ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СЖИМАЕМОМ ГАЗЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

Б. И. Резников, Ю. Н. Смыслов

(Ленинград)

В современной теории ламинарного пограничного слоя, наряду с широким распространением численных методов, в настоящее время применяются асимптотические методы, являющиеся эффективным аналитическим аппаратом. Асимптотическое интегрирование уравнений пограничного слоя позволяет получать в замкнутом виде выражения для величин, пропорциональных трению $\varphi''(0)$ и тепловому потоку $g'(0)$. Предварительное определение недостающих значений производных в нуле сводит краевые задачи теории пограничного слоя к задаче Коши, что намного облегчает численное решение задачи.

Общие принципы асимптотического интегрирования уравнений пограничного слоя изложены в монографии Мексина [1], где проведено подробное исследование задач несжимаемого пограничного слоя. Путем формального интегрирования уравнений пограничного слоя как линейных неоднородных уравнений относительно второй производной функции тока задача об определении трения сводилась к вычислению интеграла типа Лапласа методом скорейшего спуска. При этом для искомой величины получалось уравнение, правая часть которого представляла расходящийся ряд, суммируемый по Эйлеру.

В работах Г. А. Тирского [2,3] асимптотические методы применялись для установления соотношений подобия между полями энтальпий и концентраций, причем трение предполагалось известным из численного решения задачи.

Постановка вопроса о совместном определении трения и теплового потока в задачах сжимаемого пограничного слоя была дана в работе [4], где рассматривался метод определения трения и теплового потока, позволяющий для определенного типа уравнений вычислять трение и тепловой поток из системы конечных уравнений.

В настоящей работе исследуется система уравнений ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе в окрестности критической линии. Физические свойства газа — заданные функции температуры.

Получена система уравнений относительно трения $\varphi''(0)$ и теплового потока $g'(0)$, причем точность определения этих величин не зависит от значения параметра вдува в пограничный слой. Поскольку численное решение исходной системы уравнений известно для ограниченного числа параметров задачи, представленные аналитические формулы позволяют проследить влияние каждого параметра в отдельности. Точность определения искомых величин устанавливается оценкой последующих членов асимптотических разложений.

В заключительной части работы проведено сравнение с численным решением для некоторых параметров задачи.

Обтеканию плоской критической точки сжимаемым газом соответствует следующая краевая задача [2]:

$$(l\varphi'')' + \varphi\varphi'' = \varphi'^2 - g_0 - (1 - g_0)\, g \qquad \left(g = \frac{h - h_0}{h_\infty - h_0}\right) \tag{1}$$

$$(lg')' + \sigma\varphi g' = 0 \tag{2}$$

$$\varphi(0) = \alpha, \qquad \varphi'(0) = 0, \qquad g(0) = 0, \qquad \varphi'(\infty) = g(\infty) = 1 \tag{3}$$

Здесь функция φ пропорциональна нормальной компоненте скорости в пограничном слое, g — безразмерная энтальпия, индекс 0 соответствует условиям на теле, функция l пропорциональна фактору сжимаемости $\rho\mu / \rho_0\mu_0$, при этом ρ — плотность, μ — вязкость газа, σ — число Прандтля.

В работе [2] показано, что функция l имеет следующее выражение: (4)

$$l(g) = \frac{(1 + l_1 g)^{1/2}}{1 + l_1 l_2 g}, \qquad l_1 = \frac{1}{g_0} - 1, \qquad l_2 = \frac{1}{1 + S_{j0}\, g_0^{-1}} \qquad \left(g_0 = \frac{h_0}{h_\infty},\ S_{j0} = \frac{S_j c_{p0}}{T_\infty c_{p\infty}}\right)$$

Здесь S_j — постоянная Сезерленда. Следуя работе [4], введем функцию

$$R = \frac{1}{l}\left(\varphi + l' + \frac{g_0 + (1 - g_0)\, g - \varphi'^2}{\varphi''}\right) \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) запишется в форме, аналогичной уравнению Блазиуса

$$\varphi''' + R\varphi'' = 0 \tag{6}$$

Двукратное интегрирование этого уравнения с учетом граничных условий дает для трения выражение

$$\varphi''(0) = \tau = \omega^{-1}(\infty), \qquad \omega_{(\infty)} = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\eta R\, dt\right) d\eta \tag{7}$$

Ограничиваясь двумя первыми членами разложения функции R в ряд Тейлора в окрестности $\eta = 0$, получаем главный член асимптотического разложения величины $\omega(\infty)$. Как показано в работе [4], для уравнений типа (1) он дает хорошее приближение к точному значению $\omega(\infty)$.

