

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ

А. А. Бобнев

(Новосибирск)

**1. Введение.** Предполагая плазму термической, пренебрегая излучением и изменением плотности за счет электромагнитных сил, безразмерные уравнения для стационарной электрической дуги, горящей в цилиндрическом канале, запишем следующим образом [1]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} r^{-1}[r\lambda(T)T'] + E^2\sigma(T) &= 0, \\ r^{-1}(rH)' &= \sigma(T), \quad \rho T = 1, \quad c_p = c_p(T), \quad \mu = \mu(T), \\ E &= \text{const}, \quad H_\varphi = EH. \end{aligned}$$

В качестве граничных условий можно выбрать

$$(1.2) \quad T|_{r=0} = 1, \quad T'|_{r=0} = H|_{r=0} = 0, \quad T|_{r=1} = T_R.$$

Постоянная  $E$  определяется из трех граничных условий для первого уравнения системы (1.1). Здесь  $T$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $E$ ,  $H_\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $c_p$ ,  $\mu$  — безразмерные температура, плотность, электропроводность, напряженность электрического поля, приложенного вдоль оси  $z$ ,  $\varphi$ -я составляющая напряженности собственного магнитного поля, коэффициент теплопроводности, коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении, коэффициент динамической вязкости;  $T_R$  — безразмерная температура на стенке канала;  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  — цилиндрические координаты; здесь и далее штрих означает производную по  $r$ .

Масштабами  $T$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $c_p$ ,  $\mu$  являются значения соответствующих параметров на оси канала (с индексом  $m$ ). Масштабами напряженности электрического поля, напряженности магнитного поля являются

$$E_m = \sqrt{\lambda_m T_m / \sigma_m} / R_m, \quad H_{\varphi m} = E_m \sigma_m R_m.$$

В работе [1] исследована устойчивость электрической дуги по отношению к симметричным возмущениям с учетом вязкости. Оказалось, что для критических кривых (критические параметры ниже будем помечать индексом  $c$ ), отделяющих устойчивые области от неустойчивых, фазовая скорость возмущений равна нулю, а граница устойчивости определяется величиной произведения числа Стюарта на параметр вязкости. Уравнения вместе с граничными условиями в этом случае имеют вид

$$(1.3) \quad \begin{aligned} p' &= -E^2 Q [H(\sigma e + (d\sigma/dT)\theta/\lambda) + \sigma h] + 2r^{-1}(r\mu v)' - \\ &\quad - \mu(2/r^2 + k^2)v + \mu w' - (2/3)\{\mu[r^{-1}(rv)' + w']\}', \\ r^{-1}(r\mu w')' &= -k^2 p - E^2 k^2 Q H h + k^2 r^{-1}(r\mu v)' + \\ &\quad + (4/3)k^2 \mu w - (2/3)k^2 \mu r^{-1}(rv)', \\ r^{-1}(r\rho v)' &= -\rho w, \\ r^{-1}(r\theta')' &= c_p T' \rho v + k^2 \theta - E^2(2\sigma e + (d\sigma/dT)\theta/\lambda), \\ r^{-1}(rh)' &= \sigma e + (d\sigma/dT)\theta/\lambda, \quad e' = k^2 h/\sigma; \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} v = w' = \theta' = h &= 0 \quad \text{при } r = 0, \\ v = w = \theta = h &= 0 \quad \text{при } r = 1. \end{aligned}$$

Здесь  $\theta/\lambda$ ,  $v$ ,  $w/ik$ ,  $Pp$ ,  $Eh$ ,  $Ee$  — амплитуды возмущений соответственно температуры, радиальной составляющей скорости, осевой составляющей скорости, давления,  $\varphi$ -й составляющей напряженности магнитного поля, напряженности электрического поля в проекции на ось  $z$ ;  $k$  — волновое число;  $Q = SP$  — параметр, характеризующий границу устойчивости;  $S = \mu_e \sigma_m \rho_m T_m c_{pm}^2 R_m^2 / \lambda_m$  — число Стюарта;  $P = \rho_m V_m R_m / \mu_m = \lambda_m / \mu_m c_{pm}$  — параметр вязкости;  $\mu_e = 4\pi \cdot 10^{-7}$  кг·м/Кл — магнитная проницаемость. Масштабами времени, скорости, давления являются соответственно

$$t_m = \rho_m c_{pm} R_m^2 / \lambda_m, \quad V_m = R_m / t_m, \quad p_m = \rho_m V_m^2.$$

Граничные условия (1.4) поставлены из соображений об ограниченности функций при  $r = 0$  и о том, что границей канала является непроницаемая, токонепроводящая поверхность с постоянной температурой. Следует заметить, что порядок системы (1.3) можно понизить. Например, из третьего уравнения системы (1.3) можно определить  $v'$  и подставить в первое уравнение. Это обстоятельство следует иметь в виду и в дальнейшем.

В данной работе будет исследована задача (1.1)–(1.4) в случае, когда канал разбивается на электропроводящую и электронепроводящую зоны, причем радиус электропроводящей зоны (радиус дуги  $r_\sigma$ ) мал ( $r_\sigma \ll 1$ )

$$(1.5) \quad \sigma(T) = \begin{cases} \sigma(T) & \text{при } T > T_\sigma, \\ 0 & \text{при } T < T_\sigma \end{cases}$$

