

ОБ УСЛОВИЯХ КОНЕЧНОСТИ СКОРОСТИ СИГНАЛА В РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Хорошо известно, что при нестационарных режимах фильтрации жидкости и газа могут играть роль релаксационные эффекты во взаимодействии между скелетом породы и насыщающим флюидом [1—3]. Для волновых процессов зависимость проницаемости от частоты неоднократно рассматривалась в литературе после появления работ [4, 5]. В [6] исследовался вопрос о конечности скорости распространения сигнала в линейно-упругой пористой среде, насыщенной сжимаемым флюидом. Однако в [6] принято довольно сильное предположение об ограниченности релаксационного ядра при малых временах, хотя и указано, что существуют примеры, когда это условие не выполняется.

В настоящей работе вопрос о конечности скорости сигнала проанализирован для случая, когда релаксационное ядро при малых временах может иметь особенности.

Итак, рассмотрим однородную изотропную линейно-упругую пористую среду, насыщенную сжимаемым флюидом. При описании возможных динамических процессов будем следовать обозначениям работ [6, 7]: ρ_1 — плотность твердой фазы, ρ_2 — плотность жидкой фазы, m — пористость, l_i — вектор перемещений твердой фазы, w_i — средняя скорость частиц жидкой фазы, σ_{ij} — тензор напряжений в твердой фазе, p — давление в жидкой фазе. Латинские индексы пробегает значения 1, 2, 3, соответствия координатам некоторой декартовой системы $Ox^1x^2x^3$, по повторяющимся индексам производится суммирование, t — время. Все процессы предполагаются изотермическими.

В линейно-упругой постановке справедливо соотношение

$$(1) \quad \sigma_{ij} = \lambda_1 e \delta_{ij} + 2\lambda_2 e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial l_i}{\partial x^j} + \frac{\partial l_j}{\partial x^i} \right), \quad e = e_{ij},$$

где λ_α — коэффициенты Ламе. Пусть R_i — сила взаимодействия между жидкой и твердой фазами. Примем для нее выражение релаксационной теории [6]:

$$(2) \quad R_i \Big|_{t_0} = \frac{\mu m^2}{k} \int_{-\infty}^{t_0} K(t_0 - t) \left(w_i - \frac{\partial l_i}{\partial t} \right) \Big|_t dt.$$

Здесь μ — сдвиговая вязкость; k — проницаемость; $K = K(t)$ — релаксационное ядро, нормированное таким образом, что

$$(3) \quad \int_0^{+\infty} K(t) dt = 1.$$

Исследуем распространение слабых возмущений в данной двухфазной среде. Величины, относящиеся к невозмущенному состоянию, будем помечать индексом 0. Пусть $\rho_\alpha' = \rho_\alpha - \rho_{\alpha 0}$ ($\alpha = 1, 2$) — возмущения полей плотности. Примем линейные выражения для давления и пористости: $p = p_0 + c^2 \rho_2'$, $m = m_0 + a_2 \rho_2' - a_1 \rho_1'$, c — изотермическая скорость звука.

Динамические уравнения для возмущений в отсутствие источников с учетом (1), (2) имеют вид

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1' - \alpha_2 \rho_2') + \frac{\partial^2 l_i}{\partial t \partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (-\beta_1 \rho_1' + \beta_2 \rho_2') + \frac{\partial w_i}{\partial x^i} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (-\zeta_1 \rho_1^i + \zeta_2 \rho_2^i) + \left(\frac{\partial^2 l_i}{\partial t^2} - \eta_1 \frac{\partial^2 l_j}{\partial x^i \partial x^j} - \eta_2 \Delta l_i - \nu K * \frac{\partial l_i}{\partial t} \right) - \nu K * w_i = 0,$$

$$\gamma \frac{\partial \rho_2^i}{\partial x^i} - \delta K * \frac{\partial l_i}{\partial t} + \delta K * w_i + \frac{\partial w_i}{\partial t} = 0.$$

