объеме частицы (за исключением поверхностных слоев, где оно равно 1) стремится к асимптотическому значению  $1 + bA^2/4$ . Для некоторых значений  $\omega$  зависимость  $\delta_{2st}(r)$  приведена на рис. 1 (здесь и на рис. 2 принята нормировка  $R = 1$ ).

Усредненное давление в центре

$$(3.1) \quad \delta_{2st}(0) = \frac{bA^2}{4} \left( 1 - \frac{8k^2 R^2}{Z(R)} \right).$$

Зависимость  $\delta_{2st}(0)$  от  $k$  имеет характерный вид кривой насыщения и представлена на рис. 2. Отличие этих результатов от приведенных в [1] связано с тем, что при низких частотах решения [1] описывают режим, близкий к установившемуся, а при больших — переходные процессы ( $T = 2\pi/\omega$  мал), когда существенно влияние начальных условий (подробнее эти вопросы рассмотрены ниже). Там, где численные результаты [1] и полученные выше сопоставимы, они хорошо согласуются. Лишь при  $\omega \sim 1-10$  наблюдается некоторое расхождение между нашими данными и [1], причины которого неясны. Проведенные нами численные расчеты подтверждают справедливость формулы (3.1).

При  $kR \ll 1$   $\delta_{2st}(0)$  близко к 0 и эффекты нелинейности почти не проявляются (при низких частотах, очевидно, давление перестает зависеть от  $r$ ).

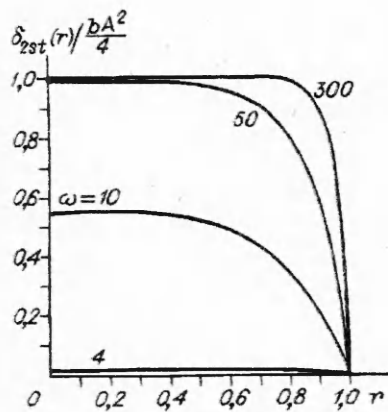


Рис. 1

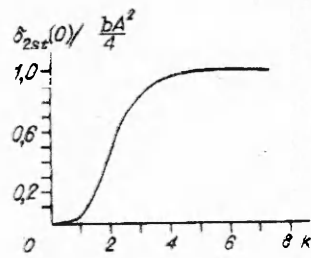


Рис. 2

Рассмотрим выражение для  $\delta_{2st}$ . Интеграл  $I(r)$  очень громоздок и не выражается через элементарные функции, однако при больших  $\omega$  легко найти его приближенное значение

$$I(r) \approx \frac{\cos^2 \gamma r - \cos \lambda r}{r \sin^2 \gamma R}.$$

Ошибка этого приближения (если  $r$  не слишком мало) порядка 15 % при  $\omega = 30$  и уменьшается при росте  $\omega$ . Заметим, что при  $\omega \rightarrow \infty$   $I(R) \rightarrow -R^{-1}$ . Амплитуда колебаний функции  $\delta_{2st}$  уменьшается при приближении к центру шара быстрее, чем амплитуда  $\delta_1$ , вследствие чего точность приближенного решения (2.2) в меньшей степени зависит от  $\delta_{2st}$ , чем от  $\delta_1$  и  $\delta_{2st}$ .

**4. Переходные процессы.** Пусть  $\tau_r$  — характерное время релаксации решения к стационарному режиму (2.2). Рассмотрим поведение решения при  $t < \tau_r$ . Результат, естественно, будет зависеть от начальных условий, которые выберем, как и в [1], в таком виде, чтобы в соответствующей линейной задаче отсутствовали крупномасштабные усредненные движения. Качественно динамику переходных процессов (и результаты [1]) легко проследить, рассмотрев вспомогательную плоскую задачу. Для краткости, пользуясь эквивалентностью уравнений фильтрации и теплопроводности, сформулируем ее в терминах теплопереноса. Пусть однородная среда, заполняющая полупространство  $0 \leq x < \infty$ , нагрета до температуры  $u(x) = 1$ . Для описания распределения температуры в среде требуется найти установившееся решение плоского уравнения теплопроводности

$$(4.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = (b+1)^{-1} \frac{\partial^2 u^{\lambda+1}}{\partial x^2}$$