( $T_\sigma$  — значение температуры, ниже которой электропроводность равна нулю). Очевидно, что решением для возмущенного магнитного поля вне электрической дуги является

$$(1.6) \quad h = 0 \text{ при } r > r_\sigma.$$

Задавая электропроводность в виде непрерывной функции температуры (а значит, и радиуса), получаем, что и на невозмущенной поверхности электропроводящей зоны ( $r = r_{\sigma_0}$ ) напряженность возмущенного магнитного поля равна нулю

$$(1.7) \quad h|_{r=r_{\sigma_0}} = 0.$$

С использованием выражений (1.6), (1.5) уравнения для электронепроводящей зоны запишем в виде

$$(1.8) \quad \begin{aligned} p' &= 2r^{-1}(r\mu v')' - \mu(2/r^2 + k^2)v + \mu w' - \\ &\quad - (2/3)\{\mu[r^{-1}(rv)' + w]\}', \\ r^{-1}(r\mu w')' &= -k^2 p + k^2 r^{-1}(r\mu v)' + \\ &\quad + (4/3)k^2 \mu w - (2/3)k^2 \mu r^{-1}(rv)', \\ r^{-1}(rpv') &= -\rho w, \quad r^{-1}(r\theta')' = c_p T' \rho v + k^2 \theta. \end{aligned}$$

Решения для возмущений, полученные в электропроводящей и неэлектропроводящей зонах, следует сращивать на невозмущенной поверхности электрической дуги ( $r = r_{\sigma_0}$ ). Подбирая соответствующим образом  $Q$ , можно получить нетривиальное решение задачи (1.3), (1.8), (1.4), (1.7), т. е. в данном случае роль собственного значения выполняет  $Q$ .

2. Решение задачи для  $|\ln r_{\sigma_0}|^{-1} \ll T_R$ . Обычно в электродуговых устройствах температура стенки канала значительно меньше температуры на оси, т. е.  $T_R \ll 1$ . Условие же

$$(2.1) \quad |\ln r_{\sigma_0}|^{-1} \ll T_R$$

означает предельный случай сколь угодно тонкой дуги, причем при исследовании устойчивости горения такой дуги предполагается, что остальные параметры фиксированы. Решение задачи (1.3), (1.8), (1.4), (1.7) при условии (2.1) представляет самостоятельный интерес, а также весьма показательно с методологической точки зрения.

Для простоты исследование устойчивости будем проводить при

$$(2.2) \quad \mu = c_p = \lambda = 1.$$

Отметим тогда, что для электропроводящей зоны невозмущенная температура будет определяться формулой

$$(2.3) \quad T = r_{\sigma_0} T' |_{r=r_{\sigma_0}} \ln r + T_R.$$

Введем обозначения

$$(2.4) \quad \varepsilon^2 = 1 - T_{\sigma}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon/E,$$

а также новые функции

$$(2.5) \quad \tilde{T} = (T - T_{\sigma})/\varepsilon^2, \quad \tilde{H} = H/\varepsilon_1.$$

В предельном процессе  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  ( $r_{\sigma_0} \rightarrow 0$ ),  $\zeta$  фиксировано, внутренняя координата (терминология взята из [2]) имеет вид

$$(2.6) \quad \zeta = r/\varepsilon_1.$$

Тогда уравнения для невозмущенных параметров электрической дуги (1.1) с граничными условиями (1.2) переписываются в виде

$$(2.7) \quad \zeta^{-1}(d/d\zeta)(\zeta d\tilde{T}/d\zeta) + \sigma(\tilde{T}) = 0, \quad \zeta^{-1}(d/d\zeta)(\zeta \tilde{H}) = \sigma(\tilde{T});$$

$$(2.8) \quad d\tilde{T}/d\zeta|_{\zeta=0} = \tilde{H}|_{\zeta=0} = 0, \quad \tilde{T}|_{\zeta=0} = 1$$

и электропроводность запишется в виде

$$(2.9) \quad \sigma = \begin{cases} \sigma(\tilde{T}) & \text{при } \tilde{T} > 0, \\ 0 & \text{при } \tilde{T} < 0. \end{cases}$$

В (2.8) выпущено граничное условие, эквивалентное  $T|_{r=1} = T_R$ , так как решение, записанное в переменной  $\zeta$ , будет интересно лишь при  $r \ll 1$ . Значение  $\zeta$ , при котором  $\tilde{T}$  становится равной нулю, обозначим  $\gamma$ , т. е.

$$(2.10) \quad r_{\sigma_0}/\varepsilon_1 = \gamma.$$

Из вида задачи (2.7), (2.8) очевидно, что  $\gamma$ , а также  $\gamma d\tilde{T}/d\zeta|_{\zeta=\gamma}$  не зависят от  $r_{\sigma_0}$ . Из выражения (2.3) при помощи формул (2.4) — (2.6), (2.10) можно получить связь между  $\varepsilon^2$  и радиусом дуги

$$(2.11) \quad \varepsilon^2 = (1 - T_R)/(\gamma d\tilde{T}/d\zeta|_{\zeta=\gamma} \ln r_{\sigma_0} + 1),$$

откуда ясно, что  $\varepsilon^2 \sim |\ln r_{\sigma_0}|^{-1}$  при  $r_{\sigma_0} \rightarrow 0$ .

Перепишем систему уравнений (1.3), используя новую переменную  $\zeta$  и формулы (2.2), (2.4), (2.5),

