

С увеличением расхода жидкости ($Re > 20$) наблюдалось совпадение максимальной толщины для метода электропроводности и киносъемки до $Re = 45$, в то время как замеренная иглой толщина резко возрастала, а замеренная датчиком — слабо. Это связано с тем, что при тарировке не учитывался волновой характер пленки. Скоростная киносъемка дала величину δ_{max} несколько ниже, чем величина δ_{max} , измеренная методом иглы. Это можно объяснить тем, что с увеличением Re возникают трудности в получении четкого снимка профиля пленки. Несколько большее значение толщины пленки в гребне волны, измеренной иглой, можно объяснить наличием около поверхности пленки слоя воздуха, насыщенного парами воды, и замыканием измерительной схемы через этот слой.

На фиг. 2 дано сопоставление изменения максимальной частоты следования волн при изменении Re . Из приведенных данных следует, что при всех рассмотренных режимах имеет место совпадение частот, полученных этими методами. При всех исследованных расходах поверхность пленки не была гладкой. С увеличением Re наблюдалось возрастание частоты следования волн.

Частота волн в зависимости от положения конца иглы над пленкой для разных расходов жидкости приведена на фиг. 3. Подсчет частоты волн по осциллограмме и сравнение точек с одинаковой частотой по высоте осциллограммы с данными кривыми позволили сопоставить толщины пленки, замеренные методами иглы и электропроводности.

Таким образом, при толщине пленки до 0.5 мм с достаточной степенью точности можно применить метод электропроводности с датчиками указанных размеров. При большей толщине лучшие результаты дают метод иглы и скоростная киносъемка.

Поступила 26 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пермяков В. В., Зозуля Ю. М., Карастелев Б. Я., Банков В. К.* Методы определения толщины пленки. Материалы научн.-техн. конф. «Вопросы теории и практики судовых энергетических установок». Владивосток, 1971.
2. *Карастелев Б. Я., Зозуля Ю. М., Пермяков В. В., Банков В. К.* Экспериментальные установки для исследования пленок жидкости. Тр. Дальневост. политехн. ин-та, 1972, т. 80.
3. *Пермяков В. В., Подсушный А. М.* Течение пленки жидкости под действием газового потока в горизонтальной трубе. Изв. вузов, Энергетика, 1970, № 9, стр. 85—89.
4. *Яблоник Р. М., Лебедев О. Т., Хаимов В. А., Белодедов В. И.* Разработка электронных приборов для измерения локальных параметров пленочного течения. Тр. ЦКТИ, 1970, вып. 99, стр. 45—54.

УДК 536.2.01

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ РЯДОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

И. А. Иоффе

(Ленинград)

Рассмотрена задача нестационарной теплопроводности для полупространства, в котором расположен бесконечный ряд цилиндрических источников тепла, при граничном условии первого рода на поверхностях. Принято допущение о малости радиуса источников по сравнению с их шагом и ординатой центра.

1. Рассматриваемая задача является математической моделью процесса нестационарного теплообмена между полуограниченным массивным телом и рядом заложённых в нем трубопроводов, по которым протекает тепло- или хладоноситель. Практической реализацией данной модели являются такие широко применяемые теплообменные устройства, как почвенный обогрев теплиц и открытого грунта, некоторые системы лучистого отопления, обогреваемые полы зданий и т.п.

Соответствующая стационарная задача была частично решена в [1] (формула для расхода тепла). В [2] описано электрическое моделирование стационарного темпера-

турного поля; аналитическое выражение для последнего было в дальнейшем получено в [3,4].

В математической формулировке трактуемая нестационарная проблема сводится к решению дифференциального уравнения теплопроводности для однородного полупространства $y \geq 0$ (фиг. 1), в котором расположен бесконечный ряд цилиндрических источников тепла с параметрами ρ, y_0, S при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & t(x_*, y_*, 0) = t_0 \\ (1.2) \quad & t(x_*, 0, \tau) = t_0 \\ (1.3) \quad & t(x_*, \infty, \tau) = t_0 \\ (1.4) \quad & t(x_*, y_*, \tau) |_{x_*, y_* \in \Gamma} = t_T \end{aligned}$$

где t — температура в точке с координатами x_*, y_* в момент времени τ , t_0 — начальная температура, t_T — температура на окружности Γ источников.

Известна зависимость [5]

$$\begin{aligned} t(r_*, \tau) = \\ = \frac{\Phi_*}{4\pi a \tau} \exp \left[-\frac{\rho_*^2 + r_*^2}{4a\tau} \right] I_0 \left(\frac{\rho_* r_*}{2a\tau} \right) \end{aligned}$$

описывающая распределение температур в пространстве, вызванное мгновенным цилиндрическим поверхностным источником тепла мощностью Φ_* и радиусом ρ_* . Здесь a — коэффициент температуропроводности тела, r_* — радиус-вектор точки.