при условии, что с некоторого момента времени  $t$ , который примем за нуль, температура на границе начинает изменяться по закону

$$(4.2) \quad u(0, t) = 1 + A \cos \omega t.$$

Фактически это известная задача о «температурных волнах» [2], отличающаяся от стандартной постановки нелинейностью уравнения (4.1). Применяя к системе (4.1), (4.2) процедуру, изложенную в п. 2, получим

$$(4.3) \quad u = 1 + \varphi_1 + \varphi_{21} + \varphi_{22}, \quad \varphi_1 = A \exp(-kx) \cos(kx - \omega t),$$

$$\varphi_{21} = \frac{bA^2}{4} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2t^{1/2}} \right) - \exp(-2kx) \right],$$

$$\varphi_{22} = \frac{bA^2}{2} \left[ \exp(-\lambda x) \cos(\lambda x - 2\omega t) - \exp(-2kx) \cos(2kx - 2\omega t) \right].$$

Сравнивая (4.3) с (2.2), легко видеть, что функция  $\varphi_1$  соответствует  $\delta_1$  и может быть найдена из выражения для  $\delta_1$  путем предельного перехода  $R \rightarrow \infty$ , аналогично из  $\delta_{2st}$  получается  $\varphi_{22}$ . Заметим, что функция  $\varphi_{21}$ , формально соответствующая  $\delta_{2st}$ , зависит от времени; ее можно интер-

претировать как дополнительный «линейный» нагрев среды на величину  $bA^2/4$ , связанный с тем, что нелинейность уравнения (4.1) приводит к появлению усредненного потока тепла от приграничного слоя  $0 \leq x \leq (2\omega)^{-1/2}$ . Нагрев среды происходит во всем интервале  $(2\omega)^{-1/2} \leq x < \infty$ , хотя колебания температуры затухают вблизи границы полупространства на расстоянии  $d \sim (2/\omega)^{1/2}$ . Характерное время установления колебаний в области  $x \leq d$  (которая и служит «источником» нагрева) по порядку величины совпадает с периодом изменения граничных условий  $T = 2\pi/\omega$ . Характерное время «прогрева» среды на глубину  $l$

$$\tau_h(l) \sim \max(0, 2l^2; T).$$

Нестационарность  $\varphi_{21}$  связана с бесконечными размерами системы. Если же рассматривать распространение температурных волн в слое большой, но конечной толщины ( $L \gg d$ ) (или в шаре большого радиуса), то при  $T < t \ll \tau_h(L)$  решение (4.3) представляет собой промежуточную асимптотику. Время установления стационарного режима колебаний  $\tau_s(L) \sim \max(T, \tau_h(L)) \sim \tau_h(L)$ . Если  $T < \tau_h$ , то при  $T < t < \tau_h$  поток тепла, связанный с  $\varphi_{21}$ , уменьшается с течением времени как  $t^{-1/2}$  (при  $T \geq \tau_h$  уменьшение его происходит по более сложному закону). По-видимому, именно с этим обстоятельством связан рост среднего коэффициента массообмена при увеличении частоты в расчетах [1], где, напомним, решение прослеживалось на временном отрезке, обратно пропорциональном частоте. Поведение функции  $\varphi_{21}$  объясняет и другую отмеченную в [1] особенность решения — перемещение с увеличением  $\omega$  максимума среднего давления от центра частицы ближе к поверхности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ажищев Н. А., Быков В. И. Уравнение нелинейной фильтрации при нестационарных внешних условиях // Динамика химических и биологических систем. — Новосибирск: Наука, 1989.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.

г. Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 8/VI 1992 г.,  
в окончательном варианте — 8/XI 1992 г.

УДК 532.529

И. В. Деревич

### ТУРБУЛЕНТНЫЙ МАССОПЕРЕНОС ПРИ ТЕЧЕНИИ ГАЗОВЗВЕСИ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ И ПРИ ВДУВЕ / ОТСОСЕ ГАЗА ЧЕРЕЗ ПОРИСТЫЕ СТЕНКИ КАНАЛА

Широкое использование дисперсных турбулентных потоков в энергетике, авиации, химической технологии требует разработки методов воздействия на характеристики дисперсных течений. В частности, снижение или интенсификация процесса осаждения частиц при транспортировке газозвеси в каналах могут быть достигнуты двумя способами. Во-первых, непосредственным действием на частицы дисперсной фазы, например, путем изменения траектории заряженных частиц в электромагнитном поле [1]. В этой ситуации увеличение интенсивности внешнего поля вызывает рост либо снижение концентрации частиц около ограничивающей поверхности (в зависимости от направления вектора напряженности поля). Во-вторых, изменением характеристик самого несущего потока. Это может быть закручивание основного потока с применением специальных завихрителей, установленных на входе в канал [2], турбулизация течения с использованием искусственных вставок

© И. В. Деревич, 1993