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad dp/d\zeta &= -\varepsilon_1 E^2 Q [\varepsilon_1 \tilde{H} (\sigma e + (d\sigma/d\tilde{T})\theta/\varepsilon^2) + \sigma h] + \\
 &+ \varepsilon^{-1} (4/3) (d/d\zeta) [\zeta^{-1} (d/d\zeta) (\zeta v)] - \varepsilon_1 k^2 v + (1/3) dw/d\zeta, \\
 \zeta^{-1} (d/d\zeta) (\zeta dw/d\zeta) &= \varepsilon_1^2 (4/3) k^2 w + \varepsilon_1 (1/3) k^2 \zeta^{-1} (d/d\zeta) (\zeta v) - \\
 &- \varepsilon_1^2 k^2 p - \varepsilon_1^3 E^2 Q k^2 \tilde{H} h, \\
 \zeta^{-1} (d/d\zeta) \{ \zeta v / [1 - \varepsilon^2 (1 - \tilde{T})] \} &= -\varepsilon_1 w / [1 - \varepsilon^2 (1 - \tilde{T})], \\
 \zeta^{-1} (d/d\zeta) (\zeta d\theta/d\zeta) &= \varepsilon^2 \varepsilon_1 (d\tilde{T}/d\zeta) v / [1 - \\
 &- \varepsilon^2 (1 - \tilde{T})] + \varepsilon_1^2 k^2 \theta - \varepsilon^2 (2\sigma e + (d\sigma/d\tilde{T}) \theta / \varepsilon^2), \\
 \zeta^{-1} (d/d\zeta) (\zeta h) &= \varepsilon_1 (\sigma e + (d\sigma/d\tilde{T}) \theta / \varepsilon^2), \\
 de/d\zeta &= \varepsilon_1 k^2 h / \sigma.
 \end{aligned}$$

При решении задачи (1.3), (1.8), (1.4), (1.7) при  $r_{\sigma 0} \rightarrow 0$  используются идеи методов возмущений (см., например, [2]). Асимптотическое разложение собственных функций и собственных значений, пригодное у границы  $r = 0$  (внутреннее разложение), можно построить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad p &= (2T_R Q_0 / \beta^2) \varepsilon_1^{-2} \ln \varepsilon_1 [\tilde{p}_0(\zeta) + \nu_{p1}(\varepsilon_1) \tilde{p}_1(\zeta) + \nu_{p2}(\varepsilon_1) \tilde{p}_2(\zeta) + \dots], \\
 w &= (2T_R Q_0 / \beta^2) k^2 \ln \varepsilon_1 \left[ \tilde{w}_0(\zeta) + \frac{4}{\ln \varepsilon_1} \tilde{w}_1(\zeta) + \nu_{w2}(\varepsilon_1) \tilde{w}_2(\zeta) + \dots \right], \\
 v &= (2T_R Q_0 / \beta^2) k^2 \varepsilon_1 \ln^2 \varepsilon_1 \left[ \tilde{v}_0(\zeta) + \frac{4}{\ln \varepsilon_1} \tilde{v}_1(\zeta) + \nu_{v2}(\varepsilon_1) \tilde{v}_2(\zeta) + \dots \right], \\
 \theta &= \varepsilon^2 [\tilde{\theta}_0(\zeta) + \nu_{\theta 1}(\varepsilon_1) \tilde{\theta}_1(\zeta) + \dots], \quad h = \varepsilon_1 [\tilde{h}_0(\zeta) + \\
 &+ \nu_{h1}(\varepsilon_1) \tilde{h}_1(\zeta) + \dots], \quad e = \tilde{e}_0(\zeta) + \nu_{e1}(\varepsilon_1) \tilde{e}_1(\zeta) + \dots, \\
 Q &= (2T_R / \beta^2) \varepsilon_1^{-2} \varepsilon^{-2} \ln \varepsilon_1 [Q_0 + \nu_{Q1}(\varepsilon_1) Q_1 + \dots],
 \end{aligned}$$

где  $\nu_{p,n+1}/\nu_{pn} \rightarrow 0$ ,  $\nu_{w,n+1}/\nu_{wn} \rightarrow 0$ ,  $\dots$  при  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ , а

$$(2.14) \quad \beta^2 = -\gamma d\tilde{T}/d\zeta|_{\zeta=\gamma}.$$

Подставив асимптотические разложения (2.13) в систему уравнений (2.12), получим

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad d\tilde{p}_0/d\zeta &= -\tilde{H}(\sigma \tilde{e}_0 + (d\sigma/d\tilde{T})\tilde{\theta}_0) - \sigma \tilde{h}_0, \\
 \zeta^{-1} (d/d\zeta) (\zeta d\tilde{w}_1/d\zeta) &= -\tilde{p}_0 - \tilde{H}_0 \tilde{h}_0, \\
 \zeta^{-1} (d/d\zeta) (\zeta d\tilde{\theta}_0/d\zeta) &= -2\sigma \tilde{e}_0 - (d\sigma/d\tilde{T}) \tilde{\theta}_0, \\
 \zeta^{-1} (d/d\zeta) (\zeta \tilde{h}_0) &= \sigma \tilde{e}_0 + (d\sigma/d\tilde{T}) \tilde{\theta}_0, \\
 d\tilde{e}_0/d\zeta = 0, \quad \zeta^{-1} (d/d\zeta) (\zeta d\tilde{w}_0/d\zeta) &= 0, \quad \zeta^{-1} (d/d\zeta) (\zeta \tilde{v}_0) = -\tilde{w}_0, \\
 \zeta^{-1} (d/d\zeta) (\zeta \tilde{v}_1) &= -\tilde{w}_1 - ((1 - T_R)/\beta^2) (d\tilde{T}/d\zeta) \tilde{v}_0.
 \end{aligned}$$

Вне области проводимости ( $\zeta > \gamma$ ) решения системы уравнений (2.15) будут определяться формулами

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_0 &= C_1, \quad d\tilde{w}_1/d\xi = C_1\xi/2 + C_2/\xi, \\
 \tilde{w}_1 &= C_1\xi^2/4 + C_2 \ln \xi + C_3, \quad d\tilde{\theta}_0/d\xi = C_5/\xi, \\
 \tilde{\theta}_0 &= C_5 \ln \xi + C_6, \quad \tilde{w}_0 = C_7, \quad \tilde{v}_0 = -C_7\xi/2, \\
 \tilde{v}_1 &= -C_1\xi^3/16 - C_2((\xi/2) \ln \xi - \xi/4) - \\
 &\quad - C_3\xi/2 + C_4/\xi - C_1(1 - T_R)\xi/4,
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_7$  — постоянные, определяющиеся из условия сшивки решений при  $\xi = \gamma$ , например,

