

ОБ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ  
СТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ В НЕЛИНЕЙНО ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

*И. М. Руткевич*

(Москва)

Рассмотрена простейшая двумерная задача о распределении тока в нелинейно проводящей среде над плоской стенкой, составленной из полубесконечных электрода и изолятора.

При расчете стационарных электрических полей в некоторых средах необходимо учитывать зависимость электропроводности от величины протекающего тока. К таким средам относится, в частности, двухтемпературная плазма с неравновесной ионизацией [1,2].

Известно, что при задании проводимости как функции координат электрический потенциал в принципе может быть определен из решения линейного уравнения эллиптического типа [3]. В случае зависимости проводимости от плотности тока  $j$  уравнения электродинамики становятся нелинейными [4,5], что приводит к значительным осложнениям при решении задач. Эти уравнения в случаях, когда можно пренебречь эффектом Холла, посредством преобразования годографа сводятся к линейным [5] на плоскости годографа вектора  $\mathbf{j}$ .

В случае, когда закон проводимости близок к линейному, например, при достаточно малой величине плотности тока, можно использовать линеаризованные уравнения [8].

В предлагаемой работе методом годографа получено точное решение при произвольном законе изменения нелинейной проводимости. В формальном отношении данная задача аналогична газодинамической задаче об обтекании пластины. Проанализирован случай, отвечающий частному закону изменения проводимости.

1. Рассмотрим движение изотропно проводящей жидкости с заданным полем скорости  $\mathbf{V} = (u(y), 0, 0)$  поперек постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$ ,  $H_0 = \text{const}$ . Основные уравнения стационарной электродинамики имеют вид

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (1.1)$$

Если магнитное число Рейнольдса  $R_m$  мало, то в законе Ома можно пренебречь индуцированным магнитным полем, так что

$$\mathbf{j} = \sigma(j) (\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{V} \times \mathbf{H}_0) \equiv \sigma(j) \mathbf{q} \quad (1.2)$$

Поскольку соотношение (1.2) определяет связь между  $j$  и  $q$ , то проводимость  $\sigma$  можно считать функцией  $q$ , что и предполагается в дальнейшем. Для определенных выше векторов  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{H}_0$  выполнено условие  $\text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}_0) = 0$ , поэтому  $\mathbf{q}$  будет потенциальным вектором:  $\mathbf{q} = -\nabla\phi$ . Считая, что ток течет только в плоскости  $xy$ , из (1.1) легко получить квазилинейное уравнение второго порядка относительно  $\phi$

$$\left[ 1 + \frac{\delta}{q^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\delta}{q^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \left[ 1 + \frac{\delta}{q^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \left( \delta = \frac{d \ln \sigma}{d \ln q} \right) \quad (1.3)$$

Последнее уравнение можно также переписать в виде

$$\left(1 + \frac{\delta q_x^2}{q^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\delta \frac{q_x q_y}{q^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{\delta q_y^2}{q^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

В такой форме этому уравнению будет удовлетворять и функция тока  $\psi(x, y)$ , которую можно ввести на основании второго уравнения (1.1), так что  $j_x = \partial \psi / \partial y$ ,  $j_y = -\partial \psi / \partial x$ .

Тип уравнения (1.3) определяется знаком выражения  $\Delta = 1 + \delta(q)$ . Уравнение будет эллиптическим при  $\Delta > 0$  и гиперболическим при  $\Delta < 0$ . Распределение тока, отвечающее области гиперболичности, неустойчиво [7]. Условие эллиптичности на языке зависимости  $\sigma = \sigma_1(j)$  приведено в работах [5,7] и имеет вид  $\delta_1 = d \ln \sigma / d \ln j < 1$ . Нетрудно показать, что последнее неравенство эквивалентно условию  $\delta > -1$ . Отметим также, что область эллиптичности отвечает возрастающим, а область гиперболичности — падающим участкам на кривой зависимости  $j$  от  $q$ .