Уравнение (7), в правой части которого стоит главный член разложения $\omega(\infty)$, после некоторых преобразований может быть записано в форме

$$\frac{2\tau^2}{g_0 + \alpha\tau + (dl/dg)_0 \tau g_0'} = G(x) \tag{8}$$

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} \frac{e^{-x^2}}{1 - \Phi(x)}, \qquad x = \frac{g_0 + \alpha\tau + (dl/dg)_0\, \tau g_0'}{\sqrt{2\,[p - q g_0'\tau + r g_0'^2 \tau^2]}} \tag{9}$$

$$p = g_0(g_0 + \alpha\tau), \qquad q = g_0 - 1 + \alpha(1 + \sigma)\left(\frac{dl}{dg}\right)_0 \tau, \qquad r = \left(\frac{d^2 l}{dg^2}\right)_0 - 2\left(\frac{dl}{dg}\right)_0^2$$

$$\left(\frac{dl}{dg}\right)_0 = \frac{l_1}{2}(1 - 2l_2), \qquad \left(\frac{d^2 l}{dg^2}\right)_0 = -\frac{l_1^2}{2}\left[l_2 + (1 - 2l_2)\left(2l_2 + \frac{1}{2}\right)\right]$$

Коэффициенты p, q, r в формулах (9) зависят от параметров задачи и трения.

Обратимся к интегрированию уравнения (2). Вводя координату

$$\eta_1 = \int_0^\eta l^{-1}\, d\eta \tag{10}$$

получаем уравнение (2) в форме

$$\frac{d^2 g}{d\eta_1^2} + \sigma\varphi_1 \frac{dg}{d\eta_1} = 0, \qquad \varphi_1 \equiv \varphi\,[\eta(\eta_1)] \tag{11}$$

Интегрируя с учетом граничных условий, получаем выражение для g_0'

$$g_0' = \frac{1}{\omega_1(\infty)}, \qquad \omega_1(\infty) = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^{\eta_1} \varphi_1 dt\right) d\eta_1 \tag{12}$$

В окрестности $\eta_1 = 0$ имеем разложение

$$\int_0^{\eta_1} \varphi_1 dt = \alpha\eta_1 + \frac{\tau}{6}\eta_1^3 + Z(\eta_1), \qquad \tau = \varphi_{\eta\eta}''(0) = \varphi_{\eta_1\eta_1}''(0)$$

$$Z(\eta_1) = \eta_1^4 \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_{\eta_1}^{(n+3)}(0)}{(n+4)!} \eta_1^n \tag{13}$$

Подынтегральная функция в выражении $\omega(\infty)$ экспоненциально убывает, поэтому главный вклад будут давать первые члены разложения. Подставляя (13) в (12) и разлагая $\exp[-Z(\eta_1)]$ в ряд, после интегрирования получаем выражение

$$g_0' \sim \left(\frac{\sigma\tau}{6}\right)^{1/3} \psi_0^{-1}(k) \left[1 + \sum_{m=0}^\infty \gamma_m \psi_{m+4}(k)\right]^{-1} \tag{14}$$

$$k = |\alpha| \left(\frac{\sigma\tau}{6}\right)^{-1/3} \sigma, \qquad \gamma_m = d_m \left(\frac{\sigma\tau}{6}\right)^{-(m+4)/3} \psi_0^{-1}(k), \qquad d_m = -\sigma \frac{\varphi_{\eta_1}^{m+3}(0)}{(m+4)!}, \qquad m = 0, 1, 2, 3 \tag{15}$$