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \tilde{p}_0(\gamma), \quad C_2 = \gamma \frac{d\tilde{w}_1}{d\xi} \Big|_{\xi=\gamma} - \tilde{p}_0(\gamma)\gamma^2/2, \\
 C_3 &= \tilde{w}_1(\gamma) - \tilde{p}_0(\gamma)\gamma^2/4 - C_2 \ln \gamma, \dots
 \end{aligned}$$

При  $r > r_{\sigma 0}$  уравнения (1.8) с использованием формул (2.2), (2.3), (2.5), (2.14) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 p' &= [(4/3)\varepsilon^2\beta^2/r(T_R - \varepsilon^2\beta^2 \ln r)]w - w' - \\
 &\quad - [k^2 - (8/3)\varepsilon^2\beta^2/r^2(T_R - \varepsilon^2\beta^2 \ln r)]v, \\
 r^{-1}(rw')' &= k^2w - k^2p - [(k^2/3)\varepsilon^2\beta^2/r(T_R - \varepsilon^2\beta^2 \ln r)]v, \\
 r^{-1}(rv)' &= -w - [\varepsilon^2\beta^2/r(T_R - \varepsilon^2\beta^2 \ln r)]v, \\
 r^{-1}(r\theta)' &= k^2\theta - [\varepsilon^2\beta^2/r(T_R - \varepsilon^2\beta^2 \ln r)]v.
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Асимптотическое разложение собственных функций, пригодное у границы  $r = 1$  (внешнее разложение), можно построить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 p &= (2T_R k/\beta^2) \ln \varepsilon_1 [p_0(r) + \mu_{p1}(\varepsilon_1)p_1(r) + \\
 &\quad + \mu_{p2}(\varepsilon_1)p_2(r) + \dots], \\
 w &= (2T_R k/\beta^2) \ln \varepsilon_1 [w_0(r) + \mu_{w1}(\varepsilon_1)w_1(r) + \dots], \\
 v &= (2T_R k/\beta^2) \ln \varepsilon_1 [v_0(r) + \mu_{v1}(\varepsilon_1)v_1(r) + \dots], \\
 \theta &= \varepsilon^2 \ln \varepsilon_1 [\theta_0(r) + \mu_{\theta 1}(\varepsilon_1)\theta_1(r) + \dots],
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

где  $\mu_{p,n+1}/\mu_{p,n} \rightarrow 0$ ,  $\mu_{w,n+1}/\mu_{w,n} \rightarrow 0, \dots$  при  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ .

Подставив выражения (2.18) в систему (2.17), получим в нулевом приближении следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 p'_0 &= -w'_0 - k^2v_0, \quad r^{-1}(rw'_0)' = k^2w_0 - k^2p_0, \\
 r^{-1}(rv'_0)' &= -w_0, \quad r^{-1}(r\theta'_0)' = -(2k/r)v_0 + k^2\theta_0.
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Решением системы (2.19) будет (см., например, [3])

$$\begin{aligned}
 v_0 &= B_1 I_1(kr) + B_2 K_1(kr) + B_3 kr I_0(kr) + B_4 kr K_0(kr), \\
 w_0 &= -B_1 k I_0(kr) + B_2 k K_0(kr) - B_3 k [2I_0(kr) + \\
 &\quad + kr I_1(kr)] - B_4 k [2K_0(kr) - kr K_1(kr)], \\
 w'_0 &= -B_1 k^2 I_1(kr) - B_2 k^2 K_1(kr) - B_3 k^2 [2I_1(kr) + \\
 &\quad + kr I_0(kr)] + B_4 k^2 [2K_1(kr) - kr K_0(kr)], \\
 p_0 &= 2B_3 k I_0(kr) + 2B_4 k K_0(kr),
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -B_1 I_0(kr) \ln kr + B_2 K_0(kr) \ln kr - B_3 kr I_1(kr) + \\ &\quad + B_4 kr K_1(kr) + B_5 I_0(kr) + B_6 K_0(kr), \\ \theta'_0 &= -B_1 [k I_1(kr) \ln kr + I_0(kr)/r] + B_2 [-k K_1(kr) \ln kr + K_0(kr)/r] - \\ &\quad - B_3 k^2 r I_0(kr) - B_4 k^2 r K_0(kr) + B_5 k I_1(kr) - B_6 k K_1(kr), \end{aligned}$$

где  $I_0, I_1$  — модифицированные функции Бесселя;  $K_0, K_1$  — функции Макдональда;  $B_1, B_2, \dots, B_6$  — произвольные постоянные. Не останавливаясь на построении решения (2.20), отметим, что правильность его можно подтвердить проверкой.

Для сращивания внутреннего и внешнего разложений рассмотрим промежуточный предел

$$(2.21) \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad r_\eta = r/\eta \text{ фиксировано,}$$

где

$$\varepsilon_1 \ll \eta \ll 1 \text{ или } \eta/\varepsilon_1 \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0.$$

В пределе (2.21)  $r = \eta r_\eta \rightarrow 0, \zeta = (\eta/\varepsilon_1) r_\eta \rightarrow \infty$ . При сращивании первых членов внутреннего и внешнего разложений, используя определение (2.21), формулы (2.10), (2.11), (2.14), (2.16), (2.20), а также выражения для функций  $I_0, I_1, K_0, K_1$  в виде рядов, имеем (срачиваются последовательно функции  $p, w', w, v, \theta', \theta$ )

$$(2.22) \quad \begin{aligned} C_1 &= 0, \quad Q_0 C_2 = 2B_4, \quad 0 = B_2, \quad 0 = B_1 + B_6, \\ -C_5 &= B_4 + B_5 + B_6 (\ln 2 - C), \quad -C_2 + C_7 = 0, \\ C_3 Q_0 &= -B_1 - 2B_3 + B_4 [2 \ln(k/2) + 2C + 1], \end{aligned}$$