Перейдем от физической плоскости  $xy$  к плоскости годографа вектора  $\mathbf{q}$ , считая новыми независимыми переменными величины  $q$  и  $\theta$ , где

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{q_y}{q_x}$$

На плоскости годографа функция тока  $\psi$  удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{1 + \delta(q)}{q^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1 - \delta(q)}{q} \frac{\partial \psi}{\partial q} = 0 \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) несколько проще, чем то, которому удовлетворяет «потенциал»  $\varphi(q, \theta)$ . Если  $\psi(q, \theta)$  — известное решение уравнения (1.4), то переход к физической плоскости осуществляется посредством интегрирования простых линейных уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{\sigma q} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cos \theta - \frac{1}{\sigma q} \frac{\partial \psi}{\partial q} \sin \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial q} \cos \theta - \frac{1}{\sigma q} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial q} = \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{\sigma q} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{1}{\sigma q} \frac{\partial \psi}{\partial q} \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial q} \sin \theta + \frac{1}{\sigma q} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cos \theta$$

После того как из (1.5) найдены функции  $x(q, \theta)$ ,  $y(q, \theta)$  по ним находятся обратные функции  $q(x, y)$ ,  $\theta(x, y)$ . Выполнение обратного преобразования в большинстве случаев затруднительно, однако знание функций  $x(q, \theta)$ ,  $y(q, \theta)$  позволяет извлечь основную информацию о характере решения.

2. В [5] была отмечена аналогия между уравнениями стационарной электродинамики в нелинейной среде и уравнениями потенциального течения сжимаемого газа при заданной связи плотности со скоростью. Отметим, что существуют два пути сопоставления течения электрического тока с потоком газа. Первый путь отвечает зависимости  $\sigma(j)$  и переходу к плоскости годографа вектора  $\mathbf{j}$ . При этом линиям электрического тока соответствуют линии равного потенциала в газовом потоке. Второй путь предполагает использование зависимости  $\sigma(q)$  и переход к плоскости годографа вектора  $\mathbf{q}$ . В этом случае линиям электрического тока соответствуют линии тока в газе, проводимости — плотность газа, величине  $\delta$  — взятый с отрицательным знаком квадрат местного числа Маха.

Упомянутая аналогия позволяет использовать некоторые газодинамические решения для описания распределения токов в нелинейно проводящей среде. При этом физический интерес представляют в основном электродинамические аналоги дозвуковых течений.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при произвольной зависимости  $\sigma(q)$  функция

$$\psi(q, \theta) = kq^{-1} \sin \theta, \quad k = \text{const} > 0 \quad (2.1)$$

будет решением уравнения (1.4). В газовой динамике решение, отвечающее функции тока типа (2.1), рассматривалось Ринглебом [6]. Интегрирование соотношений (1.5) в случае зависимости (2.1) приводит к следующим формулам:

$$x = r(q) \cos 2\theta + a(q), \quad y = r(q) \sin 2\theta$$

$$r(q) = \frac{k}{2\sigma(q)q^2}, \quad a(q) = r(q) - k \int_q^\infty \frac{dq'}{\sigma(q')q'^3} \quad (2.2)$$

Аддитивные постоянные в формулах (2.2) опущены. Соответствующее рассмотрение показывает, что в решении (2.2) при выполнении условия эллиптичности  $1 + \delta(q) > 0$  интеграл, входящий в выражение для  $a(q)$ , сходится на верхнем пределе и расходится при  $q \rightarrow 0$ . В дальнейшем будем предполагать условие эллиптичности выполненным.

Для решения, определяемого формулами (2.2), якобиан преобразования  $D(x, y) / D(q, \theta)$  равен  $-k\sigma^{-1}q^{-3}(\Delta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$ . Во всех точках физической плоскости, за исключением начала координат, величины  $q$  и  $\theta$  будут однозначными функциями  $x$  и  $y$ .

Точки физической плоскости при изменении  $q$  от 0 до  $\infty$  и при  $\theta = 1/2 \pi$  пробегают слева направо полупрямую  $x < 0, y = 0$ . Точки, соответствующие значению  $\theta = 0$ , при изменении  $q$  от 0 до  $\infty$  пробегают справа налево полупрямую  $x > 0, y = 0$ . Поэтому формулы (2.2) в области  $y \geq 0$  определяют решение задачи о распределении тока в полуплоскости граница которой составлена из полубесконечных электрода и изолятора. Входящая в решение константа  $k$  может быть определена, если задать, например, разность потенциалов между электродом  $x < 0, y = 0$  и какой-нибудь точкой вне этого электрода.

Линии уровня модуля эффективного электрического поля  $\mathbf{q}$ , а также величин  $j$  и  $\sigma$  образуют семейство окружностей радиусов  $r(q)$  с центрами в точках  $(a(q), 0)$ . Легко убедиться, что  $|a| < r$ , поэтому указанные окружности при любом  $q$  охватывают начало координат. При  $q \rightarrow \infty$  величины  $a(q)$  и  $r(q)$  стремятся к нулю, так что достаточно высокие значения плотности тока сконцентрированы в малой области, накрывающей конец электрода.

