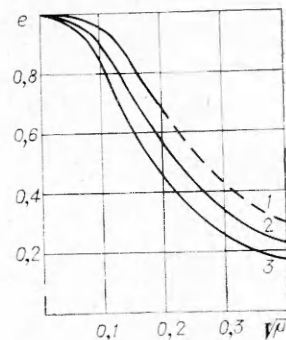


γ^* параметра γ можно судить по приведенным в последней строке таблицы числам γ^- , которые определяют значения γ^* при $\sqrt{\mu} = 0,4$. При изменении $\sqrt{\mu}$ от 0 до 0,4 значения γ^* изменяются от γ^+ до γ^- .

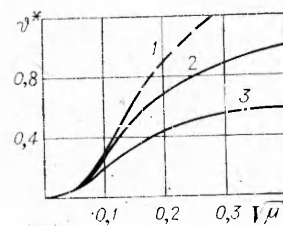
Зависимость от $\sqrt{\mu}$ критических значений ν^* угла поворота на сжатом крае изображена графически на фиг. 3 (для конических и сферических оболочек кривые совпадают). Те значения ν^* , которые отвечают штриховым участкам кривых, не удовлетворяют условию (2.6). Следовательно, для оболочек с углом $\beta = \pi/2$ нельзя гарантировать, что в области $0,2 < \sqrt{\mu} \leq 0,4$ решение задачи (2.3), (2.7), (2.8) будет с принятой степенью точности удовлетворять исходным граничным условиям (2.5). Его следует рассматривать как формальное решение. Такой же формальный смысл имеют штриховые участки кривых на фиг. 2.

Вычисление критических значений принудительной (максимальной) деформации ϵ^* и максимального напряжения σ^* производится по формулам $\epsilon^* = -eq^+\mu^2$; $\sigma^* = E\epsilon^*$.

Для рассчитанных оболочек значения параметра q^+ определяются с помощью таблицы, а значения коэффициента e — с помощью графических зависимостей, изображенных на фиг. 2



Фиг. 2



Фиг. 3

Поступила 4 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Куршин Л. М., Шкутин Л. И. К постановке задач о локальной устойчивости оболочек вращения. — Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 4.
2. Куршин Л. М., Шкутин Л. И. К задаче об упругой устойчивости локально нагруженной цилиндрической оболочки. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
3. Куршин Л. М., Шкутин Л. И. Дополнение к задаче об упругой устойчивости локально нагруженной цилиндрической оболочки. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
4. Reissner E. On axisymmetrical deformations of thin shells of revolution. — In: Proc. III symp. appl. math. Vol. 3. Amer. math. soc., 1950.

УДК 539.311

БЕЗМОМЕНТНЫЕ УПРУГИЕ АРМИРОВАННЫЕ ОБОЛОЧКИ НУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Ю. В. Немировский, Г. И. Старостин

(Новосибирск)

В работе [1] сформулирован ряд постановок задачи по реализации безмоментного напряженного состояния в упругих армированных оболочках с произвольной формой срединной поверхности. Данная работа посвящена решению трех из выдвинутых в [1] постановок для случая, когда срединная поверхность оболочки имеет нулевую гауссову кривизну.

1. В качестве расчетной примем модель армированной оболочки, предложенную в [1]. Отнесем срединную поверхность оболочки к криволинейным ортогональным координатам α и β , совпадающим с линиями кри-

визны, при этом коэффициенты первой квадратичной формы поверхности обозначим A и B , а главные радиусы кривизны — R_1 и R_2 .

Пусть срединная поверхность имеет нулевую гауссову кривизну ($R_1 = \infty$). Если оболочка работает в безмоментном напряженном состоянии, то должны выполняться следующие:

уравнения равновесия

$$(1.1) \quad (BT_1)_{,\alpha} - B_{,\alpha}T_2 + T_{3,\beta} = -Bp_1; \quad T_{2,\beta} + (BT_3)_{,\alpha} + B_{,\alpha}T_3 = -Bp_2, \quad T_2 = Rp_3;$$

соотношения упругости

$$(1.2) \quad \mathbf{T} = 2h \|a_{km}\| \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = 0,5h^{-1} \|b_{km}\| \mathbf{T}; \\ \mathbf{T} = \|T_1 T_2 T_3\|', \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \|\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3\|', \quad \|b_{km}\| = \|a_{km}\|^{-1};$$

геометрические уравнения

$$(1.3) \quad \varepsilon_1 = u_{,\alpha}, \quad \varepsilon_2 = B^{-1}v_{,\beta} + B^{-1}B_{,\alpha}u + wR^{-1}, \quad \varepsilon_3 = B^{-1}u_{,\beta} + B(vB^{-1})_{,\alpha}; \\ \kappa_1 = -w_{,\alpha\alpha} = 0, \quad \kappa_2 = -B^{-1}(B^{-1}w_{,\beta} - vR^{-1})_{,\beta} - B^{-1}B_{,\alpha}w, \quad \alpha = 0; \\ \tau = -B^{-1}(w_{,\alpha\beta} - B^{-1}B_{,\alpha}w_{,\beta}) + BR^{-1}(vB^{-1})_{,\alpha} = 0;$$

уравнения неразрывности деформаций

$$(1.4) \quad (B\varepsilon_3)_{,\alpha} - \varepsilon_{1,\beta} = 0, \quad [(B\varepsilon_2)_{,\alpha} - B_{,\alpha}\varepsilon_1]_{,\alpha} = 0.$$

Здесь $R=R_2$; T_1 , T_2 , T_3 — нормальные и сдвиговое усилия; ε_1 , ε_2 , ε_3 — относительные удлинения вдоль α - и β -линий и сдвиг; κ_1 , κ_2 , τ — изменения кривизны и кручение; u , v , w — компоненты перемещения вдоль α - и β -линий и прогиб срединной поверхности; p_1 , p_2 , p_3 — компоненты внешней поверхностной нагрузки; $2h$ — толщина оболочки; за параметр α взята длина дуги α -линии, что влечет $A=1$. Здесь и далее индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей координате.

Коэффициенты a_{km} ($k, m=1, 2, 3$) имеют вид [1,2]

$$(1.5) \quad a_{ii} = \frac{aE}{1-\nu^2} + \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{in}^4, \quad a_{12} = \frac{aE\nu}{1-\nu^2} + \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{1n}^2 l_{2n}^2, \\ a_{i3} = \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{in}^3 l_{jn}, \quad a_{33} = \frac{aE}{2(1+\nu)} + \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{1n}^2 l_{2n}^2, \\ l_{1n} = \cos \psi_n, \quad l_{2n} = \sin \psi_n, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

где n — номер семейства нитей ($n=1, 2, \dots, N$); ω_n — относительное объемное содержание нитей этого семейства; E_n — их модуль Юнга; ψ_n — угол между направлением нитей семейства и α -линией; E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала связующего; a — относительное объемное содержание связующего.