где  $C = 0,577 \dots$  — постоянная Эйлера. Здесь при записи выражений (2.22) использовано  $B_2 = 0$ . Или с помощью формул (2.16) получим

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \tilde{p}_0(\gamma) &= 0, \quad Q_0 k \gamma d\tilde{w}_1/d\zeta|_{\zeta=\gamma} = \lim_{r \rightarrow 0} (r w'_0), \\ 0 &= v_0|_{r=0}, \quad 0 = \theta'_0|_{r=0}, \quad -\gamma d\tilde{\theta}_0/d\zeta|_{\zeta=\gamma} = \theta_0|_{r=0}, \\ (\tilde{w}_0 - \gamma d\tilde{w}_1/d\zeta)|_{\zeta=\gamma} &= 0, \quad Q_0 (\tilde{w}_1 - \gamma \ln \gamma d\tilde{w}_1/d\zeta)|_{\zeta=\gamma} = \lim_{r \rightarrow 0} (w_0/\ln r). \end{aligned}$$

Нулевые и последующие члены асимптотических разложений (2.13), (2.18) (внутреннего и внешнего разложений), как это следует из (1.4), (1.7), должны удовлетворять граничным условиям

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_n = d\tilde{w}_n/d\zeta = d\tilde{\theta}_n/d\zeta = \tilde{h}_n &= 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad \tilde{h}_n = 0 \text{ при } \zeta = \gamma, \\ v_n = w_n = \theta_n &= 0 \text{ при } r = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Следует отметить, что для определения собственного значения  $Q_0$  достаточно первых пяти уравнений системы (2.15) (это вытекает из условий (2.23)). Из выражений (2.20), (2.22), (2.24) можно выразить  $B_1, B_3, B_5$  через  $B_4$

$$(2.25) \quad B_1 = b_1 B_4, \quad B_3 = b_3 B_4, \quad B_5 = b_5 B_4,$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= k^2 [K_0(k) I_1(k) + I_0(k) K_1(k)] / \{k I_0(k) - \\ &\quad - I_1(k) [2I_0(k) + k I_1(k)]\}; \\ b_3 &= \{I_1(k) [2K_0(k) - k K_1(k)] - k K_0(k) I_0(k)\} / \{k I_0(k) - I_1(k) \times \\ &\quad \times [2I_0(k) + k I_1(k)]\}; \quad b_5 = \{b_1 [I_0(k) \ln k + K_0(k)] + \\ &\quad + b_3 k I_1(k) - k K_1(k)\} / I_0(k). \end{aligned}$$

$$(2.26) \quad \text{При} \quad \sigma(\tilde{T}) = \begin{cases} \tilde{T} & \text{при } \tilde{T} > 0, \\ 0 & \text{при } \tilde{T} < 0 \end{cases}$$

задачи (2.7), (2.8), (2.15), (2.24) можно решить аналитически. Решения для невозмущенных параметров в электропроводящей зоне имеют вид

$$(2.27) \quad \tilde{T} = J_0(\xi), \quad \tilde{H} = J_1(\xi)$$

при  $\xi < \gamma$ ,  $\gamma = 2,405$  — значение первого положительного корня уравнения  $J_0(\gamma) = 0$ ;  $J_0$ ,  $J_1$  — функции Бесселя. Используя формулы (2.27), (2.26), решения для возмущений задачи (2.15), (2.24) можно записать в виде

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \tilde{e}_0 &= A_1, \quad \tilde{\theta}_0 = A_1[J_0(\xi) - \xi J_1(\xi)], \quad \tilde{h}_0 = A_1 \xi J_0(\xi), \\ \tilde{p}_0 &= A_1 [J_0^2(\xi) - \xi J_0(\xi) J_1(\xi)], \\ d\tilde{w}_1/d\xi &= -A_1 \xi [J_0^2(\xi) + J_1^2(\xi)], \end{aligned}$$

здесь записаны лишь решения, необходимые для определения  $Q_0$ . Подставив (2.28) в (2.22) и используя (2.26), получим

$$(2.29) \quad \begin{aligned} -A_1 \gamma^2 J_1^2(\gamma) Q_0 &= 2B_4, \\ A_1 \gamma J_1(\gamma) &= B_4 \{1 + b_5 - b_1(\ln 2 - C)\}. \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель системы уравнений (2.29) относительно неизвестных  $A_1$ ,  $B_4$ , можно найти  $Q_0$ .

На фиг. 1 изображена функция  $Q_0(k)$ , область устойчивости помечена буквой  $u$ , область неустойчивости —  $n$ . Очевидно, что  $|Q_0|$  достигает минимума при  $k \rightarrow \infty$ , т. е. наиболее неустойчивыми являются возмущения с большими волновыми числами.

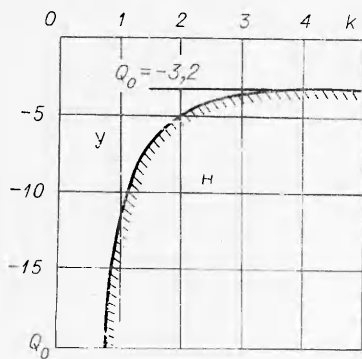
На фиг. 2 построены собственные функции нулевого приближения в электропроводящей области, а на фиг. 3 — вне ее при  $k = 4$ . Из фиг. 2, 3, а также из разложений (2.13), (2.18) следует, что с уменьшением радиуса дуги наиболее интенсивно растет амплитуда возмущения давления, причем максимум давления, а также максимум продольной составляющей скорости (имеются в виду максимумы амплитуд возмущений) находятся на оси канала. Максимум температурного возмущения находится около электропроводящей зоны, но вне ее. Максимум возмущения радиальной скорости находится вне электропроводящей зоны.