В качестве примера рассмотрим решение (2.2), отвечающее следующей зависимости:

$$\sigma(q) = \sigma_0 = \text{const} \quad (q < q_1); \quad \sigma(q) = \sigma_0 (q / q_1)^\kappa, \quad \kappa > -1 \quad (q \geq q_1) \quad (2.3)$$

Соответствующая связь между  $\sigma$  и  $j$  имеет вид

$$\sigma(j) = \sigma_0 \quad (j < j_1 = \sigma_0 q_1), \quad \sigma(j) = \sigma_0 \left( \frac{j}{j_1} \right)^{\kappa / (1+\kappa)} \quad (j \geq j_1)$$

Последняя зависимость при  $\kappa > 0$  качественно согласуется с данными, приведенными в [2] для неравновесной плазмы. В случае зависимости (2.3) для величины  $q$  как функции полярных координат  $\rho$  и  $\alpha$  точек физической плоскости  $x = \rho \cos \alpha, y = \rho \sin \alpha$  получим

$$q(\rho, \alpha) = q_1 \left[ \frac{\rho}{r_1^2 - a_1^2} (\sqrt{r_1^2 - a_1^2 \sin^2 \alpha} - a_1 \cos \alpha) \right]^{-1 / (2+\kappa)} \begin{pmatrix} 0 < \rho < \rho_*(\alpha) \\ 0 \leq \alpha \leq \pi \end{pmatrix}$$

$$q(\rho, \alpha) = q_1 r_1^{1/2} (\rho^2 - 2a_1 \rho \cos \alpha + a_1^2)^{-1/4} \quad (\rho \geq \rho_*(\alpha), 0 \leq \alpha \leq \pi) \quad (2.4)$$

$$r_1 = r(q_1), \quad a_1 = a(q_1) = r_1 \kappa / (2 + \kappa), \quad \rho_*(\alpha) = \sqrt{r_1^2 - a_1^2 \sin^2 \alpha} + a_1 \cos \alpha$$

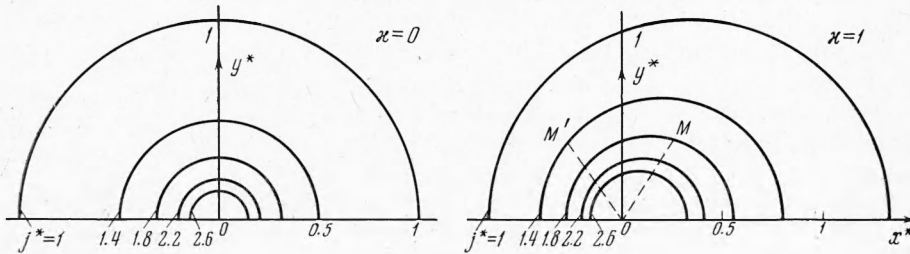
В (2.4) функция  $\rho_*(\alpha)$  определяет полярное уравнение окружности, на которой  $q = q_1$ . Формулы, определяющие зависимость  $\theta(\rho, \alpha)$ , имеют вид

$$\theta(\rho, \alpha) = 1/2 [\alpha + \arcsin(f \sin \alpha)]$$

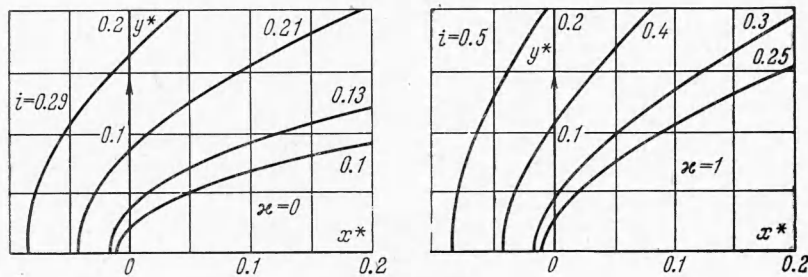
$$f(\rho, \alpha) = \kappa / (2 + \kappa) \quad (0 < \rho < \rho_*(\alpha), 0 \leq \alpha \leq \pi) \quad (2.5)$$

$$f(\rho, \alpha) = [\kappa / (2 + \kappa)] r_1 (\rho^2 - 2a_1 \rho \cos \alpha + a_1^2)^{-1/2} \quad (\rho \geq \rho_*(\alpha), 0 \leq \alpha \leq \pi)$$

Анализ выражений (2.4), (2.5) приводит к следующим выводам. В отличие от случая постоянной электропроводности величина  $q$  будет функцией не только  $\rho$ , но и  $\alpha$ , причем  $q(\rho, \alpha) \neq q(\rho, \pi - \alpha)$ , т. е. распределе-



Фиг. 1



Фиг. 2

ние  $q(x, y)$  становится асимметричным по  $x$ . Это свойство верно и для произвольной нелинейной зависимости  $j(q)$ , отвечающей области эллиптичности.

