ЛИТЕРАТУРА

1. **Бесшапошников А. А., Блохин В. И. и др.** Исследование процессов образования озона в тлеющем разряде повышенного давления в потоке воздуха и технического азота.— ХВЭ, 1982, т. 15, вып. 2.
2. **Смирнов Б. М.** Отрицательные ионы. М.: Атомиздат, 1978.
3. **Бреев В. В., Пашкин С. В.** Численное исследование стационарных состояний положительного столба высоковольтного диффузного разряда при средних давлениях. Препринт № 2956. М.: ИАЭ, 1978.
4. **Бесшапошников А. А., Блохин В. И. и др.** Расслоение тлеющего разряда в потоке газа при повышенных энерговкладах.— ДАН СССР, 1982, т. 262, вып. 1.
5. **Бреев В. В., Двуреченский С. В., Пашкин С. В.** Численное исследование нестационарных процессов в положительном столбе высоковольтного диффузного разряда. Анализ системы уравнений.— ТВТ, 1979, т. 17, № 1.
6. **Акишев Ю. С., Двуреченский С. В. и др.** Исследование элементарных процессов в низкотемпературной плазме.— Физика плазмы, 1981, т. 7, вып. 6.
7. **Блохин В. И., Пашкин С. В.** Исследование анодного падения в высоковольтном диффузном разряде в поперечном потоке воздуха.— ТВТ, 1976, т. 14, № 2.
8. **Блохин В. И., Бреев В. В. и др.** Исследование анодной области газового разряда, контролируемого объемными процессами.— ТВТ, 1981, т. 19, вып. 5.

УДК 533.6.011

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ СЖАТИЯ ГАЗА ПРИ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

А. М. Свалов

(*Москва*)

В исследовании задач термоядерного синтеза с инерциальным удержанием вещества оказалось эффективным использование следующей модели [1—5]: сферическая масса вещества сжимается под действием внешнего поршня, причем качество сжатия описывается интегральным параметром $\langle\rho R\rangle = \int_0^r \rho dr$. Закон изменения давления на поршне находится в удовлетворительном соответствии с законом изменения интенсивности воздействующего фактора (например, лазерного излучения), а большее значение параметра $\langle\rho R\rangle$ соответствует лучшим условиям протекания реакции синтеза. Для математического описания процесса используются уравнения идеальной сжимаемой жидкости с уравнением состояния идеального совершенного газа.

Возникающая при таком подходе задача представляет интерес с точки зрения гидродинамики и формулируется следующим образом: найти такой закон движения поршня, который при заданных значениях вложенной энергии и массы сжимаемого вещества обеспечивал бы максимальное значение $\langle\rho R\rangle$. Решение этой задачи существенно зависит от возможностей создания начальных распределений гидродинамических функций по массе мишени, необходимых для существования найденного решения. В [5] показано, что параметр $\langle\rho R\rangle$ может достигать бесконечных значений при конечных энергии и массе сжимаемого вещества, но для этого при $\gamma > \gamma_*$, где $\gamma_* = 1{,}31$ для схлопывающейся оболочки, $\gamma_* = 1{,}34$ для сплошной мишени, требуется специальное распределение энтропии по радиусу мишени. При значениях $\gamma < \gamma_*$ решения с неограниченным возрастанием $\langle\rho R\rangle$ возможны и при энтропии, постоянной по всей массе. Поскольку наибольший интерес представляет значение $\gamma = 5/3 > \gamma_*$ при постоянной по радиусу энтропии, а также при наиболее простых — постоянных начальных данных, т. е. постоянных значениях плотности ρ, давления p и нулевой скорости u, то необходимо выяснить, каким способом можно достичь максимального значения $\langle\rho R\rangle$ в этом случае. Строго обоснованное аналитическое решение этой задачи едва ли возможно, поэтому представляют интерес результаты исследований, полученные при некоторых упрощающих предположениях.