Если ε_1 , ε_2 , ε_3 удовлетворяют уравнениям неразрывности деформаций (1.4), то уравнения (1.3) служат для определения компонент перемещения u , v , w . Будем предполагать, что краевые условия для оболочки сформулированы так, что существует решение уравнений (1.3) относительно u , v , w , удовлетворяющее этим условиям. Поэтому в дальнейшем уравнения (1.3) и краевые условия для u , v , w опускаем из рассмотрения.

Сформулируем и рассмотрим далее три постановки задачи по реализации безмоментного напряженного состояния в армированных оболочках нулевой кривизны.

2. Пусть для оболочки нулевой кривизны заданы: форма срединной поверхности, законы изменения толщины и характера анизотропии, безмоментные краевые условия. Требуется определить зависимости между компонентами внешней поверхностной нагрузки, которая вызывает в такой оболочке безмоментное напряженное состояние.

Ограничимся случаем цилиндрических оболочек с произвольной формой направляющей. Тогда, выбрав за параметр β длину дуги s направляющей, получим $B=1$, $R=R(s)$ и, следовательно, из второго уравнения (1.4) находим

$$(2.1) \quad \varepsilon_2 = \alpha \varphi_1(s) + \varphi_2(s),$$

где $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ — произвольные функции интегрирования.

Из соотношений (1.4), (2.1) получим

$$(2.2) \quad T_1 = (2h\varepsilon_2 - b_{22}Rp_3 - b_{23}T_3) b_{12}^{-1}.$$

Первые два уравнения (1.4) и первое уравнение (1.4) при использовании зависимостей (1.2) и третьего уравнения из (1.4) приводятся к виду

$$(2.3) \quad c_{11}T_{3,\alpha} + T_{3,s} + c_{13}T_3 = c_1, \quad T_{3,\alpha} = c_2;$$

где

$$c_{31}T_{3,\alpha} + c_{32}T_{3,s} + c_{33}T_3 = c_3,$$

$$c_{11} = -b_{23}b_{12}^{-1}, \quad c_{13} = c_{11,\alpha}, \quad c_{31} = 0,5h^{-1}(b_{33} + b_{13}c_{11}),$$

$$c_{32} = -0,5h^{-1}(b_{13} + b_{11}c_{11}), \quad c_{33} = c_{31,\alpha} + c_{32,s},$$

$$c_1 = -p_1 + (b_{22}b_{12}^{-1}Rp_3)_{,\alpha} - 2(hb_{12}^{-1}\varepsilon_2)_{,\alpha}, \quad c_2 = -p_2 - (Rp_3)_{,s},$$

$$c_3 = (b_{11}b_{12}^{-1}\varepsilon_2 + c_4p_3)_{,s} - (b_{13}b_{12}^{-1}\varepsilon_2 + c_5p_3)_{,\alpha},$$

$$c_4 = 0,5h^{-1}R(b_{12} - b_{11}b_{22}b_{12}^{-1}), \quad c_5 = 0,5h^{-1}R(b_{23} - b_{13}b_{22}b_{12}^{-1}).$$

Условия интегрируемости [3] уравнений (2.3) имеют вид

$$(2.4) \quad A_1T_3 = A_2; \quad B_1T_3 = B_2,$$

где

$$A_1 = -c_{13,\alpha}; \quad B_1 = c_{33} - c_{13}c_{32};$$

$$A_2 = p_{1,\alpha} + \gamma_{11}p_2 + \gamma_{12}p_{2,\alpha} - p_{2,s} + \gamma_{13}p_3 + \gamma_{14}p_{3,\alpha} + \gamma_{15}p_{3,s} + \gamma_{16}p_{3,\alpha\alpha} + \\ + \gamma_{17}p_{3,ss} + \gamma_{18}p_{3,\alpha s} + \gamma_1;$$

$$B_2 = \gamma_{21}p_1 + \gamma_{22}p_2 + \gamma_{23}p_3 + \gamma_{24}p_{3,\alpha} + \gamma_{25}p_{3,s} + \gamma_2;$$

$$\gamma_{11} = -c_{13} - c_{11,\alpha}, \quad \gamma_{12} = -c_{11}, \quad \gamma_{13} = -R_{,ss} + R(b_{22}b_{12}^{-1})_{,\alpha} + \gamma_{11},$$

$$\gamma_{14} = -c_{11}R_{,s} - 2R(b_{22}b_{12}^{-1})_{,\alpha}, \quad \gamma_{15} = -2R_{,s} + \gamma_{11}R,$$

$$\gamma_{16} = -Rb_{22}b_{12}^{-1}, \quad \gamma_{17} = -R, \quad \gamma_{18} = -c_{11}\bar{R}, \quad \gamma_1 = 2(hb_{12}^{-1}\varepsilon_2)_{,\alpha\alpha},$$

$$\gamma_{21} = c_{32}, \quad \gamma_{22} = c_{31} - c_{11}c_{32}, \quad \gamma_{23} = \gamma_{22}R_{,s} - c_{32}R(b_{22}b_{12}^{-1})_{,\alpha} + c_{4,s} - c_{5,\alpha},$$

$$\gamma_{24} = -c_{32}Rb_{22}b_{12}^{-1} - c_5, \quad \gamma_{25} = \gamma_{22}R + c_4,$$

$$\gamma_2 = 2c_{32}(hb_{12}^{-1}\varepsilon_2)_{,\alpha} - (b_{13}b_{12}^{-1}\varepsilon_2)_{,\alpha} + (b_{11}b_{12}^{-1}\varepsilon_2)_{,s}.$$

Если цилиндр работает в безмоментном состоянии, то система (2.3) должна допускать решение для T_3 и, следовательно, должны выполняться

равенства (2.4) При этом возможны три случая. Если

$$(2.5) \quad A_1 = B_1 = 0,$$

то из (2.4) получим

$$(2.6) \quad A_2 = B_2 = 0.$$

В этом случае функция T_3 может быть определена из любого уравнения (2.3), например, из второго.

Если $A_1 = 0$, $B_1 \neq 0$, то из равенств (2.4) находим

$$(2.7) \quad A_2 = 0;$$

$$(2.8) \quad T_3 = B_2 B_1^{-1}.$$

Можно проверить, что для того, чтобы найденное для T_3 выражение действительно являлось решением уравнений (2.3), должно выполняться соотношение, получающееся при подстановке выражения для T_3 из (2.8) во второе уравнение (2.3),

$$(2.9) \quad (B_2 B_1^{-1})_{,\alpha} - c_2 = 0.$$

Если $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$ или $B_1 = 0$, то из первого равенства (2.4) находим

$$(2.10) \quad T_3 = A_2 A_1^{-1}.$$

Чтобы найденное для T_3 выражение являлось решением уравнений (2.3), должны выполняться соотношения, получающиеся при подстановке значения для T_3 из (2.10) в первые два уравнения (2.3) и во второе равенство (2.4),

$$(2.11) \quad (A_2 A_1^{-1})_{,\alpha} + c_{13} A_2 A_1^{-1} - c_1 + c_{11} c_2 = 0; \quad (A_2 A_1^{-1})_{,\alpha} - c_2 = 0, \\ B_1 A_2 A_1^{-1} - B_2 = 0.$$

Таким образом, в зависимости от исходных данных рассматриваемой постановки компоненты внешней поверхностной нагрузки, вызывающей в цилиндре безмоментное состояние, должны удовлетворять соотношениям (2.6) либо (2.7), (2.9), либо (2.11).