При использовании зависимости (2.3) характер асимметрии распределения величин  $q$  и  $j$  таков, что значения этих величин в симметричных точках  $M = (x, y)$  и  $M' = (-x, y)$ , где  $x > 0$ , удовлетворяют неравенствам

$$q(M) > q(M'), j(M) > j(M') \quad (\kappa > 0)$$

$$q(M) < q(M'), j(M) < j(M') \quad (-1 < \kappa < 0)$$

Если  $0 < x < \min(r_1 - a_1, r_1 + a_1)$ ,  $y = 0$ , то из (2.4) следуют формулы:

$$q(M)/q(M') = (1 + \kappa)^{1/(2+\kappa)}, \quad j(M)/j(M') = (1 + \kappa)^{(1+\kappa)/(2+\kappa)}$$

$$g(M)/g(M') = 1 + \kappa$$

Здесь  $g = jq$  — локальная джоулева диссипация.

Таким образом, в практически интересном случае  $\kappa > 0$  значения эффективного электрического поля, плотности тока и локальной диссипации в точке  $M$  «приизоляторной» области выше значений соответствующих ве-

личин в симметричной точке  $M'$  «приэлектродной» области. На фиг. 1 показаны линии уровня безразмерной плотности тока  $j^* = j / j_1$  на плоскости безразмерных координат  $x^* = x / r_1$ ,  $y^* = y / r_1$  для случаев  $\kappa = 0$  (постоянная проводимость) и  $\kappa = 1$ .

При  $\rho \rightarrow 0$  величины  $q$  и  $j$  растут как отрицательная степень  $\rho$  с показателями  $-1 / (2 + \kappa)$  и  $-(1 + \kappa) / (2 + \kappa)$  соответственно<sup>1</sup>. Характер роста локальной диссипации будет таким же, как и в случае линейной среды:  $g \sim \rho^{-1}$ .

Из (2.5) видно, что при  $\kappa > 0$  линии тока, пересекающие произвольный луч  $\alpha = \text{const}$ , имеют в точках этого луча больший угол наклона  $\theta$ , чем соответствующие линии тока в линейной среде. Следовательно, по сравнению с линейным случаем снижается тенденция к развороту линий тока вдоль непроводящей стенки. Напротив, в случае  $-1 < \kappa < 0$  эта тенденция усиливается.

Линии тока в плоскости  $x^*y^*$  для случаев  $\kappa = 0$  и  $\kappa = 1$  показаны на фиг. 2. Параметром изображенного семейства линий является величина безразмерного тока  $i$ , протекающего в трубке, образованной линией тока и непроводящей стенкой.

Отметим, что благодаря использованию «устойчивой» зависимости  $\sigma(q)$  в решении (2.2) отсутствует область, аналогичная области сверхзвукового течения в решении Ринглеба [6]. Приведенное решение можно использовать при качественной оценке влияния различных законов нелинейной проводимости на концевой эффект вблизи точки сопряжения электрода с изолятором.

Поступила 2 VI 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К е р р е б р о к Дж. Электропроводность газов при повышенной электронной температуре. Сб. «Инженерные вопросы магнитной гидродинамики», М., «Мир», 1965.
2. К е р р е б р о с к J. L. Magnetohydrodynamic generators with nonequilibrium ionization. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No 4
3. В а т а ж и н А. Б., Р е г и р е р С. А. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей жидкости по каналу в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
4. O l i v e r D. A., M i t c h n e r M. Nonuniform electrical conduction in MHD channels. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 8.
5. Е м е ц Ю. П. Метод годографа в электродинамике сплошных нелинейно проводящих сред. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
6. R i n g l e b F. Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung. Z. angew. Math. und Mech., 1940, Bd 20, H. 4.
7. К у л и к о в с к и й А. Г., Р е г и р е р С. А. Об устойчивости и эволюционности распределения электрического тока в среде с нелинейной проводимостью. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
8. Б у ч и н В. А. Определение джоулевой диссипации при движении жидкости с переменной проводимостью в неоднородном магнитном поле. ПМТФ, 1968, № 6.

<sup>1</sup> Характер роста плотности тока вблизи особой точки при степенной зависимости  $\sigma(j)$  был рассмотрен также В. А. Бучиным (дипломная работа, МГУ, 1969).