Положим мощность источника переменной во времени. Тогда интеграл

$$(1.5) \quad T(r_*, \tau) = \frac{1}{4\pi a \tau} \int_0^\tau \Phi_*(u) \exp \left(-\frac{\rho_*^2 + r_*^2}{4a(\tau-u)} \right) I_0 \left(\frac{\rho_* r_*}{2a(\tau-u)} \right) \frac{du}{\tau-u}$$

будет представлять собой температурную функцию постоянно действующего цилиндрического источника тепла переменной мощности.

Рассмотрим следующее выражение, являющееся в безразмерных переменных результатом суперпозиции бесконечного ряда источников и соответствующих им стоков типа (1.5)

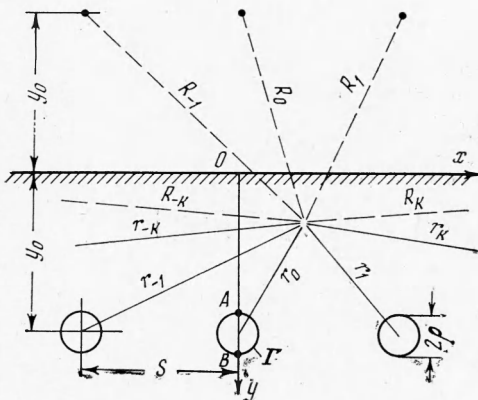
$$(1.6) \quad \begin{aligned} \theta(x, y, Fo) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{Fo} \Phi(u) \left[\exp \left(-\frac{\rho^2 + r_k^2}{4(Fo-u)} \right) I_0 \left(\frac{\rho r_k}{2(Fo-u)} \right) - \right. \\ \left. - \exp \left(-\frac{\rho^2 + R_k^2}{4(Fo-u)} \right) I_0 \left(\frac{\rho R_k}{2(Fo-u)} \right) \right] \frac{du}{Fo-u} \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{t(x, y, \tau) - t_0}{t_T - t_0}, \quad Fo = \frac{a\tau}{S^2}$$

$$(1.7) \quad r_k = [(k-x)^2 + (y-y_0)^2]^{1/2}, \quad R_k = [(k-x)^2 + (y+y_0)^2]^{1/2}$$

Здесь ρ, y_0, x, y — соответственно безразмерные радиус источников, ордината их центров и линейные координаты при определяющем размере S . При этом в (1.6) и (1.7) индексу $k = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty$ приписываются положительные значения для источников и стоков, лежащих в области $x > 0$, и отрицательные — в области $x < 0$.

Выражение (1.6), как линейная сумма интегралов уравнения теплопроводности, удовлетворяет последнему и с учетом перехода к безразмерным величинам, краевым условиям (1.1) — (1.3). Тогда для единственности решения необходимо и достаточно выполнить последнее краевое условие (1.4), что может быть достигнуто соответствующим выбором вида функции $\Phi(Fo)$. Относя (1.6) к точкам $A(0, y_0 - \rho)$ или $B(0, y_0 + \rho)$, получим, что $\Phi(Fo)$ определяется следующим интегральным уравнением



Фиг. 1

Вольтерра первого рода типа свертки:

$$(1.8) \quad 1 = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{F_0} \varphi(u) \left[\exp\left(-\left(\frac{\rho^2 + n_k^2}{4(F_0 - u)}\right) I_0\left(\frac{\rho n_k}{2(F_0 - u)}\right)\right) - \exp\left(-\left(\frac{\rho^2 + N_k^2}{4(F_0 - u)}\right) I_0\left(\frac{\rho N_k}{2(F_0 - u)}\right)\right) \right] \frac{du}{F_0 - u}$$

где n_k, N_k — радиус-векторы точек A или B , величины которых при упрощающем допущении

$$(1.9) \quad 2y_0 \gg \rho, \quad \rho \ll 1$$

равны из (1.7)

$$(1.10) \quad N_k = \sqrt{k^2 + 4y_0^2}, \quad n_k = \begin{cases} k, & |k| \geq 1 \\ \rho, & k = 0 \end{cases}$$

Используя теорему о свертке и применяя к (1.6) и (1.8) преобразование Лапласа, получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(s) &= \frac{\bar{\varphi}(s)}{2\pi} I_0(\rho \sqrt{s}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [K_0(r_k \sqrt{s}) - K_0(R_k \sqrt{s})] \\ \frac{1}{s} &= \frac{\bar{\varphi}(s)}{2\pi} I_0(\rho \sqrt{s}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [K_0(n_k \sqrt{s}) - K_0(N_k \sqrt{s})] \end{aligned}$$

