

## ОБ ОСАЖДЕНИИ МАЛЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ НА ПОВЕРХНОСТИ ДВИЖУЩИХСЯ ИСПАРЯЮЩИХСЯ КРИСТАЛЛОВ

М. Г. Марков, Е. Р. Шукин, Ю. И. Яламов  
(Москва)

Методом сращиваемых асимптотических разложений для малых диффузионных чисел Пекле найден поток аэрозольных частиц к поверхности испаряющегося (растущего) кристалла.

**1. Постановка задачи.** В настоящее время достаточно подробно разработана теория захвата малых (движущихся в свободномолекулярном режиме) аэрозольных частиц испаряющимися или конденсирующимися каплями [1—3]. Что же касается процессов захвата аэрозольных частиц испаряющимися или растущими кристаллами, то здесь теория разработана значительно хуже.

Характерной особенностью частиц твердой фазы (коллекторов) является отличие их формы от сферической, что учтено в данной работе.

Рассмотрим крупную (число Кнудсена  $K_n = 0$ ) испаряющуюся частицу твердой фазы, взвешенную в парогазовой смеси. Теоретический анализ будем проводить для случая, когда число Рейнольдса, а также диффузионное и тепловое числа Пекле малы, так что уравнения гидродинамики и тепломассопереноса вблизи поверхности частицы имеют вид

$$(1.1) \quad \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p / \rho_e, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta T_{e,i} = 0, \quad \Delta c_1 = 0,$$

где  $\mathbf{v}$ ,  $\rho_e$ ,  $p$ ,  $T_e$  — скорость, плотность, давление и температура смеси;  $c_1 = n_1/n_0$ ;  $n_0 = n_1 + n_2$  ( $n_1$ ,  $n_2$  — концентрации пара и газа);  $\nu$  — кинематическая вязкость смеси;  $T_i$  — температура частицы.

Система уравнений (1.1) должна решаться с учетом следующих условий на границе частица (коллектор) — среда:

$$(1.2) \quad T_e = T_i \equiv T_s;$$

$$(1.3) \quad c_1 = c_{1s}(T_s);$$

$$(1.4) \quad -\kappa_e \partial T_e / \partial n = -\kappa_i \partial T_i / \partial n - \rho_e v_n L;$$

$$(1.5) \quad n_2 \partial n / \partial n + \frac{n_0^2 m_1}{\bar{v}_e} D_{12} \frac{\partial c_1}{\partial n} = 0;$$

$$(1.6) \quad v_\tau = 0$$

и вдали от частицы:

$$(1.7) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}_\infty, \quad c_1 = c_{1\infty}, \quad T_e = T_\infty.$$

В формулах (1.2)—(1.6)  $D_{12}$  — коэффициент бинарной диффузии;  $L$  — тепло фазового перехода;  $m_1$  — масса молекулы пара;  $\kappa_e$ ,  $\kappa_i$  — коэффициенты теплопроводности смеси и частицы;  $v_n$ ,  $v_\tau$  — нормальная и тангенциальная составляющие скорости;  $\partial/\partial n$  означает дифференцирование по нормали к поверхности частицы (кристалла).

Уравнение (1.2) выражает равенство температур у поверхности частицы; уравнение (1.3) отражает тот факт, что давление насыщенного пара у поверхности частицы есть функция температуры; уравнение (1.4) является следствием закона сохранения энергии; формула (1.5) выражает непроницаемость поверхности испаряющейся частицы для молекул газа, а формула (1.6) — отсутствие скольжения газа вдоль поверхности частицы.

Перенос малых аэрозольных частиц к поверхности кристалла (коллектора) описывается уравнением конвективной диффузии

$$(1.8) \quad D \Delta N = \mathbf{u} \nabla N,$$

где  $D$  — коэффициент броуновской диффузии;  $N$  — концентрация частиц;  $\mathbf{u}$  — скорость частиц, которую при малых числах Рейнольдса, обусловленных движением коллектора, а также стефановским течением, вызванным испарением с поверхности, можно представить в виде,

$$(1.9) \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{CT},$$

где  $\mathbf{v}$  — гидродинамическая скорость, полученная из решения задачи об обтекании неиспаряющегося кристалла;  $\mathbf{v}_T = -f_T \nabla T$  — скорость термофореза;  $\mathbf{v}_D = -f_D \nabla c_1$  — скорость диффузиофореза;  $\mathbf{v}_{CT} = -\frac{n_0^2 m_1}{\rho_e n_2} D_{12} \nabla c_1$  — скорость стефановского потока.