Предположим, что распределение газодинамических функций по радиусу мишени в конечной стадии сжатия ($t = 0$) аппроксимируется степенными функциями, в частности $\rho = c/r^{\alpha}$. Тогда в окрестности начала координат ($r = 0$, $t = 0$) решение автомодельно [5, 6], и можно найти множество таких значений α, при которых исследуемое конечное состояние может быть непрерывным образом получено из некоторого исходного состояния, т. е. процесс сжатия может быть физически реализован. Таким образом, можно будет получить асимптотику в центре для всех возможных способов сжатия с постоянной энтропией. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих автомодельные решения, зависящие от одной переменной $\lambda = r/t^{\delta}$, приведена в [6]; отметим лишь, что изэнтропическому течению отвечает значение входящей в эту систему константы $\varkappa$, удовлетворяющее соотношению $\varkappa = 2(1 - \delta)/(\gamma - 1)$, связь параметров α и δ дается формулой $\alpha = \varkappa/\delta$. Исследование особых точек в плоскости автомодельных переменных (z, V) показывает, что существует характерное значение α_* [5, 7]:

$$\alpha_* = 2(3 - \sqrt{3})/(\sqrt{3}(\gamma - 1) + 2),$$

которое является максимально возможным при $\gamma = 5/3$. Конечное состояние для целого интервала значений показателя $\alpha < \alpha_*$ при указанном значении γ может быть достигнуто различными способами: в режиме схлопывающейся оболочки [7] при неаналитическом, вообще говоря, переходе через особую характеристику; при сжатии сплошной мишени, чему соответствует автомодельная кривая, идущая из начала координат в седловидную особую точку $B(V = 2/(3\gamma - 1),\ z = 3(\gamma - 1)^2/(3\gamma - 1)^2$. Сжатию сплошной мишени соответствует также множество интегральных кривых из пучка кривых, расположенных выше указанной сепаратрисы и входящих в особую точку типа узла на параболе $z = (V - \delta)^2$, из которой выходит сепаратриса седловидной особой точки $(V = \varkappa/3,\ z = \infty)$, описывающая сжатие центральной части мишени. При $\gamma < 5/3$, как показано в [7], решение с внутренней полостью возможно только при $\alpha < \alpha_*$, так как особая точка B при $\alpha > \alpha_*$ становится узлом, в который входит интегральная кривая, описывающая решение с внутренней полостью. Сжатие сплошной мишени может происходить и при значениях $\alpha > \alpha_*$, так как интегральные кривые, соединяющие начало координат и точку $(V = \varkappa/3,\ z = \infty)$, существуют и в этом случае. Предельное значение $\alpha = \alpha_{**}$ определится условием существования особых точек на параболе $z = (V - \delta)^2$

$$\alpha_{**} = \frac{2}{\gamma - 1}\frac{2}{(1 + \sqrt{2/(\gamma - 1)})^2}.$$

При $5/3 < \gamma < \gamma_1$, где $\gamma_1 = 2{,}412$ [7], наоборот, для полой мишени достижимо значение α_{**}, а для сжатия сплошной мишени требуется, чтобы выполнялось неравенство $\alpha < \alpha_*$, так как в противном случае в узел B будет попадать сепаратриса бесконечно удаленной особой точки $(V = \varkappa/3,\ z = \infty)$. Таким образом, при изменении γ в диапазоне, наиболее интересном для рассматриваемых задач, максимальным значением α, достижимым тем или иным способом, является значение α_{**}, причем при $\gamma = 5/3$ $\alpha_* = \alpha_{**}$.

Покажем, что для достижения максимального значения $\langle\rho R\rangle$ в момент времени $t = 0$ при заданных значениях вложенной энергии и массы сжимаемого вещества необходимо реализовать течение, описываемое автомодельным решением при максимально возможном значении α.

Вообще говоря, своего максимального значения функция $\langle\rho R\rangle$ достигает в некоторый момент времени $t_* > 0$, но t_* близко по величине к нулю, так как при $t > 0$ начинается интенсивный разлет газа от центра мишени и, поскольку плотность в центре при $t = 0$ достигает своего максимального значения, а функции, описывающие состояние газа, имеют наиболее простое аналитическое выражение, будем исследовать функцию $\langle\rho R\rangle$ на максимум именно в этот момент времени.

