

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СЛУЧАЕ РЕДКИХ СТОЛКНОВЕНИИ

А. Н. Дюкалов

(Москва)

Исследуется кинетическое уравнение системы заряженных частиц. Рассматривается возможность существования разрывных решений, изучается поток частиц через поверхность разрыва. Устанавливаются граничные условия для функции распределения финитных частиц.

Кинетическое уравнение для системы заряженных частиц в стационарном случае имеет вид [1]

$$\mathbf{v} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m} \frac{dU}{d\mathbf{r}} = \frac{e^2 n}{m} \left\langle \frac{d}{d\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \right) [F^2 - F(X)F(X')] dX' \right. \quad (1)$$

Здесь F^2 — бинарная функция распределения, U — потенциал самосогласованного поля, $X = \{x, y, z, u, v, w\}$

Взаимодействие между частицами учитывается в этом уравнении двояким образом. Член с dU/dr описывает это взаимодействие при помощи среднего поля, член, стоящий в правой части — «столкновительный» член — описывает случайные отклонения от среднего поля, или, иначе говоря, индивидуальное влияние каждой частицы на данную.

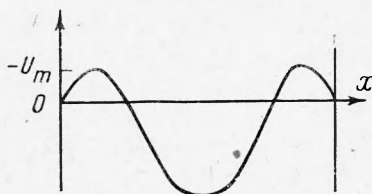
Уравнение Власова, которое получается из уравнения (1), при пренебрежении столкновительным членом обладает свойством обратимости по времени. Полное уравнение (1) этим свойством не обладает. Другими словами, уравнение (1) описывает приближение системы к равновесному

состоянию. Можно сказать, что уравнение Власова справедливо в том случае, когда характерная длина рассматриваемого процесса много меньше, чем расстояние λ , на котором устанавливается равновесное состояние (по аналогии с газом нейтральных частиц это расстояние часто называют длиной свободного пробега).

Имеется много работ, посвященных применению уравнений Власова с самосогласованным полем для расчета тех или иных конфигураций электрических и магнитных полей.

В большинстве этих работ не приводится анализа областей применимости уравнений Власова и связи его с точным кинетическим уравнением. Вместе с тем при использовании уравнений Власова встречаются методологические, а порой принципиальные трудности. Можно показать [2], что в ряде случаев не существует непрерывного решения уравнений Власова, удовлетворяющего заданным граничным условиям. Разрывные решения кинетического уравнения в том или ином виде используются в работах [3,4] и др.

Трудностями принципиального характера являются следующие: при расчете конкретных конфигураций электрических и магнитных полей эффективный потенциал может быть немонотонной функцией [3,4], т. е. в этом случае имеются «потенциальные ямы» (фиг. 1). Функция распределения частиц, находящихся в яме (финитные частицы) в основном определяется столкновениями.



Фиг. 1

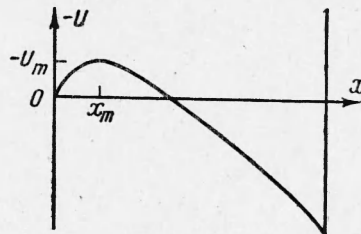
В уравнении Власова столкновения игнорируются, поэтому оно не может быть применено для нахождения функции распределения финитных частиц. Эта функция удовлетворяет уравнению типа уравнения, полученного Г. И. Будкером и С. Т. Беляевым [5]. Чтобы решить это уравнение, надо знать поток частиц в яму из внешней области; этот поток, определяемый столкновениями, не может быть найден из уравнений Власова.

Пусть на расстоянии L одна от другой ($L \ll \lambda$) имеются две плоские, бесконечные пластины, каждая из которых является эмитером электронов. Требуется найти ток и распределение потенциала (задача о плоском диоде). Решение этой задачи находится из уравнений

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{dU}{dx} \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{d^2 U}{dx^2} = 4\pi en \int F dv \quad (2)$$

Первому уравнению удовлетворяет произвольная функция

$$F = F(E, v, w), \quad E = \frac{u^2}{2} - \frac{e}{m} U(x)$$

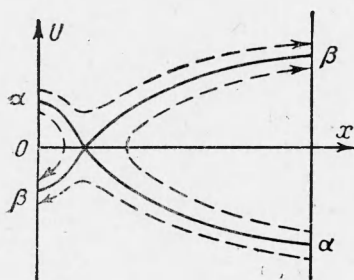


Фиг. 2

При помощи этого решения нельзя удовлетворить двум граничным условиям $F(0, v) = f_1(v^2)$, $F(L, v) = f_2(v^2)$. Л. А. Вайнштейн [2] предложил искать решение в классе разрывных функций. Для построения такого решения следует рассмотреть траектории частиц в фазовой плоскости (фиг. 2). Предполагаемое распределение потенциала приведено на фиг. 3. Частицы с энергиями $E < -e/mU_m$ отражаются от потенциального барьера и попадают на тот же эмитер. Частицы с энергиями, большими чем $-e/mU_m$, пролетают от одной пластины до другой. Кривая $\beta-\beta$ отделяет траектории пролетающих частиц от траекторий возвращающихся.