Проиллюстрируем полученные результаты на следующем примере. Рассмотрим замкнутую цилиндрическую оболочку с образующей длиной L (начало отсчета координаты α примем на одном из граничных торцов). Оболочка изготовлена из изотропного материала ($\nu = 1$, $G_n = \alpha_n E_n (aE)^{-1} = 0$, $n = 1, \dots, N$) и имеет постоянную толщину ($h = \text{const}$). Компонента p_3 внешней поверхностной нагрузки удовлетворяет равенству $p_3 = p = \text{const}$, ($p > 0$). На краях оболочки заданы условия:

$$(2.12) \quad T_1|_{\alpha=0} = T_1|_{\alpha=L} = 0, \quad T_3|_{\alpha=0} = -T_3|_{\alpha=L}.$$

Требуется найти законы изменения компонент p_1 и p_2 внешней нагрузки, при которых в рассматриваемом цилиндре реализуется безмоментное состояние.

Поскольку при сформулированных условиях выполняются равенства (2.5), искомые компоненты p_1 и p_2 должны удовлетворять соотношениям (2.6), которые в данном случае имеют вид

$$(2.13) \quad p_{1,\alpha} - p_{2,s} - R_{,ss} p = 0; \quad h^{-1} (1 + \nu) p_2 + \gamma_{25,s} p + \gamma_2 = 0.$$

Используя зависимости (1.2), (2.1), первое уравнение (1.1) и краевые условия (2.12), из (2.13), (2.2) и второго уравнения (2.3) находим

$$(2.14) \quad p_1 = 0,5\nu(1+\nu)^{-1}(\alpha - 0,5L)R_{,ss} p, \quad p_2 = -0,5(2+\nu)(1+\nu)^{-1}R_{,s} p;$$

$$(2.15) \quad T_1 = 0, \quad T_3 = 0,5\nu(1+\nu)^{-1}(0,5L - \alpha)R_{,s} p.$$

В силу третьего равенства (1.1) и (2.15) условие упругой работы материала оболочки [1] можно представить в виде

$$(2.16) \quad 0,5h^{-1}p \{R^2 + [0,5\nu(1+\nu)^{-1}(0,5L - \alpha)R_{,s}]^2\}^{1/2} < \sigma_0.$$

Это неравенство приводит к ограничению на величину нагрузки p . Применим полученные решения к конкретному частному случаю — цилиндру эллиптического поперечного сечения. Тогда [4] $R = a_1\gamma^2(1 - \varepsilon \cos^2\varphi)^{-1/2}$, $ds = R d\varphi$,

$$(2.17) \quad \frac{dR}{ds} = -\frac{3\varepsilon \sin 2\varphi}{2(1 - \varepsilon \cos^2\varphi)}, \quad \frac{d^2R}{ds^2} = -\frac{3\varepsilon(\cos 2\varphi - \varepsilon \cos^2\varphi)}{a_1 \sqrt{1 - \varepsilon \cos^2\varphi}},$$

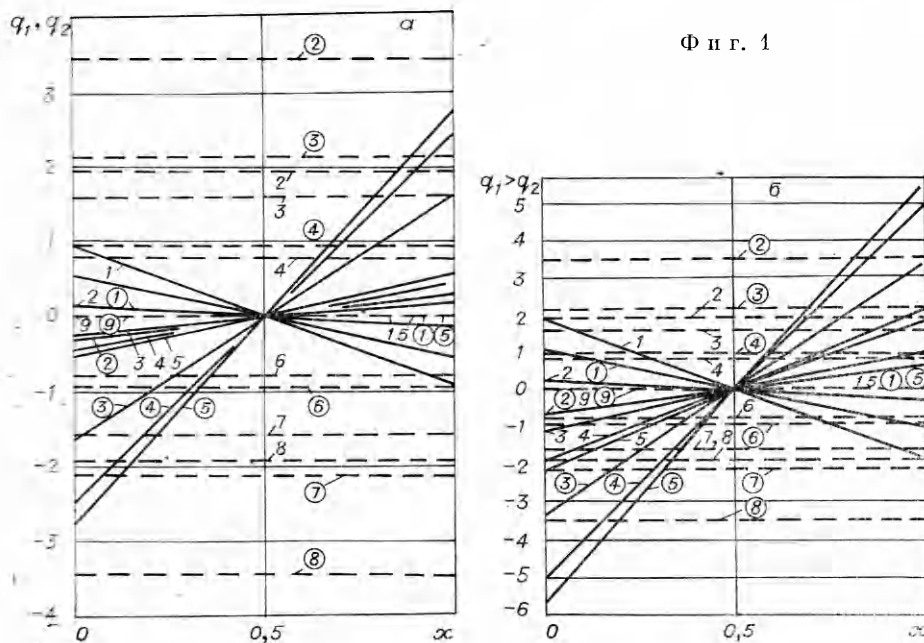
$$\frac{d^3R}{ds^3} = \frac{6\varepsilon}{a_1^2\gamma^4} \left[1 - \frac{3}{4}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon \right) \cos^2\varphi \right] \sin 2\varphi,$$

где $\varepsilon = 1 - \gamma^2$; $\gamma = a_2 a_1^{-1}$; a_1 и a_2 — большая и малая полуоси эллипса; φ — угол, образуемый нормалью к эллипсу с его малой осью.

Введем безразмерные величины $q_1 = p_1 p^{-1}$, $q_2 = p_2 p^{-1}$, $x = \alpha L^{-1}$, $l = La_1^{-1}$,

$$(2.18) \quad z_0 = \{(Ra_1^{-1})^2 + 3[0,5\nu l(1+\nu)^{-1}(0,5 - x)R_{,s}]^2\}^{1/2}.$$

Зависимости q_1 (сплошные линии) и q_2 (штриховые) от x , подсчитанные с помощью формул (2.14), (2.17), показаны на фиг. 1, а (при $l=2$) и фиг. 1, б (при $l=4$). Цифры 1—9 соответствуют значениям $\varphi = 0, \pi/8, \pi/4, 3/8\pi, \pi/2, 5/8\pi, 3/4\pi, 7/8\pi, \pi$, цифры без кружков отвечают случаю $\gamma = 1/2$, а цифры, обведенные кружками, — случаю $\gamma = 1/3$. При счете для определенности брались $\nu = 0,3$.