Пренебрегая при $t = 0$ кинетической энергией мишени в сравнении с внутренней, из выражений для массы M, внутренней энергии E и энтропийной функции $S = p/\rho^{\gamma}$ можно получить равенство

(1) $\langle\rho R\rangle = (ES)^{2\beta} M^{(\gamma-3)\beta}(\gamma - 1)^{2\beta}(3/4\pi)^{1/3} J(\alpha)$, $J(\alpha) = (3 - \alpha)^{(\gamma-3)\beta} \times$
$\times (3 - \gamma\alpha)^{2\beta}/(1 - \alpha)$, $\beta = 1/3(\gamma - 1)$.

Из формулы (1) следует, что при $\alpha < 1$, $\gamma < 3$ $J(\alpha)$ — монотонно-возрастающая функция α, т. е. максимум значения $\langle \rho R \rangle$ достигается при максимальном значении $\alpha = \alpha_{**}$, допускаемом данной величиной γ. При $\alpha \geqslant 1$ $\langle \rho R \rangle$ обращается в бесконечность, но, как легко видеть, допустимые значения α_*, α_{**} таковы, что $\alpha_{**} \geqslant 1$ при $\gamma < 1{,}34$, $\alpha_* \geqslant 1$ при $\gamma < 1{,}31$, т. е. при бо́льших значениях γ бесконечной величины $\langle \rho R \rangle$ при ограниченных затратах вложенной энергии и конечной массе сжимаемого вещества получить нельзя, а максимально возможное значение $J(\alpha)$, например, при $\gamma = 5/3$ равно $J(\alpha_*) \approx 5$, что в 3,4 раза больше, чем величина $J(0) \approx 1{,}4$, соответствующая постоянной плотности. Таким образом, отметим, что эффективность сжатия можно значительно улучшить по сравнению со сжатием с однородным распределением массы по мишени, если обеспечить в момент максимального сжатия распределение плотности с показателем α_{**}. Последнее возможно в общем случае, если начальные данные соответствуют автомодельному решению. При наиболее простых — постоянных начальных данных, вероятно, можно ожидать асимптотического приближения к автомодельному решению в режиме схлопывающейся оболочки, если закон движения поршня соответствует этому решению. Основание для такого заключения дают результаты численного исследования известной задачи о схлопывании сферической полости, когда решение выходит на автомодельный режим независимо от начальных данных, которые могут изменяться в некоторых пределах. Существует, однако, возможность получить при $t = 0$ распределение плотности с показателем α_* и при сжатии сплошной мишени с постоянными начальными данными. В [1—3] рассмотрено автомодельное решение с показателем автомодельности $\delta = 1$, описывающее сжатие вещества в точку из однородного исходного состояния. Асимптотическое распределение газодинамических функций, возникающее при возмущении данного решения остановкой поршня, получено в [2]. Ниже будет показано, что существует целый класс течений, возмущение которых остановкой сжимающего поршня приводит в момент фокусировки к одному и тому же асимптотическому распределению параметров, совпадающему с распределением, полученным в [2]. Для этого рассмотрим изэнтропические течения, у которых характеристики, бегущие к центру, пересекаются в точке ($r = 0$, $t = 0$). Представив в окрестности начала координат семейство пересекающихся характеристик в виде $r = ct^{\delta}$, т. е. полагая, что выполняется соотношение $u = -a + \delta r/t$, получим в сумме с двумя уравнениями, описывающими изэнтропические течения, переопределенную систему для двух неизвестных функций u и a — скорости частицы и скорости звука. После несложных, но громоздких преобразований, которые здесь не приводятся, получим условие совместности этой системы

$$\delta = \frac{2}{3\gamma - 1} + \sqrt{3}\,\frac{\gamma - 1}{3\gamma - 1},\quad u \approx \frac{2}{3\gamma - 1}\,\frac{r}{t},\quad a \approx \sqrt{3}\,\frac{\gamma - 1}{3\gamma - 1}\,\frac{r}{t}, \tag{2}$$

