ПТМФ, № 5, 1970

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ ДВУМЯ СООСНЫМИ КОНУСАМИ И ВНУТРИ ДВУГРАННОГО УГЛА

А. Д. Чернышов

(Воронеж)

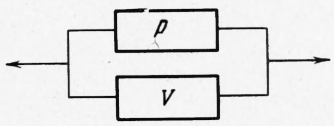
Обычно свойства вязко-пластических сред изучают при помощи цилиндрического вискозиметра. Погрешность при подобных измерениях получается из-за влияния дна. Ниже рассмотрено течение среды в коническом вращающемся вязкозиметре, который лишен указанного недостатка. Получены формулы для определения физических характеристик материала, если даже материал обладает нелинейными вязкими свойствами.

Во второй задаче рассмотрено течение вязко-пластической среды внутри двугранного угла, грани которого медленно и монотонно поворачиваются. Доказывается, что в этом течении жесткие области не возникают. Этот результат может быть использован в некоторых технологических процессах. Так, при заливке вязко-пластического полимера в форму часто бывает необходимым, чтобы полимер занял весь объем формы. Этого добиться трудно, если форма имеет угловые области. Грани формы в окрестности такой области образуют двугранный угол. При заполнении формы полимером в окрестности ребра образуется жесткая область, которая играет роль «пробки» и не пропускает массу в угол. Если грани формы сделать подвижными, то указанная пробка раздавливается. Это в значительной мере способствует заполнению массой области двугранного угла.

В обеих задачах движение предполагается квазистационарным, влияние температуры и сил инерции не учитывается.

1. Реологическая модель несжимаемой вязко-пластической среды изображена на фиг. 1, где элементы вязкости V и пластичности P соединены параллельно между собой. Обозначим s_{ij}^v и s_{ij}^p тензоры напряжений на этих элементах. Условие пластичности с пределом текучести k_1 запишем в форме Мизеса

$$s_{ij}^p\,(s_{ij}^p - {}^1/_3 s_{kk}\delta_{ij}) = 2k_1^2 \qquad (1.1)$$



Фиг. 1

Из ассоциированного закона течения вытекает определяющее уравнение для элемента P в виде [1]

$$s_{ij}^p = \sqrt{2}k_1 I_2^{-1}\varepsilon_{ij} + {}^1/_3 s_{kk}^p\delta_{ij}, \quad I_2^2 = \varepsilon_{ke}\varepsilon_{ke} \geqslant 0, \quad \varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(v_{i,j} + v_{j,i}) \qquad (1.2)$$

где v_i — скорость частиц среды. Для элемента вязкости уравнение запишем в виде

$$s_{ij}^v = 2\eta\,(I_2)\,\varepsilon_{ij} + {}^1/_3 s_{kk}^v\delta_{ij} \qquad (1.3)$$

Зависимость коэффициента вязкости η от инварианта I_2 должна быть такой, чтобы выполнялся второй закон термодинамики

$$s_{ij}^v\varepsilon_{ij} = 2I_2^2\eta\,(I_2) \geqslant 0, \quad \text{или} \quad \eta\,(I_2) \geqslant 0 \qquad (1.4)$$

Кроме этого неравенства коэффициент вязкости должен удовлетворять условию

$$\lim I_2^2\,\eta\,(I_2) = 0 \qquad (I_2 \to 0) \qquad (1.5)$$

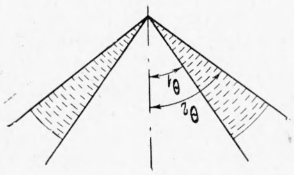
Это условие означает, что скорость диссипации энергии в среде за счет вязких свойств стремится к нулю, когда исчезает скорость деформаций.

Напряжения σ_{ij} в сплошной среде складываются из напряжений на элементах вязкости и пластичности. Отсюда получаем определяющее уравнение для вязко-пластической среды с нелинейной вязкостью

$$\delta_{ij} = [\sqrt{2}k_1 I_2^{-1} + 2\eta(I_2)]\,\varepsilon_{ij} - p\delta_{ij} \tag{1.6}$$

где p — гидростатическое давление.

2. Рассмотрим течение вязко-пластической среды между двумя соосными конусами (фиг. 2). Среда заполняет область между конусами. Свободная поверхность среды предполагается сферической с радиусом r_0. Внутренний конус с углом раствора θ_1 вращается с постоянной угловой скоростью ω_0, внешний конус с углом раствора θ_2 остается неподвижным. Такая модель называется коническим вискозиметром. Задачу будем рассматривать в сферической системе координат (r, φ, Ψ).