Когда присутствуют источники, в правые части уравнений (4) нужно ввести соответствующие члены. В системе уравнений (4) использованы следующие обозначения [6]: * — операция свертки по времени;

$$\alpha_1 = \rho_{10}^{-1} + a_1 (1 - m_0)^{-1}; \quad \alpha_2 = a_2 (1 - m_0)^{-1};$$

$$\beta_1 = a_1 m_0^{-1}; \quad \beta_2 = \rho_{20}^{-1} + a_2 m_0^{-1}; \quad \eta_1 = (\lambda_{10} + \lambda_{20}) \rho_{10}^{-1}; \quad \eta_2 = \lambda_{20} \rho_{10}^{-1};$$

$$\zeta_1 = p_0 a_1 (1 - m_0)^{-1} \rho_{10}^{-1}; \quad \zeta_2 = p_0 a_2 (1 - m_0)^{-1} \rho_{20}^{-1};$$

$$\nu = m_0^2 \mu_0 (1 - m_0)^{-1} k_0^{-1} \rho_{10}^{-1}; \quad \gamma = c^2 \rho_{20}^{-1}; \quad \delta = m_0 \mu_0 k_0^{-1} \rho_{20}^{-1}.$$

Напомним свойства фурье-образа ядра $K = \bar{K}(\omega)$ [6] ($\bar{K} = \bar{K}(\omega)$ — комплексная функция, голоморфная в нижней комплексной плоскости). В соответствии с (3) $\bar{K}(0) = 1$. Кроме того, для действительных значений ω выполняется термодинамическое неравенство

$$(5) \quad \operatorname{Re} \bar{K}(\omega) > 0.$$

Рассмотрим поведение $\bar{K}(\omega)$ при $|\omega| \rightarrow +\infty$, $\operatorname{Im} \omega \leq 0$. В [6] была принята асимптотика

$$(6) \quad \bar{K}(\omega) = K(0) (i\omega)^{-1} + O(|\omega|^{-1}),$$

соответствующая случаю, когда $K(t)$ при $t \geq 0$ — гладкая функция. Теперь рассмотрим более широкий класс асимптотик

$$(7) \quad \bar{K}(\omega) = \kappa (i\omega)^\varepsilon + O(|\omega|^\varepsilon).$$

Здесь κ , ε — действительные числа; $\kappa > 0$; $-1 \leq \varepsilon \leq 1$. Класс асимптотик (7) совместим с (5) и включает (6) как частный случай. Кроме того, он охватывает известные точные решения для сил сопротивления, которые действуют на тела, движущиеся в линейно-вязкой жидкости с переменной скоростью [6]. Поскольку асимптотика $\bar{K}(\omega)$ при высоких частотах определяется асимптотикой $K(t)$ при малых временах, то выражение (7) означает, что операцию свертки с релаксационным ядром можно представить в виде

$$K * = \kappa_{-\infty} D^\varepsilon + z,$$

где первый член есть дробная производная по времени [8], а z — псевдодифференциальный оператор более высокого порядка гладкости.

Из (5), (7) вытекает, что неравенство (5) выполняется во всей нижней комплексной полуплоскости.

Рассмотрим теперь распространение возмущений от некоторого источника массы или силы, действующего в момент времени $t = 0$ в начале координат.

Сосредоточим свое внимание на возмущениях в точке пространства $x'_0 = L \delta'_1$, $L > 0$. Следуя методике [6], легко получить выражение для фурье-образов возмущений полей плотности, скорости, перемещений:

$$(8) \quad y(\omega) = 2\pi i \sum_{\alpha=1}^3 \operatorname{Res}_{n_\alpha(\omega)} \left[\frac{e^{nL} N(\omega, n) q}{P_1^2(\omega, n) P_2(\omega, n)} \right].$$