3. Решение задачи для  $|\ln r_{c0}|^{-1} = O(T_R)$ . В случае, когда температура стенки есть величина одного порядка малости с  $|\ln r_{c0}|^{-1}$  (или с  $\varepsilon^2$ ), можно ввести обозначения

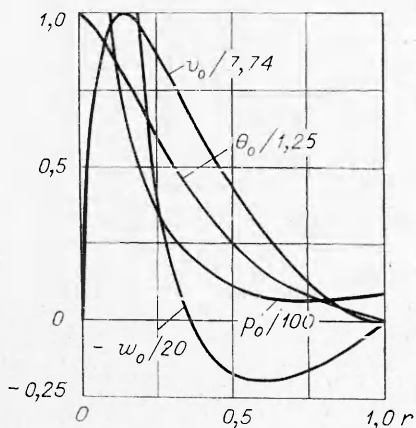
$$(3.1) \quad T_R = \varepsilon^2 \beta^2 t_R.$$

Тогда, используя внутреннюю переменную  $\xi$  (см. (2.6)), а также формулы (2.3) — (2.5), вблизи границы  $r = 0$  построим асимптотическое разложение собственных функций и собственных значений

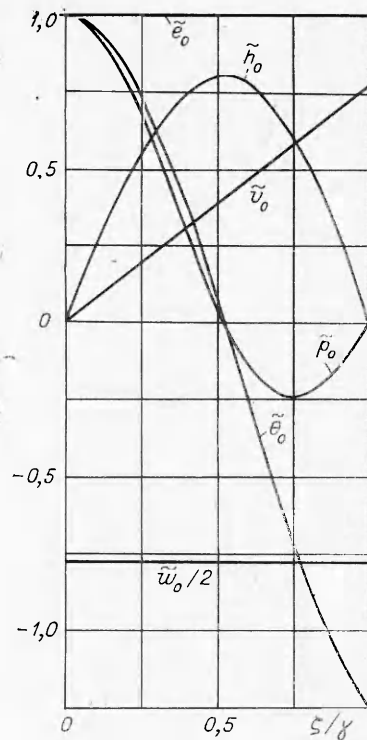
$$(3.2) \quad \begin{aligned} p &= Q_0 \varepsilon_1^{-2} [\tilde{p}_0(\xi) + \nu_{p1}(\varepsilon_1) \tilde{p}_1(\xi) + \nu_{p2}(\varepsilon_1) \tilde{p}_2(\xi) + \dots], \\ w &= k^2 Q_0 \ln \varepsilon_1 [\tilde{w}_0(\xi) + (\ln \varepsilon_1)^{-1} \tilde{w}_1(\xi) + \nu_{w2}(\varepsilon_1) \tilde{w}_2(\xi) + \dots], \\ v &= k^2 Q_0 \varepsilon_1 \ln \varepsilon_1 [\tilde{v}_0(\xi) + (\ln \varepsilon_1)^{-1} \tilde{v}_1(\xi) + \nu_{v2}(\varepsilon_1) \tilde{v}_2(\xi) + \dots], \\ \theta &= \varepsilon^2 [\tilde{\theta}_0(\xi) + \nu_{\theta 1}(\varepsilon_1) \tilde{\theta}_1(\xi) + \dots], \quad h = \varepsilon_1 [\tilde{h}_0(\xi) + \\ &\quad + \nu_{h1}(\varepsilon_1) \tilde{h}_1(\xi) + \dots], \\ e &= \tilde{e}_0(\xi) + \nu_{e1}(\varepsilon_1) \tilde{e}_1(\xi) + \dots, \quad Q = \varepsilon^{-2} \varepsilon_1^{-2} [Q_0 + \nu_{Q1}(\varepsilon_1) Q_1 + \dots]. \end{aligned}$$



Ф и г. 1



Ф и г. 3



Ф и г. 2

Подставив асимптотические ряды (3.2) в уравнения (2.12) и имея в виду (3.1), получим систему уравнений (2.15), за исключением последнего уравнения, которое имеет несколько иной вид и в дальнейшем не понадобится.

Асимптотическое разложение собственных функций, пригодное вблизи границы  $r = 1$  (внешнее разложение), можно представить в виде

$$(3.3) \quad \begin{aligned} p &= p_0(r) + \mu_{p1}(\epsilon_1)p_1(r) + \mu_{p2}(\epsilon_1)p_2(r) + \dots, \\ w &= w_0(r) + \mu_{w1}(\epsilon_1)w_1(r) + \dots, \quad v = v_0(r) + \mu_{v1}(\epsilon_1)v_1(r) + \dots, \\ \theta &= \theta_0(r) + \mu_{\theta1}(\epsilon_1)\theta_1(r) + \dots, \end{aligned}$$

где  $\mu_{p,n+1}/\mu_{pn} \rightarrow 0$ ,  $\mu_{w,n+1}/\mu_{wn} \rightarrow 0$ ,  $\dots$  при  $\epsilon_1 \rightarrow 0$ .