Фиг. 2

Предположим, что поле скоростей имеет вид

$$v_1 = v_2 = 0 \qquad v_3 = r\omega(\varphi)\sin\varphi \tag{2.1}$$

Это означает, что каждая частица движется по окружности радиусом $r \sin \varphi$ вокруг оси конусов с постоянной угловой скоростью $\omega(\varphi)$. Из компонент скорости деформаций отличной от нуля будет только одна компонента

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\frac{d\omega}{d\varphi}\sin\varphi = \frac{1}{2}\gamma, \qquad I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}|\gamma| \tag{2.2}$$

Знак величины γ зависит от направления вращения меньшего конуса, поэтому для определенности в дальнейшем будем считать γ положительным. Уравнения равновесия в сферической системе координат для данной задачи запишутся в виде

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d\tau}{d\varphi} + 2\tau \operatorname{ctg}\varphi = 0, \quad \tau = \sigma_{23} \tag{2.3}$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$p = c_0, \qquad \tau = c_1 / \sin^2\varphi \tag{2.4}$$

Из (1.6), (2.2) и (2.4) приходим к дифференциальному уравнению

$$\eta(\gamma)\gamma + k = \frac{c_1}{\sin^2\varphi}, \quad \text{или} \quad F(\omega'\sin\varphi) = \frac{c_1}{\sin^2\varphi} - k \tag{2.5}$$

$$F(\gamma) = \eta(\gamma)\gamma, \qquad k = k_1 \operatorname{sign}\gamma \tag{2.6}$$

Постоянная интегрирования c_0 находится после задания давления в какой-нибудь точке области течения. Величина c_1 и другая постоянная интегрирования уравнения (2.5) определяются из двух граничных условий

$$\omega = \omega_0 \ \text{при} \ \varphi = \theta_1, \qquad \omega = 0 \ \text{при} \ \varphi = \theta_2 \tag{2.7}$$

или

$$\omega = \omega_0 \ \text{при} \ \gamma = \theta_1, \qquad \omega = \omega' = 0 \ \text{при} \ \varphi = \theta^* \tag{2.8}$$

Граничным условием (2.7) пользуются, если вся среда между конусами охвачена движением, а условием (2.8) — если только часть среды, прилегающая к внутреннему конусу, находится в движении. В последнем случае должно выполняться неравенство

$$\theta^* \leqslant \theta_2 \tag{2.9}$$

Предположим, что предел текучести и зависимость коэффициента вязкости от скорости деформации неизвестны и подлежат определению. Покажем, что это можно сделать при помощи эксперимента на коническом вискозиметре. Заметим, что нахождение зависимости $\eta(\gamma)$ равносильно нахождению зависимости $F(\gamma)$.

Из наблюдений над движением частиц среды на свободной поверхности найдем зависимость

$$\omega = \omega(\varphi) \tag{2.10}$$

Зная $\omega(\varphi)$, нетрудно определить функции

$$\gamma = \gamma(\varphi), \qquad \varphi = \varphi(\gamma) \tag{2.11}$$

Подставляя $\varphi = \varphi(\gamma)$ в правую часть (2.8), получаем

$$F(\gamma) = \frac{c_1}{\sin^2 \varphi(\gamma)} - k \tag{2.12}$$

Остается определить k и c_1. Предположим, что часть области среды, примыкающая к внешнему конусу, находится в покое. Это возможно, если ω_0 невелико. На свободной поверхности среды граница области, охваченной движением, хорошо наблюдается и определяется углом θ^*. На конической поверхности с углом раствора θ^*, ограничивающей область движения среды, скорость деформации обращается в нуль, поэтому из (2.5) находим

$$c_1 = k \sin^2\theta^* \tag{2.13}$$

Предел текучести k найдем следующим образом. Если ω_0 — очень малая величина, но не равная нулю, то скорость деформации тоже мала. В этом случае на поверхности внутреннего конуса напряжение достигает предела текучести. Это обстоятельство позволяет выразить предел текучести через крутящий момент M_0, который необходимо приложить к внутреннему конусу для того, чтобы стронуть его с места

$$k = 3M_0 / 2\pi r_0^3 \sin^2 \theta_1 \tag{2.14}$$

Подстановка формул (2.13) и (2.14) в (2.12) позволяет получить зависимость $F(\gamma)$ и $\eta(\gamma)$.

Если заранее известен вид функции $F(\gamma)$, например

$$F(\gamma) = \eta_0 \gamma^m \tag{2.15}$$

то задача определения нелинейной зависимости коэффициента вязкости от скорости деформации значительно упрощается. В случае (2.15) эта задача сводится к нахождению коэффициента η_0 и показателя m.