где $\bar{\theta}(s)$ и $\bar{\varphi}(s)$ — изображения соответствующих функций, решая которую, найдем

$$(1.11) \quad \bar{\theta}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [K_0(r_k \sqrt{s}) - K_0(R_k \sqrt{s})] \left\{ s \sum_{k=-\infty}^{\infty} [K_0(n_k \sqrt{s}) - K_0(N_k \sqrt{s})] \right\}^{-1}$$

Оригинал выражения (1.11) находится по формуле обращения Мелина. При этом используется известный контур Ханкеля с разрезом вдоль отрицательной вещественной оси, соединяющим точки ветвления $s = 0$ и $s = \infty$ подынтегральной функции. Применяя стандартные приемы контурного интегрирования и учитывая свойства функций Бесселя, получим

$$(1.12) \quad \theta(x, y, F_0) = \theta_{st} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-z^2 F_0} \times \\ \times \frac{J(n_k z, N_k z) Y(r_k z, R_k z) - J(r_k z, R_k z) Y(n_k z, N_k z)}{[J(n_k z, N_k z)]^2 + [Y(n_k z, N_k z)]^2} \frac{dz}{z}$$

$$(1.13) \quad \begin{aligned} J(b_k z, B_k z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [J_0(b_k z) - J_0(B_k z)] \\ Y(b_k z, B_k z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [Y_0(b_k z) - Y_0(B_k z)] \end{aligned}$$

$$(1.14) \quad \theta_{st} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ln \frac{R_k}{r_k} / \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ln \frac{N_k}{n_k}$$

Выражение (1.14) описывает стационарное поле температур для трактуемой задачи [3] и входящие в его числитель и знаменатель ряды просуммированы соответственно в [3, 1], что позволяет представить (1.14) в виде

$$(1.15) \quad \theta_{st} = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} 2\pi(y_0 + y) - \cos 2\pi x}{\operatorname{ch} 2\pi(y_0 - y) - \cos 2\pi x} \ln \left(\frac{1}{\pi \rho} \operatorname{sh} 2\pi y_0 \right)$$

2. При условиях (1.9) температурные поля, создаваемые стоками и источниками в окрестности некоторого источника, можно принять постоянными. Тогда суммарное поле в той же окрестности цилиндрическое и расход тепла с единицы длины источника, индекс которого $k = 0$ (для определенности записей)

$$(2.1) \quad Q = \left(-2\pi\rho\lambda \frac{\partial t}{\partial r_0} \right)_{r_0=\rho} = -2\pi\lambda\rho (t_T - t_0) \frac{\partial \theta}{\partial z_0} \Big|_{r_0=\rho}$$

При выполнении требуемой (2.1) операции дифференцирования следует иметь в виду, что по условию цилиндричности поля

$$(2.2) \quad \frac{\partial R_k}{\partial r_0} \Big|_{r_0=\rho} = 0, \quad \frac{\partial r_k}{\partial r_0} \Big|_{r_0=\rho} = \begin{cases} 0, & |k| \geq 1 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Дифференцируя выражение (1.12) при его стационарной составляющей в виде (1.14) и учитывая (2.2), найдем, что безразмерный расход тепла $q = Q / [\lambda (t_T - t_0)]$ равен

$$(2.3) \quad q = 2\pi \left[\ln \left(\frac{1}{\pi\rho} \operatorname{sh} 2\pi y_0 \right) \right]^{-1} + 4\rho \int_0^\infty \exp(-z^2 Fo) \times \\ \times \frac{J_1(\rho z) Y(n_k z, N_k z) - Y_1(\rho z) J(n_k z, N_k z)}{[J(n_k z, N_k z)]^2 + [Y(n_k z, N_k z)]^2} dz$$

Первый член правой части (2.3) представляет собой известную формулу О. Е. Власова, записанную в безразмерном виде.

На фиг. 2 представлены зависимости безразмерных температур (кривые 1 и 2) и расхода тепла (кривая 3) от числа Фурье, вычисленные по формулам (1.12) и (2.3) для следующих параметров ряда источников: $\rho = 0.04$ и $y_0 = 0.2$. При этом кривые 1 и 2 иллюстрируют временной ход температуры в двух точках полупространства, безразмерные координаты которых соответственно равны $x_1 = 0.16$, $y_1 = 0.2$ и $x_2 = 0.5$, $y_2 = 0.4$.

3. Для оценки погрешности решения, вытекающей из приближенного характера условий (1.9), обратимся к известному соотношению между оригиналом функции и ее изображением

$$\theta(x, y, 0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{\theta}(x, y, s)$$

Тогда с учетом асимптотической формулы

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$$

найдем из (1.11)

$$(3.1) \quad \theta(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & x, y \in \Gamma \\ 0, & x, y \notin \Gamma \end{cases}$$

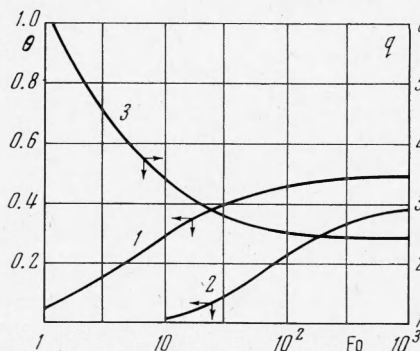
что представляет собой в безразмерных переменных условия (1.1) и (1.4).