Тогда, подставив ряды (3.3) в систему (2.17), получим в нулевом приближении следующую систему уравнений:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} p_0' &= -w_0' + (4/3)w_0/r(t_R - \ln r) - [k^2 - 8/3r^2(t_R - \ln r)]v_0, \\ r^{-1}(rv_0)' &= -w_0 - v_0/r(t_R - \ln r), \\ r^{-1}(rw_0)' &= k^2w_0 - k^2p_0 - k^2v_0/3r(t_R - \ln r) \\ r^{-1}(r\theta_0)' &= k^2\theta_0 - v_0/r(t_R - \ln r). \end{aligned}$$

Поведение решений системы уравнений (3.4) при  $r \rightarrow 0$  совпадает с поведением решений системы (2.19), поэтому при сращивании внешнего и



внутреннего разложения можно получить условия, аналогичные (2.23):

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \tilde{p}_0(\gamma) = 0, \quad k^2 Q_0 \gamma d\tilde{w}_1/d\zeta|_{\zeta=\gamma} = \lim_{r \rightarrow 0} (r w_0'), \\ 0 = \nu_0|_{r=0}, \quad 0 = \theta_0'|_{r=0}, \quad \gamma d\tilde{\theta}_0/d\zeta|_{\zeta=\gamma} = \theta_0|_{r=0} \end{aligned}$$

(здесь выписаны лишь условия сращивания, необходимые для определения собственного значения  $Q_0$ ). Очевидно также, что нулевые и последующие члены внутреннего и внешнего разложений (3.2), (3.3) должны удовлетворять граничным условиям (2.24). Системы уравнений (2.15), (3.4) с условиями (2.24), (3.5) решены численно при  $\sigma(\tilde{T})$  в виде (2.9), когда величина  $t_R$  менялась от 0 до  $\infty$ . На фиг. 4 изображены критические кривые  $Q_{0c}(t_R)$  и  $k_c(t_R)$ . При  $t_R \rightarrow \infty$   $Q_{0c}(t_R)$  асимптотически стремится к  $6,4 t_R$ , а  $k_c(t_R)$  — к  $1,46 \lg t_R + 3,32$ , что согласуется с расчетом критической кривой в п. 2 (когда  $|\ln r_{c0}| \ll T_R$ ). При  $t_R \rightarrow \infty$  можно построить асимптотическое разложение собственных функций и собственных значений задачи (2.15), (3.4), (2.24), (3.5) по степеням малого параметра  $t_R^{-1}$ , приводящего в нулевом приближении к задаче (2.15), (2.19), (2.24), (2.23); однако в связи с очевидной простотой такого построения проведено не будет.

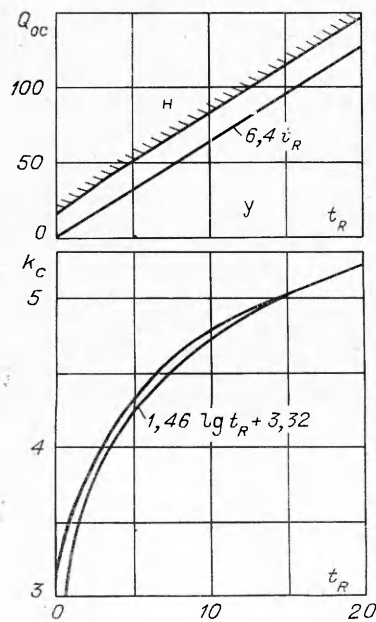
На фиг. 5 построены собственные функции задачи (2.15), (3.4), (2.24), (3.5) вне электропроводящей области при  $\sigma = \sigma(\tilde{T})$  в виде (2.26) при  $t_R \rightarrow 0$  и при  $k = 4$  (в электропроводящей зоне собственные функции будут выглядеть, как на фиг. 2). Очевидно, что вид этих кривых ( $t_R \rightarrow 0$ ) весьма похож на вид собственных функций, изображенных на фиг. 3 ( $t_R \rightarrow \infty$ ), хотя, конечно, не нужно забывать о коэффициентах, стоящих перед собственными функциями в асимптотических разложениях (2.13), (2.18) и (3.2), (3.3), а также то, что вектор собственных функций определяется с точностью до постоянного (не зависящего от  $r$ ) множителя.

Были построены численно критические кривые  $Q_{0c}$  и  $k_c$  для задачи (2.15), (3.4), (2.24), (3.5) при варьировании профиля электропроводности при  $t_R \rightarrow 0$ . Электропроводность  $\sigma = \sigma(\tilde{T})$  задавалась при этом следующим однопараметрическим семейством кривых:

$$\sigma(\tilde{T}) = \begin{cases} e^{\alpha \tilde{T}} - 1 & \text{при } \tilde{T} > 0, \\ e^{\alpha} - 1 & \\ 0 & \text{при } \tilde{T} < 0 \quad (-\infty < \alpha < \infty). \end{cases}$$

Очевидно, что при больших отрицательных  $\alpha$  профиль  $\sigma(\tilde{T})$  будет наиболее наполненным и, наоборот, при  $\alpha \rightarrow \infty$  — наименее, при  $\alpha \rightarrow 0$  профиль электропроводности становится линейной функцией температуры.

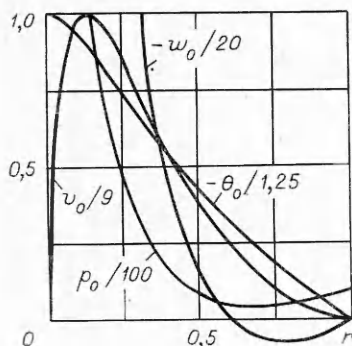
На фиг. 6 показаны рассчитанные критические кривые  $Q_{0c}(\alpha)$ ,  $k_c(\alpha)$ . Очевидно, что наполненный профиль  $\sigma(\tilde{T})$  ( $\alpha \rightarrow -\infty$ ) более устойчив, чем профиль  $\sigma(\tilde{T})$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ . При  $\alpha \rightarrow -\infty$   $Q_{0c}(\alpha) \rightarrow 18$ , при  $\alpha \rightarrow \infty$   $Q_{0c}(\alpha) \rightarrow 0$ . Однако, как следует из фиг. 6, зависимость  $Q_{0c}$  от  $\alpha$  немонотонна. При изменении  $\alpha$  от  $\infty$  до  $-6$   $Q_{0c}$  возрастает от 0 до



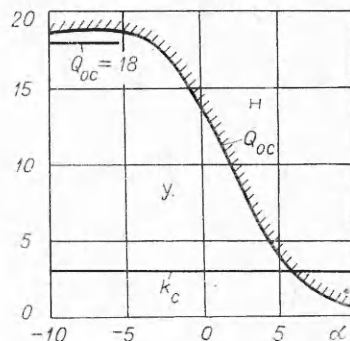
Ф и г. 4

18,8, а при дальнейшем уменьшении  $\alpha$  от  $-6$  до  $-\infty$   $Q_{oc}$  уменьшается от 18,8 до 18.