Выражения для функций  $f_T$  и  $f_D$  имеют громоздкий вид и могут быть найдены в работах по термо- и диффузиофорезу [4, 5]. В дальнейшем введем для сокращения записи новую функцию  $f_c$ , заданную соотношением  $f_c \nabla c_1 = f_D \nabla c_1 + f_T \nabla T + \mathbf{v}_{CT}$ , что возможно, поскольку при испарении частицы между градиентом температуры и концентрации существует однозначная связь.

Перейдем в уравнении (1.8) к безразмерным переменным

$$\xi = (N - N_\infty)/(N_a - N_\infty), \quad \mathbf{r}_* = \mathbf{r}/a, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{v}/u_\infty,$$

где  $N_a$  — концентрация частиц у поверхности (обычно принимается  $N_a = 0$ );  $a$  — характерный размер частицы-коллектора. В этом случае уравнение (1.8) приводится к виду

$$\Delta \xi + \frac{f_c}{D} \nabla c_1 \frac{\partial \xi}{\partial n} = \text{Pe} \mathbf{v}_* \nabla \xi,$$

$\text{Pe} = u_\infty a/D$ , дифференцирование производится по безразмерным переменным, функция  $\xi$  удовлетворяет следующим граничным условиям:  $\xi|_{r \rightarrow \infty} = 0$ ;  $\xi = 1|_{r=r_0}$ , где  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор поверхности частицы.

В дальнейшем будем предполагать, что число Пекле  $\text{Pe} \ll 1$ , а  $\text{Pe}_1 = f_c/D$  невелико:  $\text{Pe}_1 \approx 1$ .

**2. Расчет потока аэрозольных частиц к поверхности.** Предположим, что существует ортогональная система координат  $x_i, x_j, x_k$ , в которой поверхность частицы описывается уравнением  $x_i = x_0$ ; в этой же системе координат концентрация пара  $c_1$  зависит от переменной  $x_i$ , так что уравнение Лапласа системы (1.1) сводится к уравнению

$$\frac{d}{dx_i} \left[ \theta(x_i) \frac{dc_1}{dx_i} \right] = 0,$$

где  $\theta(x_i)$  — функция переменной  $x_i$ , определяемая из соотношения [6]

$$\psi(x_j, x_k)/\theta(x_i) = h_j h_k / h_i,$$

в котором  $h_i, h_j, h_k$  — коэффициенты Ламэ.

Отметим, что аналогичные допущения использовались при построении теории диффузионной зарядки аэрозольных частиц в [6].

Для определения концентрации аэрозольных частиц воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений, изложение которого применительно к задачам гидродинамики приведено в [7], а применительно к задачам тепломассопереноса — в [8, 9].

Введем внешнее и внутреннее разложения решения:

$$\xi_* = \sum_n \alpha^{(n)} \xi^{(n)}, \quad \lim_{\text{Pe} \rightarrow 0} \frac{\alpha^{(n+1)}}{\alpha^{(n)}} = 0,$$

$$\xi_{**} = \sum_n \alpha_n \xi_n, \quad \lim_{\text{Pe} \rightarrow 0} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 0.$$

Внутреннее разложение  $\xi_{**}$  справедливо для внутренней зоны течения  $r_0 < r_* < O(\text{Pe}^{-1})$ , где  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор поверхности частицы, а внешнее разложение — для остальной части течения.

Для определения членов внешнего разложения вводится сжатая переменная  $\rho = \text{Re } r_*$  и скорость  $\mathbf{V}(\rho) = \mathbf{v}_*(r_*)$ . В дальнейшем знак \* у радиус-вектора и скорости опускаем.

Поскольку, согласно сделанным выше предположениям,  $\text{Re}_1 \simeq 1$ , а для гармонической функции  $c_1(x_i)$  при  $r \rightarrow \infty$  справедливо представление  $c_1 \simeq \beta/r$ , где  $r$  — радиус некоторой сферической системы координат, связанной с частицей, то с точностью до членов  $O(\text{Re}^2)$  уравнение (1.9) для  $\xi^*$  принимает вид

$$\Delta_\rho \xi^* = \mathbf{V} \nabla \xi^*,$$

т. е. совпадает с внешним разложением уравнения тепломассопереноса, полученным в [8, 9].