Кривая $\alpha-\alpha$ отделяет траектории частиц, стартующих с разных пластин. Энергия частицы в этом приближении сохраняется, следовательно, вдоль кривой $\alpha-\alpha$ функция распределения терпит разрыв.

В реальных системах энергия частицы всегда меняется в результате столкновений. Для частиц, энергия которых близка к $-e/mU_m$, эти столкновения надо учесть, так как даже малые изменения энергии частиц могут приводить к переходу частицы через поверхность разрыва. Отсюда следует, что уравнение Власова справедливо для тех частиц, энергия которых не



Фиг. 3

слишком близка к $-e/mU_m$. Для частиц с энергией, близкой к $-e/mU$, нужно получить новое уравнение, учитывающее столкновения. Уравнение Власова получается из уравнения (1) посредством асимптотического разложения по некоторому малому параметру μ (зависимость μ от физических параметров, определяющих задачу, см. ниже). Из теории асимптотических разложений известно, что разложение по искусственному параметру не может равномерно сходиться во всей области определения независимых переменных [6]. Поэтому следует искать два асимптотических разложения, каждое из которых равномерно сходится в своей области. В рассматриваемом случае такими областями являются область энергий, достаточно далеких от $-e/mU_m$ (полевые частицы) и область энергий, близких к $-e/mU_m$ (пробные частицы).

Уравнение (1) является первым уравнением в цепочке самозацепляющихся уравнений, полученных Н. Н. Боголюбовым [1]. Имеется большое число работ, в которых решается соответствующее уравнение для корреляционной функции $g(X, X') = F^2 - F(X)F(X')$, входящей в правую часть уравнения (1) (см., например, [7]). Использование здесь результатов этих работ не представляется возможным¹, так как они проводятся в предположении однородной плазмы, в то время как состояния, рассматриваемые в работе, являются существенно неоднородными. Для получения необходимого уравнения следует вернуться к цепочке уравнений Н. Н. Боголюбова.

В дальнейшем предполагается, что F зависит только от одной пространственной координаты (плоский случай).

Система уравнений Н. Н. Боголюбова в стационарном плоском случае может быть записана так:

$$\sum_{1 \leq i \leq s} \mathbf{v}_i \frac{\partial F^s}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{1 \leq i \leq s} \frac{e}{m} \frac{dU(x_i)}{dx_i} \frac{\partial F^s}{\partial u_i} + \frac{e^2}{m} \sum_{1 \leq i < j \leq s} \frac{d}{d\mathbf{r}_i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \right) F^s +$$

$$+ \sum_{1 \leq i \leq s} \frac{e^2 n}{m} \int \left\{ \frac{d}{d\mathbf{r}_i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{s+1}|} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{s+1}} \right) [F^{s+1} - F^s F(X_{s+1})] \right\} dX_{s+1} \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_i - \{u_i, v_i, w_i\}, \quad \mathbf{r}_i - \{x_i, y_i, z_i\} \quad X_i - \{\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i\}$$

При $s = 1$ получим уравнение (1).

Сравним по порядку величин отношение третьего члена ко второму. Второй член по порядку величины равен

$$\frac{e}{m} \frac{dU}{dx} \frac{\partial F^s}{\partial u} \sim \frac{e}{m} \frac{U}{x^\circ} \frac{F^s}{u^\circ} \sim \frac{e^2 n}{m} \frac{x^\circ}{u^\circ} F^s \quad \left(\frac{U}{x^\circ} = \frac{e^2 n}{x^\circ} \right)$$

Третий член по порядку величины равен

$$\frac{e^2}{m} \frac{d}{d\mathbf{r}_i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} F^s \sim \frac{e^2}{m} n^{2/3} \frac{F^s}{u^\circ}$$

Отношение третьего члена ко второму равно

$$\mu = \frac{1}{x^\circ n^{1/3}} \quad (4)$$

Здесь x° — размер неоднородности электрического поля. Очевидно, что μ всегда много меньше единицы. Будем считать μ формальным параметром, стоящим перед вторым членом. Проведем разложение по μ . Нетрудно видеть, что окончательный результат будет таким же, как если бы были введены новые переменные, и μ определялось формулой (4).