Ф и г. 1

Таблица 1

l	γ	$\varphi=0$	$\pi/8$	$\pi/4$	$3/8 \pi$	$\pi/2$
2	1/2	2,0	1,240	0,621	0,347	0,250
	1/3	3,0	1,220	0,550	0,256	0,111
4	1/2	2,0	1,457	0,880	0,465	0,250
	1/3	3,0	1,821	0,996	0,454	0,111

В соответствии с условием (2.16) оболочка будет работать упруго, только если выполняется неравенство $2h\sigma_0(a_1p)^{-1} > z_0$. Максимальные значения z_0 вдоль сечений $\varphi = \text{const}$, подсчитанные по формуле (2.18) для рассмотренных l, γ, φ , приведены в табл. 1. Отметим, что в любом сечении

$x = \text{const}$ каждая из величин z_0, q_1 имеет одинаковые значения для точек срединной поверхности, симметричных относительно осей эллипса сечения, а q_2 — для точек, симметричных относительно центра эллипса. При $\gamma = 1$ (круговой цилиндр) из (2.14), (2.15) получим $p_1 = p_2 = T_3 = 0$.

3. Рассмотрим далее две постановки задачи по реализации безмоментного состояния, методы решений которых во многом схожи.

Первая постановка. Пусть заданы: форма срединной поверхности, закон распределения внешней поверхности нагрузки, жесткости $G_k = \omega_k E_k \times (aE)^{-1}$ (предварительное армирование, $k=2, \dots, N$), углы $\psi_n (n=1, \dots, N)$, безмоментные краевые условия. Требуется найти законы изменения толщины h и жесткости G_1 (дополнительное армирование), при которых в такой оболочке реализуется безмоментное состояние.

Вторая постановка. Заданы: форма срединной поверхности, закон распределения внешней поверхностной нагрузки, толщина, жесткости G_k (предварительное армирование, $k=3, \dots, N$), углы $\psi_n (n=1, \dots, N)$, безмоментные краевые условия. Требуется определить законы изменения жесткостей G_1 и G_2 двух дополнительных семейств нитей, при которых напряженное состояние в рассматриваемой оболочке будет безмоментным.

При условиях обеих постановок усилия T_1, T_2, T_3 находятся из уравнений (1.1) с точностью до произволов, определяемых из краевых условий [5].

Для решения первой постановки представим соотношения упругости (1.2) с помощью зависимостей (1.5) в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} a'_{11}\varepsilon_1 + G_1 e_1 l_{11}^2 - T_1 (2haE)^{-1} &= -a'_{12}\varepsilon_2 - a'_{13}\varepsilon_3; \\ a'_{12}\varepsilon_1 + G_1 e_1 l_{21}^2 - T_2 (2haE)^{-1} &= -a'_{22}\varepsilon_2 - a'_{23}\varepsilon_3; \\ a'_{13}\varepsilon_1 + G_1 e_1 l_{11}l_{21} - T_3 (2haE)^{-1} &= -a'_{23}\varepsilon_2 - a'_{33}\varepsilon_3, \end{aligned}$$

где

$$(3.2) \quad \begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_1 l_{11}^2 + \varepsilon_2 l_{21}^2 + \varepsilon_3 l_{11}l_{21}; \\ a'_{ii} &= (1 - \nu^2)^{-1} + \sum_{k=2}^N G_k l_{ik}^4, \quad a'_{12} = \nu(1 - \nu^2)^{-1} + \sum_{k=2}^N G_k l_{1k}^2 l_{2k}^2, \\ a'_{i3} &= \sum_{k=2}^N G_k l_{ik}^3 l_{jk}, \quad a'_{33} = 0,5(1 + \nu)^{-1} + \sum_{k=2}^N G_k l_{1k}^2 l_{2k}^2, \quad i; j = 1, 2, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Полагая $\Delta \neq 0$, из (3.1) находим

$$(3.3) \quad 2h = \Delta \Delta_1^{-1}, \quad G_1 = \Delta_2 (\Delta e_1)^{-1};$$

$$(3.4) \quad \varepsilon_1 = -k_1 \varepsilon_2 + k_2 \varepsilon_3;$$

где

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Delta_i &= (-1)^i (a'_{12}A_i + a'_{22}B_i + a'_{23}C_i) \varepsilon_2 + (-1)^i (a'_{13}A_i + \\ &+ a'_{23}B_i + a'_{33}C_i) \varepsilon_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= -(A_1 T_1 + B_1 T_2 + C_1 T_3); \quad k_1 = \Delta^{-1} (a'_{12} A_3 + a'_{22} B_3 + a'_{23} C_3), \\ k_2 &= \Delta^{-1} (a'_{13} A_3 + a'_{23} B_3 + a'_{33} C_3); \\ A_1 &= (a'_{12} l_{11} - a'_{13} l_{21}) l_{21}, \quad A_2 = a'_{13} T_2 - a'_{12} T_3, \quad A_3 = (T_2 l_{11} - T_3 l_{21}) l_{21}; \\ B_1 &= (a'_{13} l_{11} - a'_{11} l_{21}) l_{11}, \quad B_2 = a'_{11} T_3 - a'_{13} T_1, \quad B_3 = (T_3 l_{11} - T_1 l_{21}) l_{11}; \\ C_1 &= a'_{11} l_{21}^2 - a'_{12} l_{11}^2, \quad C_2 = a'_{12} T_1 - a'_{11} T_2, \quad C_3 = T_1 l_{21}^2 - T_2 l_{11}^2.\end{aligned}$$

Для решения второй постановки запишем соотношения (1.2), используя зависимости (1.5), в виде

$$(3.6) \quad \begin{aligned}a''_{11} \varepsilon_1 + G_1 e_1 l_{11}^2 + G_2 e_2 l_{12}^2 &= T_1 (2haE)^{-1} - a''_{12} \varepsilon_2 - a''_{13} \varepsilon_3; \\ a''_{12} \varepsilon_1 + G_1 e_1 l_{21}^2 + G_2 e_2 l_{22}^2 &= T_2 (2haE)^{-1} - a''_{22} \varepsilon_2 - a''_{23} \varepsilon_3; \\ a''_{13} \varepsilon_1 + G_1 e_1 l_{21} l_{11} + G_2 e_2 l_{12} l_{22} &= T_3 (2haE)^{-1} - a''_{23} \varepsilon_2 - a''_{33} \varepsilon_3,\end{aligned}$$

где

$$(3.7) \quad \begin{aligned}e_i &= \varepsilon_i l_{ii}^2 + \varepsilon_j l_{ji}^2 + \varepsilon_3 l_{ij} l_{ji} \quad (i, j = 1, 2; \quad i \neq j); \\ a''_{ii} &= (1 - \nu^2)^{-1} + \sum_{k=3}^N G_k l_{ik}^4, \quad a''_{12} = \nu (1 - \nu^2)^{-1} + \sum_{k=3}^N G_k l_{1k}^2 l_{2k}^2, \\ a''_{13} &= \sum_{k=3}^N G_k l_{ik}^3 l_{jk}, \quad a''_{33} = 0,5 (1 + \nu)^{-1} + \sum_{k=3}^N G_k l_{1k}^2 l_{2k}^2.\end{aligned}$$