Функции

$$\psi_p(k) = \int_0^\infty e^{kx - x^3} x^p\, dx \tag{16}$$

Таблица 1

k	$\psi_0(k)$	$\psi_1(k)$	k	$\psi_0(k)$	$\psi_1(k)$
0	0.893	0.4514	1.1	1.6812	1.0921
0.1	0.9398	0.4862	1.2	1.7953	1.1921
0.2	0.9903	0.5244	1.3	1.9200	1.3028
0.3	1.0448	0.5662	1.4	2.0563	1.4256
0.4	1.1037	0.6121	1.5	2.2056	1.5619
0.5	1.1674	0.6625	1.6	2.3692	1.7134
0.6	1.2370	0.7179	1.7	2.5488	1.8812
0.7	1.3111	0.7788	1.8	2.7462	2.0696
0.8	1.3923	0.8460	1.9	2.9635	2.2790
0.9	1.4806	0.9200	2	3.2028	2.5127
1	1.5766	1.0017	2.1	3.4669	2.7738

выражаются через функции $\psi_0(k)$ и $\psi_1(k)$ посредством рекуррентных соотношений

$$\psi_2(k) = {}^1/_3\,[1 + k\psi_0(k)]$$

$$\psi_{p+3}(k) = {}^1/_3\,[(p+1)\,\psi_p(k) + k\psi_{p+1}(k)] \qquad (p = 0, 1, \ldots) \tag{17}$$

В табл. 1 приведены значения функций $\psi_0(k)$ и $\psi_1(k)$ для $0 \leqslant k \leqslant 2.1$. Для значений k, отличных от приведенных в таблице, удобно пользоваться интерполяционной формулой

$$\psi_p(k+\delta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\,\psi_{p+r}(k)\,\delta^r = \psi_p(k) + \psi_{p+1}(k)\,\delta + \psi_{p+2}(k)\,\frac{\delta^2}{2} + \ldots \tag{18}$$

Для значений $k < 1$ функции $\psi_0(k)$ и $\psi_1(k)$ могут быть найдены из асимптотических выражений вида

$$\begin{aligned} \psi_0(k) &= \frac{1}{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}\, \frac{\Gamma({}^1/_3(n+1))}{\Gamma({}^1/_3)} \\ \psi_1(k) &= \frac{1}{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}\, \frac{\Gamma({}^1/_3(n+2))}{\Gamma({}^1/_3)} \end{aligned} \tag{19}$$

Например, при $k = 0.6$ три члена разложения (19) дают значение функции $\psi_0(k)$, отличающееся от табличного менее чем на 0.1%.

Проведенные расчеты показали, что с достаточной точностью величину g_0' можно определить, удерживая три члена разложения в уравнении (14)

$$g_0' = ({}^1/_6\sigma\tau)^{1/3}\,\psi_0^{-1}(k)\,[1 + \gamma_0\psi_4 + \gamma_1\psi_5]^{-1} \tag{20}$$

Подставляя явные выражения коэффициентов γ_0 и γ_1 через τ и g_0' и исходные параметры варианта, приходим к окончательному уравнению в форме

$$g_0' = ({}^1/_6\sigma\tau)^{1/3}\,\psi_0^{-1}(k)\,[1 + A + Bg_0' - Cg_0'^2]^{-1} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sigma}{24}\left(\frac{\sigma\tau}{6}\right)^{-1/3} a\left[\frac{\psi_4}{\psi_0} + \frac{1}{5}\,\frac{\psi_5}{\psi_0}\left(\frac{\sigma\tau}{6}\right)^{-1/3}(-\alpha)\right], \qquad a = g_0 + \alpha\tau \\ B &= \frac{\sigma}{24}\left(\frac{\sigma\tau}{6}\right)^{-4/3}\left[b\,\frac{\psi_4}{\psi_0} + \frac{1}{5}\,\frac{\psi_5}{\psi_0}\left(\frac{\sigma\tau}{6}\right)^{-1/3} b^*\right], \qquad b = -2\tau\left(\frac{dl}{dg}\right)_0 \\ C &= \frac{\sigma}{24}\left(\frac{\sigma\tau}{6}\right)^{-4/3} \frac{11}{5}\left(\frac{\sigma\tau}{6}\right)^{-1/3} \frac{\psi_5}{\psi_0}\,c, \qquad c = \left[4\left(\frac{d^2l}{dg^2}\right)_0 - \left(\frac{dl}{dg}\right)_0^2\right]\tau \\ b^* &= 1 - g_0\left[1 - 4\left(\frac{dl}{dg}\right)_0\right] + 3\left(\frac{dl}{dg}\right)_0 \alpha\,(1+\sigma)\,\tau \end{aligned} \tag{22}$$

Так как величина $Bg_0' + Cg_0'^2 \ll 1 + A$, то уравнение (21) легко разрешается последовательными приближениями.