Здесь $n_\alpha = n_\alpha(\omega)$; $\alpha = 1, 2, 3$ — корни уравнений

$$(9) \quad P_1 = 0;$$

$$(10) \quad P_2 = 0,$$

удовлетворяющие неравенствам $\text{Im } n_\alpha > 0$; P_1, P_2 — полиномы от комплексной переменной n :

$$\begin{aligned} P_1 &= (-\omega + i\delta\tilde{K})n^2 + \eta_2^{-1}\omega^2(\omega - i(\nu + \delta)\tilde{K}), \\ P_2 &= An^4 + (-\omega^2B + i\omega C\tilde{K})n^2 + i\omega^4 - i\omega^3D\tilde{K}, \\ A &= C_1C_4 - C_2C_3, \quad B = C_1 + C_2, \quad C = \nu(C_1 + C_4) + \delta(C_2 + C_3), \quad D = \nu + \delta, \\ C_1 &= \eta_1 + \eta_2 + (\beta_1\zeta_2 - \beta_2\zeta_1)/(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1), \\ C_2 &= (\alpha_1\zeta_2 - \alpha_2\zeta_1)/(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1), \\ C_3 &= \gamma\beta_1/(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1), \quad C_4 = \gamma\alpha_1/(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1). \end{aligned}$$

В выражении (8) $N(\omega, n)$ — матрица, голоморфно зависящая от ω при $\text{Im } \omega < 0$ и полиномиально зависящая от параметра n ; q — постоянный вектор.

Центральным моментом при вычислении скорости распространения возмущений является доказательство того, что при изменении ω в нижней комплексной полуплоскости величины $n_\alpha(\omega)$ никогда не пересекают действительную ось, т. е. они голоморфно отображают нижнюю комплексную полуплоскость в верхнюю. Если это доказать, то скорости V_α возмущений для различных мод получаются по формуле [6]

$$(11) \quad V_\alpha = \left(\lim_{\substack{|\omega| \rightarrow +\infty \\ \text{Im } \omega < 0}} (\text{Im } n_\alpha(\omega)/(-\text{Im } \omega)) \right),$$

которая является стандартной для задач подобного рода [9, 10]. Итак, докажем, что уравнения (9), (10) относительно n не имеют действительных решений при $\text{Im } \omega < 0$. Как легко видеть, для этого достаточно доказать, что для действительных n функции параметра ω

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= K + i\omega(\omega^2 - \eta_2 n^2)((\nu + \delta)\omega^2 - \delta\eta_2 n^2)^{-1}, \\ X_2(\omega) &= \tilde{K} + i\omega^{-1}(An^4 - Bn^2\omega^2 + \omega^4)(D\omega^2 - Cn^2)^{-1} \end{aligned}$$

не обращаются в нуль при $\text{Im } \omega < 0$. Пусть $n > 0$. Тогда на контуре Γ (см. рисунок, $\omega_0 = n(\delta\eta_2)^{1/2}(\nu + \delta)^{-1/2}$), охватывающем нижнюю комплексную полуплоскость, вследствие (5) и (7) выполняется неравенство

$$\text{Re } X_1(\omega) > 0.$$

Поскольку функция $X_1(\omega)$ голоморфна в нижней комплексной полуплоскости, то это неравенство выполняется при всех ω , $\text{Im } \omega < 0$. Если теперь рассмотреть функцию $X_2(\omega)$, то на контуре Γ (см. рисунок, $\omega_0 = n(C/D)^{1/2}$) выполняется неравенство

$$(12) \quad \text{Re } X_2(\omega) > 0$$

при дополнительном условии

$$(13) \quad AD^2 - BDC + C^2 < 0.$$

В силу голоморфности неравенство (12) выполняется при всех ω , $\text{Im } \omega < 0$.

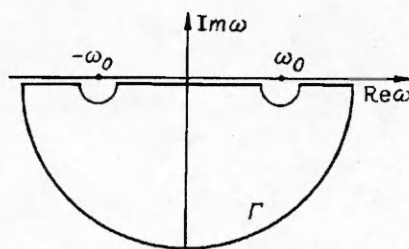
Заметим, что неравенство (13) не слишком ограничительно. Так, на практике обычно можно считать, что $a_2 = 0$ (откуда $C_2 = 0$), δ и ν — величины одного порядка, а C_1 значительно превышает C_3, C_4 . Эти условия достаточны для справедливости неравенства (13).