Полагая $\Delta \neq 0$, из (3.5) находим

$$(3.8) \quad G_1 = \Delta_1 \Delta^{-1}, \quad G_2 = \Delta_2 \Delta^{-1};$$

$$(3.9) \quad \varepsilon_1 = F - k_1 \varepsilon_2 + k_2 \varepsilon_3,$$

где

$$(3.10) \quad \begin{aligned}\Delta_i &= (2haE)^{-1} (A_i T_1 + B_i T_2 + C_i T_3) - (a''_{12} A_i + a'_{22} B_i + a''_{23} C_i) \varepsilon_2 - \\ &- (a''_{13} A_i + a''_{23} B_i + a''_{33} C_i) \varepsilon_3,\end{aligned}$$

$$\Delta = \Delta_* \sin(\psi_1 - \psi_2), \quad \Delta_* = \sum_{m=1}^3 a''_{1m} l_m; \quad F = (2haE \Delta_*)^{-1} \sum_{m=1}^3 T_m l_m,$$

$$k_1 = \Delta_*^{-1} \sum_{m=1}^3 a''_{m2} l_m, \quad k_2 = -\Delta_*^{-1} \sum_{m=1}^3 a''_{m3} l_m;$$

$$l_1 = l_{21} l_{22}, \quad l_2 = l_{11} l_{12}, \quad l_3 = -\sin(\psi_1 + \psi_2);$$

$$A_1 = (a''_{13} l_{22} - a''_{12} l_{12}) l_{22}; \quad B_1 = (a''_{11} l_{22} - a''_{13} l_{12}) l_{12}; \quad C_1 = a''_{12} l_{12}^2 - a''_{11} l_{22}^2;$$

$$A_2 = (a''_{12} l_{11} - a''_{13} l_{21}) l_{21}; \quad B_2 = (a''_{13} l_{11} - a''_{11} l_{21}) l_{11}; \quad C_2 = a''_{11} l_{21}^2 - a''_{12} l_{11}^2.$$

Используя далее в качестве единообразного выражения для ε_1 зависимость (3.9), представим уравнения (1.4) в виде

$$(3.11) \quad B \varepsilon_{3,\alpha} - k_2 \varepsilon_{3,\beta} + (B_{,\alpha} - k_{2,\beta}) \varepsilon_3 = (F - k_1 \varepsilon_2)_{,\beta};$$

$$(3.12) \quad [B \varepsilon_{2,\alpha} + (1 + k_1) B_{,\alpha} \varepsilon_2 - k_2 B_{,\alpha} \varepsilon_3 - B_{,\alpha} F]_{,\alpha} = 0.$$

Таким образом, решения обеих постановок сводятся к решению уравнений (3.11), (3.12). Если

$$(3.13) \quad k_2 = 0,$$

то, интегрируя уравнения (3.11), (3.12), находим

$$(3.14) \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{B} \left[\varphi_3(\beta) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} (F - k_1 \varepsilon_2) d\alpha \right];$$

$$(3.15) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B} e^{-I} \left\{ \varphi_2(\beta) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\frac{\partial B}{\partial \alpha} F + \varphi_1(\beta) \right] e^I d\alpha \right\}, \quad I = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{k_1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha,$$

где $\varphi_1(\beta)$, $\varphi_2(\beta)$, $\varphi_3(\beta)$ — произвольные функции интегрирования.

Если $B_{,\alpha} = 0$, то из уравнения (3.12) находим

$$(3.16) \quad \varepsilon_2 = \alpha \varphi_4(\beta) + \varphi_5(\beta),$$

где $\varphi_4(\beta)$, $\varphi_5(\beta)$ — функции интегрирования.

Выберем в данном случае в качестве координаты β длину s дуги β -линии. Тогда $B=1$ и уравнение (3.11) можно представить в виде

$$(3.17) \quad \varepsilon_{3,\alpha} - k_2 \varepsilon_{3,s} = k_{2,s} \varepsilon_3 - f_{,s},$$

где $f = F - k_1 \varepsilon_2$, ε_2 определяется зависимостью (3.16).

Рассмотрим возможные варианты задачи Коши для уравнения (3.17) и их решения:

1) $k_2 = k_2(\alpha)$, $f = f(\alpha)$, $\varepsilon_3|_{\alpha=\alpha_0} = \varepsilon(s)$ (здесь и ниже ε — заданная функция одного переменного).

$$\text{Решение } \varepsilon_3 = \varepsilon \left(s + \int_{\alpha_0}^{\alpha} k_2 d\alpha \right);$$

$$2) \quad k_2 = k_2(s), \quad f = f(\alpha), \quad \varepsilon_3|_{s=s_0} = \varepsilon(\alpha).$$

$$\text{Решение } \varepsilon_3 = \frac{k_2(s_0)}{k_2(s)} \varepsilon \left(\alpha + \int_{s_0}^s \frac{ds}{k_2} \right);$$

$$3) \quad k_2 = k_2(\alpha), \quad \partial f / \partial s = \xi(\alpha), \quad \varepsilon_3|_{\alpha=\alpha_0} = \varepsilon(s).$$

$$\text{Решение } \varepsilon_3 = \varepsilon \left(s + \int_{\alpha_0}^{\alpha} k_2 d\alpha \right) - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \xi d\alpha;$$

$$4) \quad k_2 = \text{const}, \quad f = f(s), \quad \varepsilon_3|_{\alpha=\alpha_0} = \varepsilon(s).$$

$$\text{Решение } \varepsilon_3 = k_2^{-1} \{ f(s) - f[s + (\alpha - \alpha_0) k_2] \} + \varepsilon [s + (\alpha - \alpha_0) k_2];$$

$$5) \quad k_2 = k_2(s), \quad f = f(s), \quad \varepsilon_3|_{s=s_0} = \varepsilon(\alpha).$$

$$\text{Решение } \varepsilon_3 = k_2^{-1}(s) \left\{ k_2(s_0) \varepsilon \left[\alpha + \int_{s_0}^s k_2^{-1}(s) ds \right] + f(s) - f(s_0) \right\}.$$

Если

$$(3.18) \quad k = k_2 B_{,\alpha} \neq 0,$$

то из (3.11), (3.12) получим

$$(3.19) \quad \varepsilon_3 = a_1 \varepsilon_{2,\alpha} + a_2 \varepsilon_2 + a_3; \quad b_1 \varepsilon_{2,\alpha\alpha} + b_2 \varepsilon_{2,\alpha\beta} + b_3 \varepsilon_{2,\alpha} + b_4 \varepsilon_{2,\beta} + b_5 \varepsilon_2 = b_6,$$

где $b_1 = a_1 B$, $b_2 = -k_2 a_1$, $b_3 = B a_2 + (a_1 B)_{,\alpha} - (a_1 k_2)_{,\beta}$, $b_4 = k_1 - a_2 k_2$, $b_5 = (a_2 B)_{,\alpha} - (k_2 a_2)_{,\beta} + k_{1,\beta}$, $b_6 = (F + k_2 a_3)_{,\beta} - (a_3 B)_{,\alpha}$; $a_1 = B k^{-1}$, $a_2 = (1 + k_1) k^{-1}$, $a_3 = -(B_{,\alpha} F + \varphi_6) k^{-1}$; $\varphi_6(\beta)$ — произвольная функция интегрирования.