В нулевом приближении получим

$$u_i \frac{\partial F_i^1}{\partial x_i} + \frac{e}{m} \frac{dU(x_i)}{dx_i} \frac{\partial F_i^1}{\partial u_i} = 0, \quad F^s = \prod_{1 \leq i \leq s} F_i^1(X_i) \quad (5)$$

В первом приближении примем

$$F_{ik}^2(X_i X_k) = F_i^1 F_k^1 + a_{ik}(\mu) g_{ik}(X_i X_k) \quad (6)$$

$$F^s = \prod_{1 \leq i \leq s} F_i^1 + \sum_{1 \leq i < k \leq s} a_{ik}(\mu) g_{ik}(X_i X_k) \prod_{\substack{1 \leq r \leq s \\ (r \neq i, r \neq k)}} F_r^1(X_r)$$

Введем сокращенные обозначения

$$l_{ik} = \frac{d}{d\mathbf{r}_i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_k} \right), \quad D_i = \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{e}{m} \frac{dU(x_i)}{dx_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (7)$$

¹ За исключением одного случая, о котором сказано ниже.

Подставляя (6) в (3), получим

$$u_i \frac{\partial F_i^1}{\partial x_i} + \frac{e}{m} \frac{dU(x_i)}{dx_i} \frac{\partial F_i^1}{\partial u_i} = - \frac{e^2 n}{m} a_{ik} \int l_{ik} g_{ik} dX_k \quad (8)$$

$$a_{ik} (D_i + D_k) g_{ik} + \mu \frac{e^2}{m} l_{ik} F_i^1 F_k^1 + \mu a_{ik} l_{ik} g_{ik} + \\ + a_{kr} \frac{e^2 n}{m} \int l_{kr} F_i^1 g_{kr} dX_r + a_{ir} \frac{e^2 n}{m} \int l_{kr} F_k^1 g_{ir} dX_r$$

Далее произведем замену переменных:

$$u_i, v_i, w_i, x_i, y_i, z_i \rightarrow E_i, v_i, w_i, x_i, y_i, z_i, E_i = \frac{u_i^2}{2} - U'_i(x_i)$$

При этом l_{ik} преобразуется в l_{ik}^* , а D_i — в D_i^*

$$l_{ik}^* = \left[\sqrt{2(E_i + U'_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|r_i - r_k|} \frac{\partial}{\partial E_i} + \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|r_i - r_k|} \frac{\partial}{\partial v_i} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{|r_i - r_k|} \frac{\partial}{\partial w_i} \right] + [\dots]_{i \rightarrow k} \quad (9)$$

$$D_i^* = \sqrt{2(E_i + U'_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial}{\partial y_i} + w_i \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (U'_i = \frac{e}{m} U(x_i))$$

Уравнения (8) в этих переменных запишутся в виде

$$\sqrt{2(E_i + U'_i)} \frac{\partial F_i^1}{\partial x_i} = - \frac{e^2 n}{m} a_{ik} \int l_{ik} g_{ik} dX_k$$

$$a_{ik} (D_i^* + D_k^*) g_{ik} + \mu \frac{e^2}{m} l_{ik}^* F_i^1 F_k^1 + \mu a_{ik} \frac{e^2}{m} l_{ik} g_{ik} + \\ + a_{ir} \frac{e^2 n}{m} \int l_{kr}^* F_k^1 g_{ir} dX_r + a_{kr} \frac{e^2 n}{m} \int l_{ir} F_i^1 g_{kr} dX_r \quad (10)$$

Несложный анализ, аналогичный [6], показывает, что столкновения существенны в узком слое по энергиям $E \sim -U_m' + \sqrt{\mu}$. Введем для пробных частиц новую переменную ε , $E = -U_m' + \sqrt{\mu} \varepsilon$. Тогда, если индекс i относится к пробной частице, получим

$$l_{ik}^{*0} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|r_i - r_k|} \sqrt{2(U_i' - U_m' + \sqrt{\mu} \varepsilon_i)} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|r_i - r_k|} \sqrt{2(E_k + U_k')} \frac{\partial}{\partial E_k} + \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|r_i - r_k|} \left(\frac{\partial}{\partial v_i} - \frac{\partial}{\partial v_k} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{|r_i - r_k|} \left(\frac{\partial}{\partial w_i} - \frac{\partial}{\partial w_k} \right) \\ D_i^{*0} = \sqrt{2(U_i' - U_m' + \sqrt{\mu} \varepsilon_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial}{\partial y_i} + w_i \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (11)$$