т. е. все течения в области, где справедливо допущение $u = -a + \delta r/t$, асимптотически описываются одним и тем же решением: автомодельным решением, соответствующим особой точке B. Согласно этому решению, все вещество при $t = 0$ сжимается в точку, а плотность вдоль каждой характеристики при приближении к центру возрастает до бесконечности. Как показано в [5], при сжатии вещества в точку при $p \not\equiv 0$ необходимо затратить бесконечное количество энергии, т. е. при ограниченной энергии невозможно осуществить такие решения вплоть до момента фокусировки, поршень до этого времени должен неизбежно изменить закон движения, создавая этим волну разрежения, фронт которой движется к центру по одной из характеристик [2]. Но поскольку плотность вдоль характеристики возрастает неограниченно, при условии непрерывности движения распределение плотности вдоль радиуса при $t = 0$ будет иметь особенность в центре. Если это распределение представить степенной функцией, то, как указывалось выше, течение в окрестности центра будет автомодельным, а так как это решение должно вдоль характеристики сращиваться с решением (2), то тем самым однозначно определяется показатель автомодельности δ, который должен совпадать со значением δ из формул (2). Отсюда однозначно определяется асимптотика газодинамических функций при $t = 0$

$$(3)\quad u \sim a \sim r^{\mu(\gamma-1)},\ \rho \sim r^{2\mu},\ p \sim r^{2\mu\gamma},\ \mu = (\sqrt{3} - 3)/(2 + \sqrt{3}(\gamma - 1)).$$

Итак, все схемы сжатия, основанные на решениях со сходящимися к центру характеристиками, имеют при $t = 0$ одну и ту же асимптотику (3) независимо от конкретного вида решения, причем показатель степени при ρ совпадает с вычисленным ранее значением — α_*. Таким образом, для достижения при $t = 0$ распределения плотности с показателем α_* достаточно двигать поршень до его остановки по любому закону, обеспечивающему сжатие вещества в точку при сходящихся в центре характеристиках.

Из всех течений подобного типа, а к ним относятся, например, течения, описываемые некоторыми точными автомодельными решениями [1—3, 6], течения с однородной деформацией [4, 6], следует особо выделить автомодельное с показателем $\delta = 1$, изученное в [1—3], поскольку этому решению соответствуют постоянные начальные данные p_0, ρ_0, $u_0 = 0$. Отметим, что существуют и точные автомодельные решения, представляющие собой комбинацию двух разных решений, совпадающих вдоль некоторой характеристики. Первым составляющим решением, описывающим сжатие вещества в точку, будет решение, отвечающее особой точке B, а к любой его характеристике может примыкать другое решение, описываемое интегральной кривой, соединяющей в автомодельной плоскости узел $O(V = 0, z = 0)$ и особую точку B, которая при значении δ, удовлетворяющем условию (2), будет находиться на параболе $z = (V - \delta)^2$. Именно таким составным решением описывается в главном члене в окрестности начала координат любое из рассмотренных выше решений с бегущей к центру по одной из характеристик волной разрежения.

При исследовании функции $\langle\rho R\rangle$ на максимум полагалось, что в конечной стадии сжатия плотность распределена по степенному закону и при этом интегральная величина $\langle\rho R\rangle$ в основном определяется малой окрестностью центра, где плотность обращается в бесконечность, а периферийная часть мишени дает меньший вклад в интеграл, отнимая, может быть, значительную часть массы и энергии. Поэтому целесообразно исследовать поведение функции $\langle\rho R\rangle$, предполагая, что центральная часть описывается степенной функцией с одним показателем, а периферийная часть — с другим, отличным от первого, т. е. плотность описывается последовательно функциями $\rho = c_1/r^{\alpha_1}$, $\rho = c_2/r^{\alpha_2}$ с условием их равенства в некоторой точке r_1 при общем радиусе мишени r_2. Тогда, используя те же обозначения, что и выше, можно написать следующее выражение для функции $\langle\rho R\rangle$:

$$(4)\qquad \langle\rho R\rangle = (ES)^{2\beta} M^{\beta(\gamma-3)} (\gamma - 1)^{2\beta} (3/4\pi)^{1/3} J(\alpha_1, \alpha_2),\ \eta = r_2/r_1,$$

$$J(\alpha_1,\alpha_2) = \left[\frac{1}{1-\alpha_1} + \frac{1}{1-\alpha_2}(\eta^{1-\alpha_2} - 1)\right]\left[\frac{1}{3-\alpha_1} + \frac{1}{3-\alpha_2}(\eta^{3-\alpha_2} - 1)\right]^{(3-\gamma)\beta} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{3-\gamma\alpha_1} + \frac{1}{3-\gamma\alpha_2}(\eta^{3-\gamma\alpha_2} - 1)\right]^{-2\beta}$$

(выражение для $J(\alpha_1, \alpha_2)$ соответствующим образом корректируется при $\alpha_i = 1, 3/\gamma,\ 3$).