Таблица 2

Трение (τ)

$\varphi(0)=\alpha$	$\sigma=1$			$\sigma=0.7$		
	$l=1$	$S_{j0}=0.2$	$S_{j0}=0.02$	$l=1$	$S_{j0}=0.2$	$S_{j0}=0.02$
0	0.9629 (0.9548)	0.9117 —	0.8802 —	0.9528 (0.9362)	0.9083 (0.9109)	0.8788 (0.8894)
—0.3	0.7770	0.7383	0.7084	0.7737	0.7388	0.7114
—0.5	0.6661 (0.6669)	0.6373 —	0.6133 —	0.6668 (0.6610)	0.6395 (0.6430)	0.6168 (0.6276)
—1.0	0.4489 (0.4519)	0.4409 —	0.4333 —	0.4540 (0.4551)	0.4441 (0.4458)	0.4349 (0.4380)

Тепловой поток (g_0')

$\varphi(0)=\alpha$	$\sigma=1$			$\sigma=0.7$		
	$l=1$	$S_{j0}=0.02$	$S_{j0}=0.02$	$l=1$	$S_{j0}=0.2$	$S_{j0}=0.02$
0	0.5540 (0.5421)	0.5327 —	0.5333 —	0.4841 (0.4696)	0.4676 (0.4484)	0.4692 (0.4317)
—0.3	0.3673	0.3470	0.3369	0.3470	0.3302	0.3232
—0.5	0.2623 (0.2580)	0.2453 —	0.2340 —	0.2663 (0.2600)	0.2511 (0.2430)	0.2420 (0.2295)
—1.0	0.0823 (0.0823)	0.0769 —	0.0722 —	0.1120 (0.1112)	0.1044 (0.1010)	0.0983 (0.0932)

В табл. 2 приведены значения τ и g_0', полученные из решения системы уравнений (8), (21) для различных комбинаций параметров σ, α, S_{j_0}. Параметр g_0 равен 0.5. В скобках даны значения τ и g_0', найденные в результате численного интегрирования.

Анализ данных табл. 2 показывает, что использование приближенных уравнений (8), (21) позволяет вычислять искомые величины τ и g_0' с удовлетворительной точностью.

Интересно отметить, что погрешность определения τ и g_0' примерно одинакова во всем интервале изменения параметра α. Для более точного определения величины g_0' при малых α можно воспользоваться асимптотическими разложениями, аналогичными выведенным в работе [4]. Там же приводится сравнение с результатами численного интегрирования для случая $g_0 = 1$.

В заключение заметим, что, так как зависимость решения систем (8), (21) от переменности свойств газа описывается величиной $(dl / dg)_0$ (см. (22)), по-видимому, этот параметр, а не фактор $l_e = \rho_\infty\mu_\infty / \rho_0\mu_0$, обычно используемый в литературе для аппроксимации значений τ и g_0', следует считать определяющим при учете сжимаемости.

Авторы благодарят Т. Я. Тимофееву за помощь при проведении численных расчетов.

Поступила 15 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Meksyn D. The new methods in laminar boundary-layer theory. Oxford, P. P., 1961.
2. Тирский Г. А. Сублимация тупого тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке смеси газов. Ж. вычисл. мех. и матем. физ., 1961, т. 1, № 5.
3. Тирский Г. А. Оплавление тела в окрестности критической точки и линии в диссоциированном потоке воздуха с испарением пленки расплава. ПМТФ, 1961, № 5.
4. Резников Б. И., Смыслов Ю. Н. Об одном методе определения трения и теплового потока в автомодельных задачах пограничного слоя. ПМТФ, 1964, № 1.