

**АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БЬЕРКНЕСА
В МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ**

УДК 533.9

К. П. Горшенин

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
125047 Москва

При исследовании влияния магнитной силы на образование вихрей скорости в магнитогазодинамическом потоке обычно рассматривается уравнение для завихренности (см., например, [1]). Другой подход — исследование изменения циркуляции скорости по замкнутому контуру — ограничивается указанием на необходимое условие выполнения теоремы Томсона, устанавливающей условия сохранения циркуляции, а именно потенциальность магнитной силы $(\mathbf{j} \times \mathbf{H})/\rho$. Однако и этот подход в некоторых случаях дает возможность более детально изучить магнитный механизм вихреобразования.

Проинтегрируем уравнение движения $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}/\rho$ по произвольному замкнутому жидкому контуру L , учитывая известный факт, что производная по времени от циркуляции скорости равна циркуляции ускорения по тому же контуру (\mathbf{F} — суммарная сила, действующая на единицу объема). В итоге получаем

$$d\Gamma/dt = \gamma + \tilde{\gamma}, \quad \Gamma = \oint_L \mathbf{v} d\mathbf{l}, \quad \gamma = \oint_L (c\rho)^{-1} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) d\mathbf{l},$$

а величина $\tilde{\gamma}$ есть вклад других составляющих силы \mathbf{F} в изменение циркуляции Γ .

Рассмотрим двумерные течения в поперечном магнитном поле: в плоскости (x, y) с $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ или в плоскости (r, z) с $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_\rho$. В этих случаях $(c\rho)^{-1} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) = -\varkappa \nabla I$, где $\varkappa = H/(4\pi \rho r^\nu)$, $I = Hr^\nu$, $\nu = 0$ для плоского течения и $\nu = 1$ для осесимметричного. Таким образом,

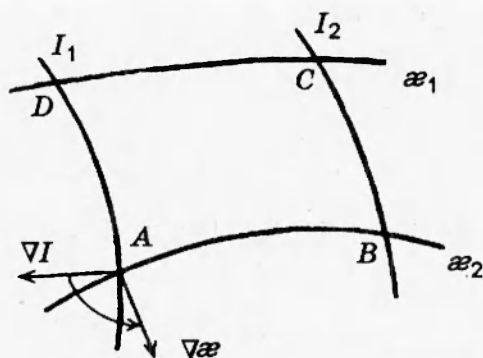
$$\gamma = - \oint_I \varkappa dI. \tag{1}$$

Рассмотрим систему трубок, образованных в пространстве пересечением поверхностей $\varkappa = \text{const}$ и $I = \text{const}$. Для течений с бесконечной электропроводностью \varkappa есть интеграл замороженности, сохраняющийся вдоль траектории жидкой частицы, поэтому поверхности $\varkappa = \text{const}$ назовем изомагнитными, следуя терминологии работы [2]. Поверхности $I = \text{const}$ назовем токовыми, поскольку вдоль них течет электрический ток ($\mathbf{j} \nabla I = 0$), а упомянутые трубки — токово-изомагнитными. Отметим, что для плоского течения с постоянной плотностью токовые и изомагнитные поверхности совпадают и $\gamma \equiv 0$.

Вычислим интеграл $\oint \varkappa dI$ по сечению трубки — контуру $ABCD$ (см. рисунок):

$$- \oint_{ABCD} \varkappa dI = (\varkappa_1 - \varkappa_2)(I_1 - I_2) = \delta \Delta \varkappa \Delta I. \tag{2}$$

Здесь $\Delta \varkappa = |\varkappa_1 - \varkappa_2|$; $\Delta I = |I_1 - I_2|$; $\delta = 1$, если положительное направление обхода контура $ABCD$ (против часовой стрелки) совпадает с направлением вращения вектора ∇I к вектору $\nabla \varkappa$ по кратчайшему пути, и $\delta = -1$, если эти направления противоположны. В первом случае токово-изомагнитную трубку будем называть положительной, во втором —



отрицательной. Очевидно, что произвольный контур L может охватывать как положительные, так и отрицательные трубки. Полагая (без ограничения общности) $\Delta \varpi = \text{const}$ и $\Delta I = \text{const}$, перепишем (1) с учетом (2) в виде $\gamma = (N_+ - N_-) \Delta \varpi \Delta I$, где N_+ и N_- — соответственно число положительных и отрицательных трубок. Таким образом, для рассмотренных случаев МГД-течений вклад магнитной силы в изменение во времени циркуляции скорости по любому замкнутому жидкому контуру определяется разностью числа положительных и отрицательных токово-изомагнитных трубок, охватываемых этим контуром. Сформулированное утверждение устанавливает магнитный механизм вихреобразования, заключающийся в несовпадении изомагнитных и токовых поверхностей, и является МГД-аналогом теоремы Бьеркнеса [3, 4]. В частности, в изомагнитном потоке ($\varpi \equiv \text{const}$) магнитная сила не влияет на изменение циркуляции. В этом смысле изомагнитность рассмотренных течений играет ту же роль, что и несжимаемость газодинамического потока, зависимость $I = I(\varpi)$ — аналог баротропности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01083).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967.
2. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.
4. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.

Поступила в редакцию 12/1 1995 г.,
в окончательном варианте — 5/V 1995 г.