Заметим, что рассматриваемое распределение функции плотности можно получить, допуская слабый разрыв только на характеристике, бегущей от поршня в точку r_1. Для этого необходимо, чтобы производные функций u и a по обе стороны разрыва (индексы $+$ и $-$) были согласованы, например $u_r^+ - u_r^- = 2(a_r^+ - a_r^-)/(\gamma - 1)$, соответствующие соотношения должны выполняться и для высших производных. По найденным производным справа от разрыва может быть построен формальный ряд, соответствующий решению при $t < 0$, т. е. процессу сжатия, если до встречи характеристики с поршнем не образуется ударная волна. Учитывая приблизительность аппроксимации функции $\rho(r)$, не имеет смысла строго исследовать вопрос образования ударной волны, предполагая возможным при необходимости сгладить функции в малой окрестности точки r_1.

Анализ соотношений (4) показывает, что при $\alpha_2 > \alpha_1$ эффективность сжатия повышается, т. е. $J(\alpha_1, \alpha_2) > J(\alpha_1)$, но сжатие сплошной мишени по схеме, основанной на описанном выше решении с показателем автомодельности $\delta = 1$ при $\alpha_2 > \alpha_1$, невозможно, так как константа c_1 при этом должна превысить значение, допускаемое заданной энергией. Последнее легко показывается, так как решение в окрестности начала координат известно и описывается формулами (2), и, следовательно, улучшить подобным образом указанную схему нельзя. При схлопывании полой мишени константа c_1 может быть увеличена при той же общей вложенной энергии, так как эта энергия почти полностью может быть израсходована на работу поршня к моменту пересечения траектории поршня и особой характеристики, бегущей в центр. После остановки поршня волна разрежения вызовет распределение плотности в периферийной части мишени с $\alpha_2 > \alpha_1$, таким образом, эффективность сжатия полой мишени повысится.

Поступила 10 IX 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Забабахин И. Е., Симоненко В. А.** Сферическая центрированная волна сжатия.— Изв. АН СССР. ПММ, 1978, т. 42, № 3.
2. **Каждан Я. М.** К вопросу об адиабатическом сжатии под действием сферического поршня.— ПМТФ, 1977, № 1.
3. **Анисимов С. И., Иванов М. Ф., Иногамов Н. А.** Динамика лазерного сжатия и нагревания простых мишеней. Черноголовка, 1977.
4. **Kidder R. E.** Theory of homogeneous isentropic compression and its application to laser fusion.— Nuclear fusion, 1974, vol. 14, N 1.
5. **Свалов А. М.** К вопросу о сжатии сферических мишеней.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 3.
6. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972.
7. **Брушлинский К. В., Каждан Я. М.** Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики.— УМН, 1963, т. 18, вып. 2(110).

УДК 534.222.2 + 532.529

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВЗРЫВА НА СПЛОШНУЮ СРЕДУ

Г. А. Алексеев, В. П. Коробейников, В. В. Марков, В. И. Хрипунов, К. Б. Шерстнев

(*Москва*)

В связи с вопросами преобразования энергии взрыва в электрическую или механическую возникает следующая задача. Имеется плазменный шарик радиуса r_*, который характеризуется параметрами p_0, ρ_0, T_0, и при $t = 0$ из этого шарика происходит мгновенный вылет фотонов и микрочастиц с большими скоростями, а также начинается расширение его в сферическую каверну, пространство вне которой заполнено сплошной средой с параметрами p_1, ρ_1, T_1 (фиг. 1). Окружающую среду можно считать конденсированной и изучать ее в предположении гидродинамического описания. Будем также предполагать, что окружающая среда эффективно поглощает энергию частиц, образующихся при взрыве, так что основная часть энергии взрыва передается среде в некоторой окрестности центра выделения энергии. Для определения параметров возникающего движения необходимо составить математическую модель изучаемого течения, т. е. написать уравнения движения сплошной среды, взаимодействующей с частицами и со световым излучением, а также указать начальные и граничные условия.

В данной работе представлена математическая модель отмеченных явлений и рассмотрен взрыв в полости, окруженной водой.