

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ВБЛИЗИ ПЕРЕДНЕЙ КРОМКИ ПРОФИЛЯ В МЕТОДЕ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

УДК 518.12:533.6

Д. Н. Горелов

Институт информационных технологий и прикладной математики СО РАН,
644077 Омск

Решение задач обтекания профиля методом дискретных вихрей определяет суммарные интенсивности вихревого слоя на конечном числе элементов. Расчет распределения давления по профилю и суммарных гидродинамических реакций требует построения аппроксимирующей функции для интенсивности вихревого слоя по заданным значениям дискретных вихрей. Обычно выбирают кусочно-постоянную функцию. Такая аппроксимация дает хорошие результаты для внутренних точек контура, но оказывается практически неприемлемой вблизи передней кромки, особенно для тонких профилей.

В настоящей работе по значениям двух дискретных вихрей построена аппроксимирующая функция для интенсивности вихревого слоя вблизи передней кромки профиля с учетом ее формы. Приведены формулы для расчета распределения давления и суммарных гидродинамических реакций. Показано, что в предельном случае бесконечно тонкого профиля предлагаемая аппроксимация позволяет точно определять подсосывающую силу.

1. Рассмотрим задачу стационарного обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой жидкости в декартовой системе координат Oxy . Пусть контуры L_1, L_2 являются верхней и нижней сторонами профиля. Моделируем эти контуры вихревыми слоями с интенсивностями $\gamma_1(\sigma_1), \gamma_2(\sigma_2)$ (σ_1, σ_2 — дуговые координаты точек на L_1, L_2). Следуя методу дискретных вихрей, разобьем контуры L_1, L_2 на N элементов $[\zeta_{m-1}^{(r)}, \zeta_m^{(r)}] \in L_r$ ($r = 1, 2, m = 1, \dots, N$), где $\zeta_{m-1}^{(r)}, \zeta_m^{(r)}$ — комплексные координаты концов m -го элемента. Суммарная интенсивность вихревого слоя на $[\zeta_{m-1}^{(r)}, \zeta_m^{(r)}]$ определяет интенсивность дискретного вихря $\Gamma_m^{(r)}$, расположенного в точке $z_m^{(r)}$ этого элемента. Пусть элементы с номером $m = 1$ примыкают к передней кромке, а с номером $m = N$ — к задней.

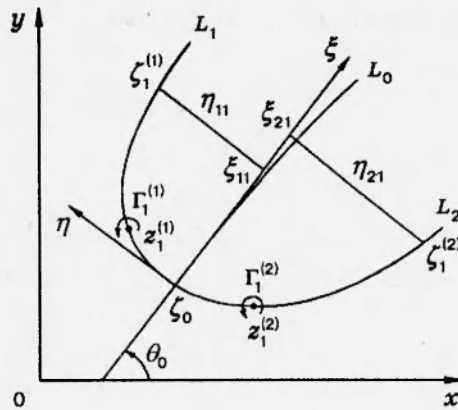
Предположим, что $\Gamma_m^{(r)}$ известны. Построим аппроксимирующие функции для $\gamma_r(\sigma_r)$ на элементах $[\zeta_0^{(r)}, \zeta_1^{(r)}]$ через заданные значения $\Gamma_1^{(r)}$ ($r = 1, 2$) с учетом формы профиля и характера изменения вдоль него скорости жидкости.

Прежде всего составим достаточно общее уравнение контура профиля в малой окрестности передней кромки. Введем систему координат $O\xi\eta$ с началом в передней кромке, направляя ось ξ вдоль касательной к средней линии L_0 контура профиля (см. рисунок). Пусть ξ_{r1}, η_{r1} — координаты конца первого элемента на $L_r, r = 1, 2$. Будем задавать контур L_r в точках этого элемента уравнением

$$\eta_r = (-1)^{r-1} a_r \sqrt{\xi}, \quad a_r = |\eta_{r1}| / \sqrt{\xi_{r1}}, \quad \xi \in [0, \xi_{r1}], \quad r = 1, 2. \quad (1.1)$$

Каждая кривая (1.1) проходит через две заданные точки $(0, 0), (\xi_{r1}, \eta_{r1})$ контура L_r и удовлетворяет условию обращения в бесконечность производной

$$\eta'_r = (-1)^{r-1} a_r / (2\sqrt{\xi}) \quad (1.2)$$



при $\eta_{r1} \neq 0$ в передней кромке. Тестовый расчет показал высокую точность формулы (1.1) при $N \gg 1$ для всех профилей Жуковского (от пластинки до окружности).