Положим $a_{ik} = \sqrt{\mu}$, если i относится к пробной частице, и $a_{ik} = \mu$, если i и k относятся к полевым частицам. Подставим (11) в (10); сохраняя члены низшего порядка по μ , получим:

для пробных частиц

$$\frac{\partial F^1}{\partial x} = \frac{e^2 n}{m} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int \frac{d}{dx} \frac{1}{|r - r'|} g^\circ(X, X') dX' \\ (D_1^\circ + D_2^*) g_{12}^\circ + \frac{e^2}{m} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|r_1 - r_2|} \sqrt{2(U_1' - U_m')} F_2^1 \frac{\partial F_1^1}{\partial \varepsilon_1} + \\ + \frac{e^2 n}{m} \sqrt{2(U_1' - U_m')} \frac{\partial F_1^1}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{1}{|r_1 - r_j|} g_{2j} dX_j + m_2 \int \frac{1}{|r_2 - r_j|} g_{1j}^\circ dX_j = 0 \\ D_i^\circ = \sqrt{2(U_i' - U_m')} \frac{\partial}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial}{\partial y_i} + w_i \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (12)$$

где g_{ik}° — функция корреляции между двумя частицами, одна из которых пробная,

для полевых частиц

$$\frac{\partial F_i^1}{\partial x_i} = 0 \quad (13)$$

$$(D_i^* + D_k^*) g_{ik} + \frac{e^2}{m} l_{ik}^* F_i^1 F_k^1 + m_k \int \frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|} g_{ij} dX_j + m_i \int \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} g_{ki} dX_j = 0$$

где

$$m_k = \frac{e^2 n}{m} \sqrt{2(E_k + U_k')} \frac{\partial F_k^1}{\partial E_k} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial F_k^1}{\partial v_k} \frac{\partial}{\partial y_k} + \frac{\partial F_k^1}{\partial w_k} \frac{\partial}{\partial z_k}$$

Таким образом, следует решить две задачи: внешнюю для полевых частиц и внутреннюю для пробных. Поведение пробных частиц описывается уравнениями (12), (13) с граничными условиями, которые получаются из сопряжения с внешней задачей

$$F^1 \rightarrow f_1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +\infty, \quad F^1 \rightarrow f_2 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow -\infty$$

Для полевых частиц справедливо уравнение Власова. Отметим, что теперь решение уже не будет разрывным. В узком «пограничном слое» с энергиями $E \approx -U_m + \sqrt{\mu}$ происходит «размывание» разрыва. Это размывание описывается уравнениями (12), (13).

В ряде случаев, как например, в плоском диоде учет явлений, происходящих в пограничном слое, приводит к небольшим поправкам к потенциалу и току. В этом смысле разрывные решения достаточно хорошо описывают явление. При использовании таких решений поток частиц через поверхность разрыва равен нулю. На самом деле в результате столкновений имеется некоторый, отличный от нуля поток частиц через поверхность разрыва. При наличии потенциальных ям необходимо знать величину этого потока.

Рассмотрим, например, следующую задачу. Имеются два плоских эмитера с заданными функциями распределения, стартующих с них электронов $f_1(v^2, 0)$, $f_2(v^2, L)$. Пространство между эмитерами заполнено равномерно размазанным положительным зарядом. Примерный характер потенциала указан на фиг. 1. Чтобы найти функцию распределения частиц, находящихся в яме, надо решить уравнение типа выведенного Г. И. Будкером и С. Т. Беляевым [5]. Для решения этого уравнения надо задать граничные условия вдоль $E = -U_m$. Из проведенного выше анализа видно, что граничные условия значение функции и потока частиц определяются из решения уравнений пограничного слоя (12), (13).

Поток частиц через поверхность разрыва $\varepsilon = 0$ равен $Q(x) - Q(x_1)$, где $Q(x)$ — поток частиц в направлении оси x

$$Q(x) = \int_0^{\infty} F^1 d\varepsilon \quad (14)$$

Используя уравнение (12), получим

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \left\{ \frac{e^2 n}{m} \int \frac{d}{dx} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} g(X, X') dX' \right\}_{\varepsilon=0} \quad (15)$$

Выясним роль отдельных членов в уравнении (12). Первый член дает изменение корреляционной функции по времени вдоль невозмущенной траектории частиц. Остальные члены описывают причины этого изменения. Второй член вызван кулоновским взаимодействием между частицами, последние два члена описывают экранирование кулоновского потенциала и, следовательно, являются ответственными за «обрезание» бинарной функции распределения на больших расстояниях [1]. Отношение последнего члена к первому будет порядка x^{02}/D (D — дебаевский радиус).