Таким образом, можно использовать формулу (11). Учитывая (7), получаем результат, обобщающий выводы [6]:

$$\begin{aligned} V_1 &= \begin{cases} \eta_2^{1/2}, & \epsilon < 1, \\ \eta_2^{1/2}(1 + \delta\kappa)^{1/2}(1 + \kappa(\delta + \nu))^{-1/2}, & \epsilon = 1, \end{cases} \\ V_{2,3} &= \begin{cases} 2^{1/2}(B \pm (B^2 - 4A)^{1/2})^{1/2}, & \epsilon < 1, \\ 2^{-1/2}(1 + \kappa D)^{-1/2}(B - \kappa C \pm ((B - \kappa C)^2 - 4A(1 + \kappa D))^{1/2})^{1/2}, & \epsilon = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь V_1 — предельная скорость распространения поперечных возмущений; V_2 и V_3 — предельные скорости распространения возмущений первого и второго типа соответственно (по поводу терминологии см. [7]).

Видно, что при условиях (7), (13) скорость сигнала в релаксационной фильтрации оказывается конечной. Возможны ситуации ($\epsilon = 1$), когда внутренние релаксационные процессы в системе пористая среда — насыщающий флюид влияют на предельную скорость распространения возмущений. Это существенно дополняет результаты [6].



ЛИТЕРАТУРА

1. Молокович Ю. М., Непримеров Н. Н., Пикуза В. И., Шманин А. В. Релаксационная фильтрация. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.
2. Молокович Ю. М., Осипов П. П. Основы теории релаксационной фильтрации. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987.
3. Динариев О. Ю., Николаев О. В. Об обобщении закона Дарси для нестационарных режимов фильтрации // ДАН СССР. — 1990. — Т. 313, № 1. — С. 31—36.
4. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-Frequency // J. Acoust. Soc. Amer. — 1956. — V. 28, N 2. — P. 168—178.
5. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher Frequency Range // Ibid. — P. 179—191.
6. Динариев О. Ю., Леонтьев И. А. Волны в насыщенных пористых средах с внутренними релаксационными процессами // Акуст. журн. — 1991. — Т. 37, вып. 1. — С. 84—90.
7. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. — М.: Недра, 1970.
8. Ross B. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus // Lecture Notes in Mathematics. — 1975. — V. 457. — P. 1—36.
9. Динариев О. Ю. О скорости распространения волн для процессов переноса с релаксацией // ДАН СССР. — 1988. — Т. 301, № 5. — С. 1095—1097.
10. Динариев О. Ю. О скорости распространения сигнала в жидкости с релаксацией // ПММ. — 1990. — Т. 54, вып. 1. — С. 59—64.

г. Москва

Поступила 21/V 1992 г.,
в окончательном варианте — 4/III 1993 г.

УДК 532.546

В. Е. Донцов, В. А. Маслов

СТРУКТУРА И ДИНАМИКА «МЕДЛЕННОЙ» ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ, НАСЫЩЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

В [1] была получена система линейных уравнений для трехфазной смеси (пористая среда, жидкость, пузырьки газа), учитывающая дисперсионные эффекты вследствие колебаний пузырьков в волне. Для волн конечной амплитуды в [2] приведена система уравнений, учитывающая нелинейность, вносимую колебаниями пузырьков газа, и вязкое затухание, обусловленное радиальным движением жидкости в пористой среде около осциллирующих пузырьков. В [3] получены эволюционные уравнения для «быстрой» и «медленной» волн в пористой среде, насыщенной жидкостью с пузырьками газа, и экспериментально исследованы эволюция и структура «быстрой» волны давления.

© В. Е. Донцов, В. А. Маслов, 1994