Перейдем теперь к построению аппроксимирующей функции для интенсивности вихревого слоя $\gamma_r(\sigma_r)$, которая лишь знаком отличается от касательной составляющей скорости. Отметим, что для профилей с округленной передней кромкой скорость жидкости вдоль нее меняется достаточно плавно, а для тонких профилей наблюдается рост градиента скорости по мере приближения к передней кромке. В предельном случае бесконечно тонкого профиля скорость вблизи передней кромки меняется по закону $1/\sqrt{\xi}$. С учетом такого характера изменения скорости будем аппроксимировать $\gamma_r(\sigma_r)$ в окрестности передней кромки профиля (на элементах $[\zeta_0^{(r)}, \zeta_1^{(r)}]$) функцией

$$\gamma_r(\sigma_r) = B_r + \frac{A_r}{\sqrt{\xi} \sqrt{1 + (\eta_r')^2}}, \quad \xi \in [0, \xi_{r1}], \quad r = 1, 2, \quad (1.3)$$

$$A_r = \frac{\Delta_1^{(r)}}{4\sqrt{\xi_{r1}}} \left[\frac{\Gamma_1^{(1)}}{\Delta_1^{(1)}} + \frac{\Gamma_1^{(2)}}{\Delta_1^{(2)}} \right], \quad B_r = \frac{1}{2} (-1)^{r-1} \left[\frac{\Gamma_1^{(1)}}{\Delta_1^{(1)}} - \frac{\Gamma_1^{(2)}}{\Delta_1^{(2)}} \right].$$

Здесь $\Delta_1^{(r)}$ — длина элемента $[\zeta_0^{(r)}, \zeta_1^{(r)}]$; A_r, B_r — постоянные, определяемые через дискретные вихри $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_1^{(2)}$, расположенные на первых элементах контуров L_1, L_2 (см. рисунок).

Выражения (1.1), (1.2) позволяют записать (1.3) как

$$\gamma_r(\sigma_r) = B_r + \frac{2A_r\sqrt{\xi_{r1}}}{\sqrt{4\xi\xi_{r1} + \eta_{r1}^2}}. \quad (1.4)$$

Из (1.4) видно, что для достаточно толстых профилей ($|\eta_{r1}|/\xi_{r1} \sim 1$) на распределение скорости одинаково влияют оба слагаемых, тогда как для тонких профилей ($|\eta_{r1}|/\xi_{r1} \ll 1$) основным будет второе. В предельном случае $|\eta_{r1}| = 0$, когда профиль совпадает с дужкой L_0 ,

$$\gamma_r(\sigma_r) = A_r/\sqrt{\xi} + \dots, \quad \xi \in [0, \xi_{r1}], \quad r = 1, 2.$$

При этом L_0 моделируется двумя вихревыми слоями, интенсивности которых γ_1, γ_2 определяются (с точностью до знака) предельными значениями касательных составляющих скоростей. При моделировании L_0 одним вихревым слоем, как обычно принято в те-

ории тонкого крыла [1], интенсивность вихревого слоя $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ и в малой окрестности передней кромки

$$\gamma(\xi) = A/\sqrt{\xi}, \quad A = A_1 + A_2. \quad (1.5)$$

На этом построение аппроксимирующей функции для $\gamma_r(\sigma_r)$ вблизи передней кромки профиля можно считать законченным.

Для элементов вихревых слоев на L_1, L_2 вне передней кромки можно применять, как показал численный эксперимент, кусочно-постоянное распределение интенсивности $\gamma_r(\sigma_r)$. В этом случае

$$\gamma_r(\sigma_r) = \Gamma_m^{(r)}/\Delta_m^{(r)}; \quad \Delta_m^{(r)} = |\zeta_{m-1}^{(r)} - \zeta_m^{(r)}|, \quad r = 1, 2, \quad m = 2, \dots, N. \quad (1.6)$$

2. Перейдем к выводу формул для расчета гидродинамического давления p и суммарных гидродинамических сил R_x, R_y , действующих на контур профиля $L = L_1 + L_2$.

В стационарном потоке несжимаемой жидкости гидродинамическое давление связано с вектором скорости \mathbf{v} интегралом Бернулли

$$p - p_\infty = -\frac{1}{2}\rho(v^2 - v_\infty^2)$$

(ρ — плотность жидкости, $v = |\mathbf{v}|$).