Уравнение (3.19) является разрешающим для обеих постановок в случае, когда справедливо неравенство (3.18).

Во всех случаях после того, как функции ε_2 , ε_3 найдены, пользуясь зависимостями (3.4) или (3.9), находим функцию ε_1 . Далее для первой постановки искомые функции h и G_1 определяем по формулам (3.3), а для второй постановки искомые функции G_1 и G_2 — по формулам (3.8).

В качестве иллюстрации результатов, полученных для первой постановки, рассмотрим пример. Замкнутая цилиндрическая оболочка эллиптического поперечного сечения (полуоси a_1 и a_2 , $a_1 > a_2$) и длины L нагружена равномерным нормальным давлением ($p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = p = \text{const}$, $p > 0$). Характерный слой оболочки содержит только одно семейство нитей с жесткостью G_1 и углом армирования ψ . На концах цилиндра $\alpha = 0$ и $\alpha = L$ заданы условия:

$$(3.20) \quad T_1|_{\alpha=0} = T_1|_{\alpha=L} = T_1^* = \text{const}, \quad T_3|_{\alpha=0} = -T_3|_{\alpha=L}, \quad \varepsilon_2|_{\alpha=0} = \varepsilon_2|_{\alpha=L},$$

а в центре условия:

$$(3.21) \quad h|_{\alpha=L/2} = h_0 = \text{const}, \quad G_1|_{\alpha=L/2} = 0.$$

Требуется так подобрать толщину h и жесткость G_1 , чтобы цилиндр работал безмоментно.

Пусть угол армирования удовлетворяет равенству

$$(3.22) \quad \text{ctg}^2 \psi = T_1 T_2^{-1}$$

(при этом, очевидно, к рассмотрению допускаются только такие цилиндры и нагрузки, для которых $T_1 \geq 0$). Поскольку по условию примера предварительное армирование отсутствует ($G_k = 0$, $k = 2, \dots, N$), из соотношений (3.2), (3.5) при условии (3.22) следует равенство (3.13).

Тогда, выбрав в качестве параметра β длину дуги направляющей s и используя краевые условия (3.20) и условия (3.21), из (3.3)—(3.5), (1.2), (3.14), (3.15), (1.1) получим

$$(3.23) \quad 2h = 2(1 + \nu) \Delta \{ aE [2(1 + \nu) \varepsilon_2 \sin \psi \cos \psi + (\nu \cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \varepsilon_3] \}^{-1};$$

$$(3.24) \quad G_1 = [2(1 + \nu) \varepsilon_2 T_3 + (\nu T_1 - T_2) \varepsilon_3] (\Delta e_1)^{-1};$$

$$(3.25) \quad \varepsilon_1 = -k_1 \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{T_2^0 - \nu T_1^0}{2h_0 a E}, \quad \varepsilon_3 = - \int_{L/2}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial s} (k_1 \varepsilon_2) d\alpha;$$

$$k_1 = (\nu - \text{ctg}^2 \psi) (1 - \nu \text{ctg}^2 \psi)^{-1};$$

$$T_1 = \frac{\alpha}{2} (\alpha - L) \frac{d^2 R}{ds^2} p + T_1^*, \quad T_2 = R p, \quad T_3 = \left(\frac{L}{2} - \alpha \right) \frac{dR}{ds} p,$$

где $T_i^0 = T_i|_{\alpha=L/2}$ ($i = 1, 2$).

Введем безразмерные величины

$$(3.26) \quad H = h h_0^{-1}; \quad x = \alpha L^{-1}; \quad l = L a_1^{-1}; \quad t = T_1^* (a_1 p)^{-1}; \quad \ddagger \\ z_0 = 2h_0 a E [a_1 p (1 - \nu^2)]^{-1} [(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)^2 - (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) + \\ + 0,75(1 + \nu)^{-2} \varepsilon_3^2]^{1/2}; \quad z_1 = 2h_0 a E e_1 (a_1 p)^{-1}.$$

Примем, что характерный слой армирован по следующей схеме (фиг. 2):



Ф и г. 2

а) на участках $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ и $\pi < \varphi \leq 3/2\pi$ при $0 \leq x \leq 1/2$ $\psi = -\Omega$, при $1/2 < x \leq 1$ $\psi = \Omega$;

б) на участках $\pi/2 < \varphi \leq \pi$ и $3/2\pi < \varphi < 2\pi$ при $0 \leq x \leq 1/2$ $\psi = \Omega$, при $1/2 < x \leq 1$ $\psi = -\Omega$,

где $\Omega = \text{arctg} \sqrt{T_1 T_2^{-1}}$.

Зависимость H от x , подсчитанная при помощи формул (3.23), (2.17), показана на фиг. 3, а (при $l=2$) и на фиг. 3, б ($l=4$). Сплошные и штриховые кривые соответствуют случаям $\gamma=0,8; 0,7$. Цифры 1–5 соответствуют сечениям $\varphi=0, \pi/8, \pi/4, 3/8\pi, \pi/2$, (фиг. 2). При счете для определенности брались $\nu=0,3; t=15$.

Зависимость G_1 от x , подсчитанная по формулам (3.24), (2.17), приведена на фиг. 4, а (при $l=2$) и на фиг. 4, б (при $l=4$). Здесь обозначения те же, что и для фиг. 3. Отметим, что при $\varphi=0, \pi/2$ из (3.25), (2.17) получим $G_1=0$ при любых значениях l, γ, x .

При $\gamma=1$ (круговой цилиндр) из (3.23), (3.24) следует $H \equiv 1, G_1 = 0$.

В табл. 2 даны значения угла Ω в зависимости от x .