В работах [8, 9] показано, что с точностью  $O(r^{-2})$  поле скоростей вдали от частицы произвольной формы имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} - \frac{3}{4r} \left[ \mathbf{F} + \frac{1}{r^2} \mathbf{r} (\mathbf{F}\mathbf{r}) \right],$$

где  $\mathbf{i}$  — единичный вектор, определяющий направление потока;  $\mathbf{F}$  — безразмерный вектор, равный отношению силы сопротивления данной частицы к величине стоксовой силы сопротивления твердой сферической частицы радиуса  $a$ .

Перейдем к построению решения.

*Нулевое приближение.* Нулевое приближение для внешнего разложения очевидно:  $\xi^{(0)} \equiv 0$ , а для внутреннего разложения при  $\alpha_0 = 1$  получаем уравнение

$$(2.1) \quad \Delta \xi_0 + \frac{f_c}{D} \nabla c_1 \frac{\partial \xi_0}{\partial n} = 0,$$

решение которого с учетом сделанных ранее предположений о форме частицы имеет вид

$$\xi_0 = b_0 \exp \left[ -\frac{f_c}{D} c_1(x) \right] + \frac{I_0}{Af_c},$$

где  $A = \frac{1}{\theta(x_i)} \frac{dc_1}{dx_i} = \text{const}$ ;  $b_0$  и  $I_0$  — определяемые из граничных условий постоянные; причем  $I_0$  с точностью до постоянного множителя определяет поток частиц к поверхности неподвижного коллектора. Легко получить выражения для этих постоянных:

$$(2.2) \quad b_0 = \frac{1}{\exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1s} \right) - \exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1\infty} \right)};$$

$$I_0 = \frac{Af_c}{1 - \exp \left[ -\frac{f_c}{D} (c_{1s} - c_{1\infty}) \right]}.$$

При  $r \rightarrow \infty$  функция  $\xi_0$  имеет вид  $\beta/r$ , поэтому из условия сращивания разложений  $\alpha^{(1)} = \text{Re}$ .

*Первое приближение.* Внешнее разложение решения  $\xi^{(1)}$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\rho \xi^{(1)} = i \nabla_\rho \xi^{(1)},$$

решение которого, отвечающее условиям сращивания, имеет вид

$$\xi^{(1)} = \frac{\gamma}{\rho} \exp \left[ \frac{\rho}{2} (\mu - 1) \right],$$

где  $\mu = (i\mathbf{F})$ ;  $\gamma$  — постоянная, значение которой определяется из условий сращивания при  $\rho \rightarrow 0$ .

С учетом постоянства полного потока частиц  $I$  к поверхности и условия срачивания  $\lim_{r \rightarrow \infty} \xi^{(0)} = \lim_{r \rightarrow 0} \xi^{(1)}$  нетрудно найти, что  $\gamma = -I_0/D$ .

Разложение функции  $\xi^{(1)}$  во внутренних переменных при  $r \rightarrow 0$  приводит к следующему выбору параметра разложения  $\alpha^{(1)}$  и условию срачивания:

$$(2.3) \quad \alpha^{(1)} = \text{Re}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \xi_1 = -\frac{\gamma}{2} (\mu - 1).$$

Функция  $\xi_1$  удовлетворяет уравнению

$$(2.4) \quad \Delta \xi_1 + \frac{f_c}{D} \frac{\partial c_1}{\partial n} \frac{\partial \xi_1}{\partial n} = \nu \nabla \xi_0$$

и условию на границе  $\xi_1(x_0) = 0$ .

Функцию  $\xi_1$  можно представить в виде  $\xi_1 = \xi_{10}(x_i) + \xi_{11}(x_i, x_j, x_k)$ , где функция  $\xi_{10}(x_i)$  с учетом условий (2.3) и условия на границе имеет вид

$$(2.5) \quad \xi_{10} = b_1 \exp \left[ -\frac{f_c}{D} c_1(x_i) \right] + \frac{I_1}{Af_c},$$

$$b_1 = \frac{\gamma}{2 \left[ \exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1s} \right) - \exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1\infty} \right) \right]},$$

$$I_1 = \frac{-\gamma Af_c \exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1s} \right)}{2 \left[ \exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1s} \right) - \exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1\infty} \right) \right]},$$

а функция  $\xi_{11}$  удовлетворяет неоднородному уравнению (2.4) и с учетом ограничений на геометрию частиц, введенных выше, не дает вклада в полный поток частиц к поверхности коллектора.

Анализ асимптотики выражения для  $\xi_1$  при  $r \rightarrow \infty$  показывает, что параметр разложения  $\alpha^{(2)} = \text{Re}$ .