В точках контура профиля

$$v = |\gamma_r|, \quad p - p_\infty = -\frac{1}{2}\rho(\gamma_r^2 - v_\infty^2), \quad (x, y) \in L_r, \quad r = 1, 2. \quad (2.1)$$

Здесь $\gamma_r(\sigma_r)$ определяется через заданные значения дискретных вихрей с помощью аппроксимационных функций (1.3), (1.6).

Суммарные гидродинамические силы вычисляются по формуле

$$R_x - iR_y = i \int_L (p - p_\infty) e^{-i\theta} d\sigma, \quad (2.2)$$

где θ — угол наклона касательной к контуру L , отсчитываемый от оси x против часовой стрелки, а интегрирование по контуру L производится по часовой стрелке. Представим (2.2) в виде

$$R_x - iR_y = \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^N (\Delta R_{xm}^{(r)} - i\Delta R_{ym}^{(r)}) \quad (2.3)$$

($\Delta R_{xm}^{(r)}, \Delta R_{ym}^{(r)}$ — гидродинамические силы, действующие на m -й элемент контура L_r). Из (1.6), (2.1)–(2.3) следует, что для элементов контура вне передней кромки ($m = 2, \dots, N$)

$$\Delta R_{xm}^{(r)} - i\Delta R_{ym}^{(r)} = -\frac{i}{2}\rho\Delta_m^{(r)} \left[\left(\frac{\Gamma_m^{(r)}}{\Delta_m^{(r)}} \right)^2 - v_\infty^2 \right] e^{-i\theta_m^{(r)}} \quad (2.4)$$

($\theta_m^{(r)}$ — угол θ в точке $z_m^{(r)}$ или в контрольной точке на соответствующем элементе).

На элементах с номером $m = 1$, примыкающих к передней кромке, интенсивность вихревого слоя задается аппроксимирующей функцией (1.3), а контур профиля — выражением (1.1). Поэтому при $m = 1$

$$\Delta R_{x1}^{(r)} - i\Delta R_{y1}^{(r)} = (\Delta R_{\xi 1}^{(r)} - i\Delta R_{\eta 1}^{(r)}) e^{-i\theta_0}, \quad (2.5)$$

$$\Delta R_{\xi_1}^{(r)} - i\Delta R_{\eta_1}^{(r)} = \frac{1}{2}(-1)^r \int_0^{\xi_{r1}} \left\{ \left[B_r + \frac{A_r}{\sqrt{\xi} \sqrt{1 + (\eta'_r)^2}} \right]^2 - v_\infty^2 \right\} (\eta'_r + i) d\xi.$$

Вычисляя интегралы, получим

$$\Delta R_{\xi_1}^{(r)} = \frac{1}{2}\rho \left[-|\eta_{r1}|(B_r^2 - v_\infty^2) - 8\beta_r \sqrt{\xi_{r1}} A_r B_r \ln \frac{\sqrt{1 + \beta_r^2} + 1}{\sqrt{1 + \beta_r^2} - 1} - 2A_r^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\beta_r} \right]; \quad (2.6)$$

$$\Delta R_{\eta_1}^{(r)} = -\frac{1}{2}\rho(-1)^r \left\{ 4\sqrt{\xi_{r1}} A_r B_r \left[\sqrt{1 + \beta_r^2} - \beta_r \right] + A_r^2 \ln \frac{1 + \beta_r^2}{\beta_r^2} + (B_r^2 - v_\infty^2) \xi_{r1} \right\} \quad (2.7)$$

($\beta_r = |\eta_{r1}|/(2\xi_{r1})$).

Что касается момента гидродинамических сил относительно оси, проходящей через какую-либо точку, то он вычисляется через распределенные силы $\Delta R_{xm}^{(r)}$, $\Delta R_{ym}^{(r)}$. В частности, момент относительно начала координат

$$M = \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^N (\Delta R_{ym}^{(r)} x_m^{(r)} - \Delta R_{xm}^{(r)} y_m^{(r)}).$$

Здесь $x_m^{(r)}$, $y_m^{(r)}$ — координаты дискретного вихря $\Gamma_m^{(r)}$ (в предположении, что силы $\Delta R_{xm}^{(r)}$, $\Delta R_{ym}^{(r)}$ приложены к $\Gamma_m^{(r)}$).

Формулы (2.3)–(2.7) применимы для расчета гидродинамических сил, действующих на профили любой толщины. Покажем, что в предельном случае бесконечно тонкого профиля полученные результаты полностью соответствуют теории тонкого крыла [1].