Таким образом, выражение (1.12) и, следовательно, его частная производная (2.3) являются в начальный момент времени точными решениями, поскольку при $Fo = 0$ имеет место строгое выполнение краевых условий задачи. Отклонение от условия (3.1) на контуре некоторого рассматриваемого источника наступает по истечении такого промежутка времени, когда в его окрестности температурные функции остальных источников и стоков приобретают существенно различные значения.

Заметим, что поскольку функция (1.5) источника или стока монотонно возрастает во времени, то ее величина для любой фиксированной точки максимальна при $Fo = \infty$. Из указанных соображений следует, что погрешность решения задачи наибольшая в стационарном состоянии.

Как показывает численный анализ [6], при одновременном выполнении условий

$$(3.2) \quad \rho \leq 0.13, \quad y_0 / \rho \geq 4$$



Фиг. 2

относительная погрешность формулы О. Е. Власова менее 4%. Погрешность стационарной составляющей относительной температуры при $\rho \leq 0.1$ ничтожно мала [7]. Таким образом, максимальная погрешность решений (1.12) и (2.3) при ограничениях (3.2), которые в практике, как правило, выполняются, не превышает нескольких процентов.

Поступила 30 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов О. Е. Дополнения редактора к книге Г. Гребера «Введение в теорию теплопередачи». М., Госэнергоиздат, 1933.
2. Кутателадзе С. С., Рабинович А. Л. Расчет почвенного обогрева теплиц. Отопление и вентиляция. 1935, № 12.
3. Иоффе И. А. О стационарном температурном поле в полуограниченном массиве с внутренними цилиндрическими источниками тепла. Ж. техн. физ., 1958, т. 28, № 5.
4. Сандер А. А. Температурное поле ряда трубопроводов, заложенных в массиве. Изв. вузов, Строительство и архитектура, 1958, № 1.
5. Карслоу Г., Еггер Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
6. Каля Я. Н. О точности замены цилиндрического источника тепла точечным при нахождении температурного поля в полуограниченном массиве. Инж.-физ. ж., 1972, т. 22, № 2.
7. Переверзев Д. А. Об одной двухмерной задаче стационарной теплопроводности. Инж.-физ. ж., 1965, т. 8, № 5.

УДК 624.131.439.7

УРАВНЕНИЕ СЖАТИЯ ВОДОНАСЫЩЕННОГО ПЕСКА И ГРАНИЦЫ ЕГО ПРИМЕНИМОСТИ

В. А. Кривцов

(Киев)

В [1] введено приближенное уравнение состояния многокомпонентной среды, в котором фигурируют величины сжимаемостей отдельных компонент. В данной заметке определяются текущие значения объемного содержания компонентов, приводится анализ уравнения сжатия и определяются границы его применимости для водонасыщенного песка.

В основу модели среды [1] положено допущение о том, что твердый компонент, представляющий собой мелкодисперсную среду, не образует скелета, а находится во взвешенном состоянии, и что каждый компонент сжимается по закону, свойственному ему в свободном состоянии. Для водонасыщенного песка эта модель применима, если он находится в разжиженном (пльвунном) состоянии. Опыты, проведенные в водонасыщенном песке, показали приемлемость в некоторых случаях уравнения [1] при наличии в нем скелета [2].

Определим текущие значения содержания компонентов по объему, проанализируем их и уравнение сжатия и оценим степень влияния скелета при сжатии песка.

Рассмотрим уравнение сжатия и объемное содержание компонентов водонасыщенного песка. Пусть при $P = P_0$ (атмосферное давление) содержание по объему газообразного, жидкого и твердого компонентов составляет $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, удельный объем каждого из них V_1, V_2, V_3 , плотность ρ_1, ρ_2, ρ_3 и скорость звука c_1, c_2 и c_3 .

При давлении $P > P_0$ соответствующие компоненты и параметры обозначим звездочкой, т. е. $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$; V_1^*, V_2^*, V_3^* ; $\rho_1^*, \rho_2^*, \rho_3^*$ и текущую плотность трехкомпонентной среды — через ρ .

Пусть сжатие каждого компонента соответствует уравнению Тэта, т. е.

$$(1) \quad \frac{\Delta P + B}{B} = \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

где ΔP — избыточное давление; B — среднее межмолекулярное давление компонента, которое для воздуха равно атмосферному, т. е. $B_1 = \rho_1 c_1^2 / \gamma_1 = \bar{P}_0$, а для воды и