Уравнение, которому удовлетворяет функция  $\xi^{(2)}$ , имеет вид

$$\left( \Delta_\rho - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \xi^{(2)} = -\frac{3}{4} \gamma \left[ \mathbf{F} + \frac{(\mathbf{F}\rho)}{\rho^2} \rho \right] \nabla_\rho \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\rho} \exp \left[ -\frac{1}{2} \rho (1 - \mu) \right] \right\}.$$

Асимптотическое выражение для функции  $\xi^{(2)}$  при  $\rho \rightarrow 0$  имеет вид

$$(2.6) \quad \xi^{(2)} \rightarrow -(1/2) \gamma (\mathbf{F}i) \ln \rho.$$

Наличие логарифмического члена в (2.6) меняет степенной характер функций  $\alpha_n(\text{Re})$  на логарифмический и приводит к следующему определению параметра разложения  $\alpha_2$ :

$$\alpha_2 = \text{Re}^2 \ln \text{Re}.$$

Функция  $\xi_2$  снова удовлетворяет уравнению (2.4) с граничными условиями:

$$\xi_2(x_0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \xi_2 = -\frac{1}{2} \gamma (\mathbf{F}i).$$

Приведем окончательное выражение для функции  $\xi_2$ :

$$(2.7) \quad \xi_2 = \frac{(\mathbf{F}i) \gamma \exp \left[ -\frac{f_c}{D} c_1(x) \right]}{2 \left[ \exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1s} \right) - \exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1\infty} \right) \right]} -$$

$$\frac{\gamma (\mathbf{F}i) Af_c \exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1s} \right)}{2 \left[ \exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1s} \right) - \exp \left( -\frac{f_c}{D} c_{1\infty} \right) \right]}.$$

Используя выражения (2.2), (2.5) и (2.7), можно записать соотношение, определяющее обезразмеренный поток частиц к движущемуся коллектору:

$$\text{Sh} = \text{Sh}_c \left[ 1 + \frac{\text{Pe} Af_c}{2D} \frac{\exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1s}\right)}{\exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1s}\right) - \exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1\infty}\right)} + \frac{\text{Pe}^2 \ln \text{Pe}}{2} (\text{Fi}) \frac{Af_c}{D} \frac{\exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1s}\right)}{\exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1s}\right) - \exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1\infty}\right)} \right],$$

где  $\text{Sh}_0$  — число Шервуда для потока частиц на неподвижный коллектор.

**3. Пример расчетов и анализ результатов.** В качестве примера приведем выражение числа Шервуда, рассчитанного для испаряющейся частицы, имеющей форму сплюснутого сфероида и движущейся нормально большой полуоси:

$$(3.1) \quad \text{Sh} = \text{Sh}_0 \left[ 1 + \frac{\text{Pe}}{2} \frac{c_{1\infty} - c_{1s}}{\pi/2 - \arctg \sigma_0} \frac{f_c}{D} \times \frac{\exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1s}\right)}{\exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1s}\right) - \exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1\infty}\right)} + \frac{4}{3\pi} \text{Pe}^2 \ln \text{Pe} \times \frac{c_{1\infty} - c_{1s}}{\pi/2 - \arctg \sigma_0} \frac{f_c}{D} \frac{\exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1s}\right)}{\exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1s}\right) - \exp\left(-\frac{f_c}{D} c_{1\infty}\right)} \right],$$

$$\text{Sh}_0 = \frac{c_{1\infty} - c_{1s}}{\pi/2 - \arctg \sigma_0} \frac{2f_c}{D} \frac{\exp\left[\frac{f_c}{D} (c_{1\infty} - c_{1s})\right]}{1 - \exp\left[\frac{f_c}{D} (c_{1\infty} - c_{1s})\right]}.$$

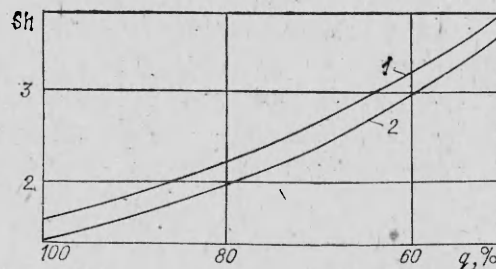
Здесь  $\sigma$  — «радиальная» координата сфероида, связанная с декартовыми координатами соотношениями:

$$x = a\sqrt{1 + \sigma^2} \sqrt{1 - \tau^2} \cos \varphi, \quad y = a\sqrt{1 + \sigma^2} \sqrt{1 - \tau^2} \sin \varphi, \\ z = a\sigma\tau,$$