Пусть $|\eta_{r1}| \rightarrow 0$. Тогда контур L переходит в дужку L_0 , угол $\theta_m^{(2)} = \theta_m^{(1)} + \pi$; при этом L_0 моделируется двумя вихревыми слоями γ_1, γ_2 . В теории тонкого крыла, как отмечалось, L_0 моделируется одним вихревым слоем $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Пусть Δ_m — длины элементов этого слоя, а $\Delta_m^{(1)} = \Delta_m^{(2)} = \Delta_m$ ($m = 1, \dots, N$). Из (2.4) следует, что на каждый элемент дужки L_0 действует сила

$$\Delta R_m = \frac{1}{2}\rho \Delta_m [(\Gamma_m^{(1)}/\Delta_m)^2 - (\Gamma_m^{(2)}/\Delta_m)^2], \quad m = 2, \dots, N, \quad (2.8)$$

направленная по нормали к этому элементу. Обозначим

$$v_0 = (v_\sigma^+ + v_\sigma^-)/2, \quad \gamma = v_\sigma^- - v_\sigma^+,$$

где v_σ^+ , v_σ^- — предельные значения касательной составляющей скорости жидкости при подходе к L_0 сверху и снизу. В рамках аппроксимации (1.6) на m -м элементе

$$\begin{aligned} v_\sigma^+ &= -\Gamma_m^{(1)}/\Delta_m, & v_\sigma^- &= \Gamma_m^{(2)}/\Delta_m, \\ v_0 &= (\Gamma_m^{(2)} - \Gamma_m^{(1)})/(2\Delta_m), & \gamma &= (\Gamma_m^{(1)} + \Gamma_m^{(2)})/\Delta_m. \end{aligned} \quad (2.9)$$

С учетом (2.9) формула (2.8) принимает вид теоремы Жуковского «в малом»

$$\Delta R_m/\Delta_{r1} = -\rho v_0 \gamma, \quad m = 2, \dots, N.$$

Рассмотрим гидродинамические силы, действующие на первый элемент дужки L_0 . Согласно теории тонкого крыла, на этот элемент действуют две силы. Одна из них направлена по нормали и определяется теоремой Жуковского «в малом», другая, которую

называют подсасывающей, приложена к передней кромке и направлена по касательной к L_0 . При изменении интенсивности вихревого слоя вблизи передней кромки L_0 по закону (1.5) подсасывающая сила

$$Q = -\pi\rho A^2/4. \quad (2.10)$$

Выясним, какой вид принимают формулы (2.6), (2.7) в предельном случае бесконечно тонкого профиля. Отметим, что силы $\Delta R_{\xi 1}^{(r)}$ ($r = 1, 2$) направлены по касательной к L_0 в передней кромке, а $\Delta R_{\eta 1}^{(r)}$ — по нормали. При $|\eta_{r1}| \rightarrow 0$ коэффициент $\beta_r \rightarrow 0$ и (2.6) принимает вид

$$\Delta R_{\xi 1}^{(r)} = -\pi\rho A_r^2/2, \quad r = 1, 2.$$

Суммарная сила, действующая на первый элемент дужки L_0 в направлении касательной,

$$\Delta R_{\xi 1} = \Delta R_{\xi 1}^{(1)} + \Delta R_{\xi 1}^{(2)} = -\frac{\pi}{2}\rho(A_1^2 + A_2^2).$$

Выражая A_1, A_2 с помощью (1.3) через интенсивности дискретных вихрей $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_1^{(2)}$, получим

$$\Delta R_{\xi 1} = -\frac{\pi}{16}\rho \frac{(\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)})^2}{\Delta_1}. \quad (2.11)$$

Формула (2.11) полностью соответствует (2.10). Действительно, по определению

$$\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)} = \int_0^{\Delta_1} \gamma(\xi) d\xi = 2\sqrt{\Delta_1}A.$$

Отсюда

$$A = (\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)})/(2\sqrt{\Delta_1}),$$

что приводит к совпадению (2.10) и (2.11). Аналогично, применяя (2.7) к расчету нормальной силы $\Delta R_{\eta 1} = \Delta R_{\eta 1}^{(1)} + \Delta R_{\eta 1}^{(2)}$, действующей на первый элемент L_0 , придем к (2.8).

Таким образом, в предельном случае бесконечно тонкого профиля формулы (2.4)–(2.7), построенные на основе аппроксимирующих функций (1.1)–(1.3), полностью соответствуют результатам теории тонкого крыла.

Разработанный алгоритм был апробирован при решении задачи о движении профиля вблизи экрана [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. Горелов Д. Н., Горлов С. И. Движение профиля вблизи плоского экрана // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 47–52.

Поступила в редакцию 28/XI 1994 г.,
в окончательном варианте — 4/I 1995 г.