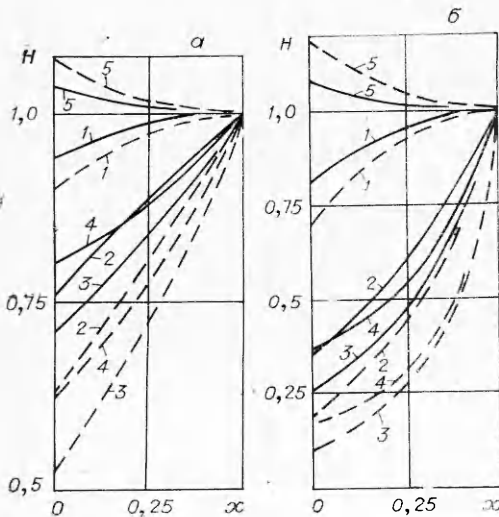
Согласно [1], связующие и нити будут работать упруго, если выполняются неравенства

$$z_0 < 2h_0 a \sigma_0 (a_1 p)^{-1}; \quad 2h_0 a E \sigma_1^- (E_1 a_1 p^{-1}) < z_1 < 2h_0 a E \sigma_1^+ (E_1 a_1 p)^{-1}.$$

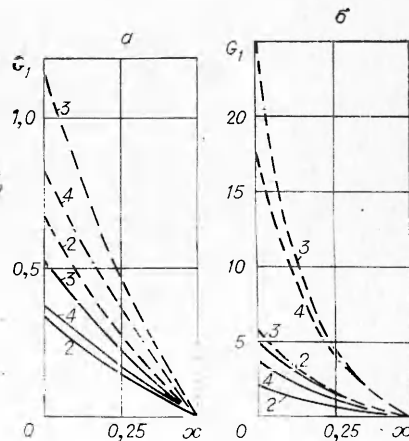
Максимальные значения z_0 и z_1 вдоль сечений $\varphi = \text{const}$, подсчитанные по формулам (3.26), приведены в табл. 3. В числителе даны значения для z_0 , в знаменателе — для z_1 .

Следует отметить, что в любом сечении $x = \text{const}$ каждая из величин H, G_1, z_0, z_1 имеет одинаковые значения в точках срединной поверхности, симметричных относительно осей эллипса такого сечения. Кроме того, вдоль сечений $\varphi = \text{const}$ справедливы равенства $H(x) = H(1-x); G_1(x) = G_1(1-x), z_0(x) = z_0(1-x); z_1(x) = z_1(1-x)$.

В качестве иллюстрации результатов, полученных для второй постановки, рассмотрим пример. Замкнутая цилиндрическая оболочка эллиптического поперечного сечения (полуоси $a_1, a_2; a_1 > a_2$) имеет постоянную толщину ($h = \text{const}$) и нагружена равномерным нормальным давлением



Ф и г. 3



Ф и г. 4

Таблица 2

l	γ	φ	$\alpha=0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,49
2	0,8	$\pi/8$	0,266	0,264	0,263	0,263	0,262	0,262
		$\pi/4$	0,235	0,236	0,239	0,233	0,236	0,236
		$3/8\pi$	0,212	0,214	0,215	0,216	0,216	0,217
	0,7	$\pi/8$	0,271	0,269	0,268	0,267	0,266	0,266
		$\pi/4$	0,222	0,223	0,224	0,224	0,225	0,225
		$3/8\pi$	0,189	0,192	0,194	0,196	0,197	0,198
4	0,8	$\pi/8$	0,265	0,261	0,257	0,254	0,253	0,253
		$\pi/4$	0,235	0,237	0,238	0,239	0,240	0,240
		$3/8\pi$	0,212	0,219	0,224	0,229	0,232	0,233
	0,7	$\pi/8$	0,271	0,264	0,259	0,256	0,254	0,253
		$\pi/4$	0,222	0,227	0,231	0,237	0,236	0,236
		$3/8\pi$	0,189	0,202	0,213	0,223	0,229	0,231

($p_1=p_2=0$, $p_3=p=\text{const}$, $p>0$). Характерный армированный слой содержит два семейства нитей с жесткостями G_1 и G_2 и углами армирования ψ_1 и ψ_2 , причем

$$(3.27) \quad \psi_1 = -\psi_2 = \psi = \text{const.}$$

На краях оболочки $\alpha=0$, $\alpha=L$ (L —длина цилиндра) заданы условия (3.20), и, кроме того, в центре поставлено условие при $\alpha=L/2$:

$$(3.28) \quad G_1 = G_2 = G = \text{const.}$$

Требуется так подобрать жесткости G_1 и G_2 , чтобы в рассматриваемом цилиндре реализовалось безмоментное напряженное состояние.

Поскольку по условию данного примера предварительное армирование отсутствует ($G_k=0$, $k=3, \dots, N$), из (3.7), (3.10) при условии (3.27) следует равенство (3.13). Тогда, взяв в качестве параметра β длину дуги направляющей s и воспользовавшись крайевыми условиями (3.20) и условиями (3.27), (3.28), получим из (3.8)—(3.10), (1.2), (3.14), (3.15)

$$(3.29) \quad G_1 = (\Phi_1 + \Phi_2)(\Delta_* e_1 \sin 2\psi)^{-1}, \quad G_2 = (\Phi_1 - \Phi_2)(\Delta_* e_2 \sin 2\psi)^{-1};$$

$$\Phi_1 = [(2haE)^{-1}(\nu T_1 - T_2) + \varepsilon_2] \sin \psi \cos \psi,$$

$$\Phi_2 = [T_3(2haE)^{-1} - 0,5(1+\nu)^{-1}\varepsilon_3] \Delta_*;$$

$$\Delta_* = \nu \cos^2 \psi - \sin^2 \psi;$$

$$e_1 = \varepsilon_1 \cos^2 \psi + \varepsilon_2 \sin^2 \psi + \varepsilon_3 \sin \psi \cos \psi,$$

Таблица 3

l	γ	$\varphi=0$	$\pi/8$	$\pi/4$	$3/8\pi$	$\pi/2$
2	0,8	15,31	15,01	14,43	14,01	13,85
			13,82	13,58	13,31	
			15,25	14,25	13,46	
	0,7	15,87	13,92	13,42	12,91	13,20
4	0,8	18,01	17,77	16,79	13,67	11,32
			15,03	13,08	11,35	
			21,05	22,16	16,99	
	0,7	20,46	15,60	12,04	9,12	8,52

Таблица 4

l	γ	$\varphi=0$	$\pi/8$	$\pi/4$	$3/8\pi$	$\pi/2$
1	0,8	36,37	36,31	36,23	36,23	36,23
	0,75	36,41	36,33	36,23	36,24	36,24
2	0,8	36,82	36,59	36,23	36,23	36,23
	0,75	37,0	36,66	36,24	36,24	36,23

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 \cos^2 \psi + \varepsilon_2 \sin^2 \psi - \varepsilon_3 \sin \psi \cos \psi, \\
 \varepsilon_1 &= F - k_1 \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = (a_{11}^0 T_2^0 - a_{12}^0 T_1^0) (2haE)^{-1} [a_{11}^0 a_{22}^0 - (a_{12}^0)^2]^{-1}, \\
 \varepsilon_3 &= - \int_{L/2}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial s} (F - k_1 \varepsilon_2) d\alpha; \quad F = \frac{1 - \nu^2}{2haE\Delta_*} (T_2 \cos^2 \psi - T_1 \sin^2 \psi), \\
 k_1 &= (\cos^2 \psi - \nu \sin^2 \psi) \Delta_*^{-1}, \quad T_i^0 = T_i|_{\alpha=L/2} \quad (i = 1, 2); \\
 a_{11}^0 &= (1 - \nu^2)^{-1} + 2G \cos^4 \psi, \quad a_{22}^0 = (1 - \nu^2)^{-1} + 2G \sin^4 \psi, \\
 a_{12}^0 &= \nu(1 - \nu^2)^{-1} + 2G \sin^2 \psi \cos^2 \psi.
 \end{aligned}$$

Усилия T_1, T_2, T_3 определяются формулами (3.25).