Следует отметить, что критическое значение волнового числа  $k_c$  не зависит от  $\alpha$ . Это легко показать. В самом деле, для описания электропроводящей области из системы (2.15) можно выделить замкнутую систему



Ф и г. 5



Ф и г. 6

уравнений шестого порядка (в системе (2.15) это первые пять уравнений, у которых введением новой функции

$$(3.6) \quad \bar{u}_1(\zeta) = d\bar{w}_1/d\zeta$$

можно понизить порядок с седьмого до шестого) с пятью граничными условиями: три условия ограниченности

$$(3.7) \quad \tilde{u}_1 = d\tilde{\theta}_0/d\zeta = \tilde{h}_0 = 0 \text{ при } \zeta = 0$$

и два условия

$$\tilde{p}_0 = \tilde{h}_0 = 0 \text{ при } \zeta = \gamma,$$

т. е. функции  $\tilde{u}_1$  и  $d\tilde{\theta}_0/d\zeta$ , необходимые для сращивания внешнего и внутреннего асимптотических разложений, определяются с точностью до постоянного множителя, например  $A_1$ .

Для описания области, где  $\sigma = 0$ , в нулевом приближении имеется также система уравнений шестого порядка (это система (2.4)) с пятью граничными условиями: три граничных условия

$$v_0 = w_0 = \theta_0 = 0 \text{ при } r = 1$$

и два условия  $v_0 = \theta_0 = 0$  при  $r = 0$ , т. е. функции  $w_0(r)$ ,  $\theta_0(r)$ , необходимые для сращивания, определяются с точностью до постоянного множителя, например  $A_2$ .

Из условий сращивания (3.5), имея в виду (3.6), получим

$$A_1 k^2 Q_0 \gamma \tilde{u}_1(\gamma) = A_2 \lim_{r \rightarrow 0} (r w_0'),$$

$$A_1 \gamma d\tilde{\theta}_0/d\zeta|_{\zeta=\gamma} = A_2 \theta_0|_{r \rightarrow 0},$$

откуда при  $A_1 \neq 0$ ,  $A_2 \neq 0$  имеем

$$(3.8) \quad Q_0 = [(\tilde{d}\theta_0/d\tilde{\zeta})_{\tilde{\zeta}=\gamma}/\tilde{u}_1(\gamma)] \left[ \left( \lim_{r \rightarrow 0} (rw_0') \right) / (k^2\theta_0(0)) \right].$$

Необходимо отметить, что  $\tilde{u}_1(\gamma)$  и  $\tilde{d}\theta_0/d\tilde{\zeta}|_{\tilde{\zeta}=\gamma}$  являются функциями только  $\alpha$  (это следует из вида уравнений (2.15) и граничных условий (3.7)), а  $\lim_{r \rightarrow 0} (rw_0')$  и  $\theta_0(0)$  являются функциями  $k$  и  $t_R$  (это видно из (2.4)<sub>2</sub> (2.9)). Тогда выражение для  $Q_0$  (3.8) можно записать в виде

$$Q_0 = f_1(\alpha)f_2(k, t_R).$$

Критическое значение  $k = k_c$  определяется условием

$$dQ_0/dk = f_1(\alpha)df_2(k, t_R)/dk = 0,$$

или

$$(d/dk)f_2(k, t_R) = 0,$$

откуда видно, что критическое значение волнового числа  $k_c$  не зависит от  $\alpha$ , или более обще от профиля  $\sigma(\tilde{T})$ .

В заключение исследования устойчивости тонкой электрической дуги к симметричным возмущениям следует отметить:

1) граница устойчивости для сколь угодно тонкой электрической дуги (остальные параметры фиксированы) определяется величиной комплекса  $Q\beta^2\varepsilon^2\varepsilon_1^2/T_R \ln \varepsilon_1$ , причем критическое значение этого комплекса равно  $-6, 4$ , а критическое значение волнового числа стремится к бесконечности;

2) в том случае, когда температура стенки сравнима или меньше  $|\ln r_{c0}|^{-1}$ , граница устойчивости определяется величиной комплекса  $Q\varepsilon^2\varepsilon_1^2$ , при этом в зависимости от температуры стенки критическое значение этого комплекса меняется от  $14$  до  $\infty$ , а критическое волновое число —  $3,01$  до  $\infty$ ;

3) при варьировании профиля электропроводности как функции температуры оказывается, что более наполненный профиль более устойчив (хотя, точнее, эта зависимость немонотонна), а критическое волновое число не зависит от профиля электропроводности.

Все расчеты проведены на ЭВМ, при численных расчетах использовался метод линейно-независимых решений (см., например, [4]), относительная точность рассчитанных кривых не ниже  $10^{-2}$ .

Поступила 10 III 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бобнев А. А. Влияние вязкости на устойчивость электрической дуги. — ПМТФ, 1978, № 4.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
3. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., «Наука», 1971.
4. Сапожников В. А. Численное решение задач гидродинамической устойчивости. — В кн.: Труды секции по численным методам в газовой динамике второго международного коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем. Т. III. М., изд. ВЦ АН СССР, 1971.