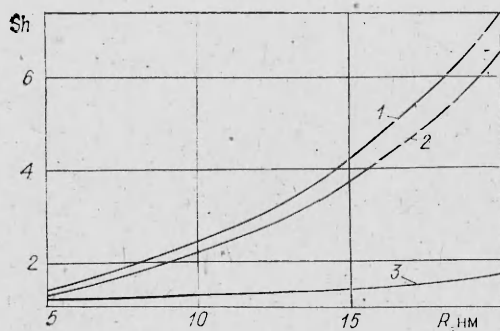
где  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-1 \leq \tau \leq 1$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $\sigma = \sigma_0$  соответствует поверхности сфероида. На фиг. 1 приведены результаты расчетов числа Шервуда в зависимости от относительной влажности, выполненные по формуле (3.1). Расчеты проведены для ледяных кристаллов с аспектвым отношением  $\epsilon = 0,03$ , падающих в поле тяжести. Кривые 1, 2 соответствуют кристаллу с размером большой полуоси  $a = 15$  и  $10$  мкм. Температура среды  $T_\infty = -10^\circ\text{C}$ , радиус малых частиц  $R = 10^{-2}$  мкм, давление в парогазовой смеси вдали от кристалла  $p = 9,8 \cdot 10^4$  Н/м<sup>2</sup>.

Из фиг. 1 видно, что поток частиц к поверхности испаряющегося кристалла превышает по величине поток частиц к поверхности кристалла, не испытывающего фазового перехода.

Подобный вывод для испаряющихся капель получил экспериментальное подтверждение в [10]. Объясняется этот, на первый



Фиг. 1



Ф и г. 2

взгляд, неожиданный результат действием термофоретической силы, которая при испарении кристалла направлена к его поверхности.

На фиг. 2 представлена зависимость числа Шервуда от размеров аэрозольных частиц. Вычисления проводились для испаряющегося (относительная влажность равна 75%) ледяного кристалла с размером большой полуоси  $a = 9$  мкм, падающего в поле тяжести. Кривые 1, 2 соответствуют температуре  $T_{\infty} = -5$  и  $-10^{\circ}\text{C}$ , кривая 3 соответствует относительной влажности 100% ( $T_{\infty} = -5^{\circ}\text{C}$ ).

Результаты расчетов свидетельствуют о том, что влияние термодиффузофоретических сил, обусловленных испарением с поверхности коллектора, на захват аэрозольных частиц существенно зависит от размеров этих частиц.

Влиянием термодиффузофоретических сил на захват аэрозольных частиц с радиусом  $R < 5 \cdot 10^{-3}$  мкм можно пренебречь даже при малой относительной влажности.

В то же время испарение с поверхности коллектора может значительно повысить эффективность захвата аэрозольных частиц с радиусом  $R > 10^{-2}$  мкм.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дерягин Б. В., Яламов Ю. И. и др. О влиянии броуновского движения и термодиффузофоретических эффектов на захват аэрозольных частиц крупными каплями.— ДАН СССР, 1976, т. 228, № 4.
2. Белов А. П. Осаждение аэрозольных частиц на испаряющуюся неподвижную каплю.— ЖТФ, 1979, т. 49, № 1.
3. Wang R., Grover S. N., Pruppacher H. R. On the effect of electric charges on the scavenging of aerosol particles by clouds and small raindrops.— J. Atmos. Sci., 1978, vol. 35, N 9.
4. Яламов Ю. И., Щукин Е. Р., Дерягин Б. В. Теория диффузофореза малых летучих аэрозольных частиц.— ДАН СССР, 1975, т. 222, № 2.
5. Марков М. Г., Щукин Е. Р. К теории движения малых летучих аэрозольных частиц в неоднородных по температуре и концентрации газовых смесях.— Изв. вузов. Физика, 1980, № 1. Деп. ВИНТИ № 4138—79.
6. Седунов Ю. С. Теория зарядки несферических частиц аэрозоля в диффузионном режиме.— ИФЖ, 1959, т. 2, № 4.
7. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
8. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сысков Ю. Н. Диффузия к обтекаемой реагирующей частице произвольной формы.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 2.
9. Полянин А. П. О химической реакции с выделением тепла на поверхности движущейся в газе теплопроводной частицы.— ПМТФ, 1982, № 1.
10. Стыро Б. И., Тарасюк П. В. К вопросу о влиянии температурного режима испарения капли на захват аэрозолей.— Физика атмосферы, 1977, № 3.

Поступила 26/XII 1983 г.