Введем безразмерные величины

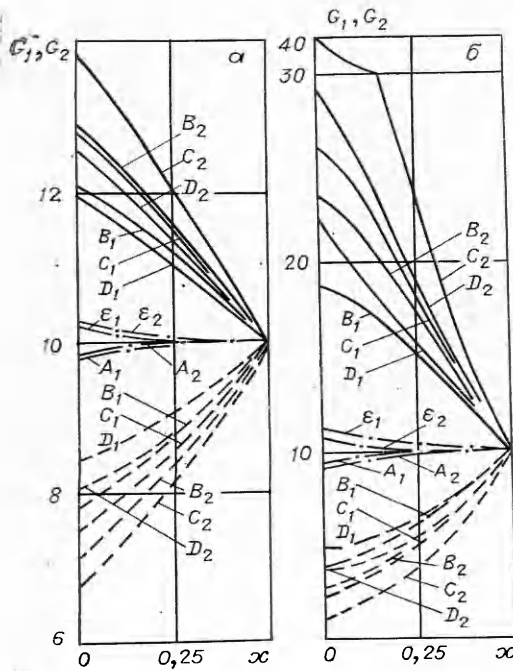
$$\begin{aligned}
 (3.30) \quad l &= La_1^{-1}; \quad t = T_1^*(a_1 p)^{-1}; \quad x = \alpha L^{-1}; \\
 z_0 &= 2haE(1 - \nu^2) a_1 p]^{-1} [(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)^2 - \\
 &\quad - (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) + 0,75(1 + \nu)^{-2} \varepsilon_3^2]^{1/2};
 \end{aligned}$$

$$(3.31) \quad z_1 = 2haEe_1(a_1 p)^{-1}, \quad z_2 = 2haEe_2(a_1 p)^{-1}.$$

Зависимости G_1 (сплошные линии) и G_2 (штриховые) от x , подсчитанные по формулам (3.29), (2.17), показаны на фиг. 5, а (при $l=1$) и на фиг. 5, б (при $l=2$). Штрихпунктирные кривые соответствуют случаю $G_1=G_2$. Буквы А, В, С, D, E обозначают сечения $\varphi=0, \pi/8, \pi/4, 3/8\pi, \pi/2$. Индексы 1, 2 соответствуют значениям $\gamma=0,8; 0,75$. При счете для определенности бралось $\nu=0,3; G=10; \psi=80^\circ; t=40$.

В случае, когда цилиндр круговой ($\gamma=1$), из (3.29) получим $G_1=G_2=G=10$.

Согласно [1], для упругой работы элементов композиции должны выполняться неравенства



Ф и г. 5

$$z_0 < 2ha\sigma_0(a_1 p)^{-1};$$

$$2haE\sigma_1^{-1}(E_1 a_1 p)^{-1} < z_1 < < 2haE\sigma_1^+(E_1 a_1 p)^{-1};$$

$$2haE\sigma_2^-(E_2 a_1 p)^{-1} < z_2 < < 2haE\sigma_2^+(E_2 a_1 p)^{-1}.$$

В рассматриваемом числовом примере формулы (3.21) дают $z_1 < 0, z_2 < 0$, т. е. армирующие нити в составе композиционного материала работают в сжатом состоянии ($e_1 < 0, e_2 < 0$). В табл. 4 приведены максимальные значения z_0 , а в табл. 5 — минимальные значения z_1 (в числителе) и z_2 (в знаменателе) в соответствующих сечениях $\varphi = \text{const}$, подсчитанные по формулам (3.30), (3.31), (2.17).

Таблица 5

l	γ	$\varphi=0$	$\pi/8$	$\pi/4$	$3/8 \pi$	$\pi/2$
1	0,8	$-0,481$	$-0,482$	$-0,492$	$-0,499$	$-0,501$
		$-0,481$	$-0,498$	$-0,512$	$-0,511$	$-0,501$
	0,75	$-0,479$	$-0,481$	$-0,494$	$-0,502$	$-0,504$
		$-0,479$	$-0,503$	$-0,522$	$-0,519$	$-0,504$
2	0,8	$-0,502$	$-0,486$	$-0,491$	$-0,492$	$-0,493$
		$-0,502$	$-0,614$	$-0,666$	$-0,612$	$-0,493$
	0,75	$-0,506$	$-0,486$	$-0,491$	$-0,492$	$-0,492$
		$-0,506$	$-0,659$	$-0,737$	$-0,666$	$-0,492$

Следует отметить, что в любом сечении $x = \text{const}$ каждая из функций G_1, G_2, z_0, z_1, z_2 имеет одинаковые значения в точках срединной поверхности, симметричных относительно осей эллипса сечения. Кроме того, вдоль сечений $\varphi = \text{const}$ имеют место равенства $G_1(x) = G_2(1-x)$; $z_0(x) = z_0(1-x)$; $z_1(x) = z_2(1-x)$.

Поступила 18 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю. В., Старостин Г. И. О возможности реализации безмоментного состояния оболочек путем армирования. — Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 4.
2. Немировский Ю. В., Старостин Г. И. Безмоментные армированные осесимметричные оболочки. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
3. Рождественский Б. Л., Яненко И. П. Системы квазилинейных уравнений. М., Физматгиз, 1968.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.

УДК 539.374

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В. М. Мирсалимов

(Липецк)

Рассматривается упругопластическая задача для плоскости, ослабленной бесконечным рядом круговых отверстий. Предполагается, что уровень напряжений и расстояние между отверстиями таковы, что круговые отверстия целиком охватываются соответствующей пластической зоной, при этом соседние пластические области не сливаются. Также рассматривается обратная упругопластическая задача в условиях плоской деформации для неограниченной плоскости, ослабленной периодическим рядом отверстий. Периодическим задачам теории упругости и пластичности с неизвестной границей был посвящен ряд работ [1—8]. В отличие от работ [1—8], в которых использовался метод возмущений, для решения периодических упругопластических задач применяется другой метод, позволяющий получать решение при любых относительных размерах области.

1. Пусть имеется плоскость с круговыми отверстиями, имеющими радиус $R (R < 1)$ и центры в точках $P_m = m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\omega = 2$. Введем обозначения: L_m — контур отверстия с центром в точке P_m ; Γ_m — соответствующая упругопластическая граница; D_z — внешность контуров Γ_m .

8*