Для нахождения η_0 и m подставим (2.15) в (2.5). В результате придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\omega}{d\varphi} \sin\varphi = \left(\frac{c_1}{\eta_0 \sin^2\varphi} - \frac{k}{\eta_0}\right)^{1/m}$$

Отсюда имеем

$$\omega(\varphi)=\int_{\theta_1}^{\varphi}\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{c_1}{\eta_0\sin^2\varphi}-\frac{k}{\eta_0}\right)^{1/m}d\varphi+\omega_0 \tag{2.16}$$

Этот интеграл вычисляется в явном виде, если $1/m$ — целое число. В случае граничных условий (2.8) постоянная c_1 находится из (2.13), а угол θ^* должен удовлетворять уравнению

$$\int_{\theta_1}^{\theta^*}\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{c_1}{\eta_0\sin^2\varphi}-\frac{k}{\eta_0}\right)^{1/m}d\varphi+\omega_0=0 \tag{2.17}$$

Измеряя θ^*, из (2.17) найдем η_0 по формуле

$$\eta_0^{1/m}=-\frac{1}{\omega_0}\int_{\theta_1}^{\theta^*}\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{c_1}{\sin^2\varphi}-k\right)^{1/m}d\varphi \tag{2.18}$$

Показатель m определится, если измерить угловую скорость ω в какой-нибудь промежуточной точке между конусами и воспользоваться зависимостью (2.16).

Если ω_0 велико, так что неравенство (2.9) не выполняется, то в соответствии с (2.7) постоянная c_1 определяется из соотношения

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{c_1}{\eta_0\sin^2\varphi}-\frac{k}{\eta_0}\right)^{1/m}d\varphi+\omega_0=0 \tag{2.19}$$

Для линейного закона вязкости ($m=1$) из (2.16) найдем

$$\omega=\frac{c_1-2k}{2\eta_0}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\right)-\frac{c_1}{2\eta_0}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}-\frac{\cos\theta_1}{\sin^2\theta_1}\right)+\omega_0 \tag{2.20}$$

3. Пусть среда, заполняющая неограниченный двугранный угол с линейным углом 2θ, движется вследствие медленного и монотонного изменения угла θ со скоростью ω. Течение среды в направлении ребра двугранного угла отсутствует. Эту задачу будем рассматривать в цилиндрической системе координат $x_1=r$, $x_2=\varphi$, $x_3=z$.

Запишем условие несжимаемости

$$\frac{\partial v_1}{\partial r}+\frac{v_1}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_2}{\partial\varphi}=0 \tag{3.1}$$

Из уравнения (3.1) следует существование потенциала $\Phi(r,\varphi)$

$$v_1=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},\qquad v_2=-\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{3.2}$$

Решение задачи будем искать в виде

$$\Phi(r,\varphi)=r^2f(\varphi),\quad v_1=rf',\quad v_2=-2rf \tag{3.3}$$

Из компонент скорости деформаций отличными от нуля будут

$$\varepsilon_{11}=-\varepsilon_{22}=f',\qquad \varepsilon_{12}={}^1/_2f'' \tag{3.4}$$

Для составляющих тензора напряжений, отличных от нуля, из (1.6) и (3.4) найдем

$$\sigma_{11}=2\beta f'+p(r,\varphi),\quad \sigma_{22}=-2\beta f'+p,\quad \sigma_{12}=\beta f'' \tag{3.5}$$
$$2\beta=\sqrt{2}kI_2^{-1}+2\eta(I_2)$$

В выражениях (3.5) только p зависит от двух переменных (r, φ), а остальные зависят только от φ. Зависимость p (r, φ) представим в виде

$$p = p_0 \ln r + p_1(\varphi) \tag{3.6}$$

Соотношения (3.5) и (3.6) нужно подставить в уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varphi} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varphi} + \frac{2\sigma_{12}}{r} = 0 \tag{3.7}$$

После подстановки (3.5) в (3.7) для $p_1(\varphi)$ и $f(\varphi)$ получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$p_1' = 2\beta' f', \quad 2I_2 p_0 + (f''' + 4f')\,[2I_2\beta + (f'')^2 d\beta\,/\,dI_2] = 0 \tag{3.8}$$

Вследствие прилипания среды на подвижных границах решение системы уравнений (3.8) должно удовлетворять четырем граничным условиям

$$f' = 0, \quad f = \pm\omega \quad \text{при} \quad \varphi = \pm\theta \tag{3.9}$$

Если подвижные границы скользкие, то из отсутствия сдвига и условия неперетекания среды через границы найдем граничные условия

$$f'' = 0, \; f = \pm\omega \quad \text{при} \quad \varphi = \pm\theta \tag{3.10}$$

В обеих задачах течение среды будет симметричным относительно биссектрисы угла. Из симметрии течения среды и выражений для скорости (3.3) следует, что функция $f(\varphi)$ является антисимметричной. В связи с этим граничные условия (3.9) и (3.10) упрощаются и приводятся к виду соответственно

$$f' = 0, \quad f = \omega \quad \text{при} \quad \varphi = \theta \tag{3.11}$$

$$f'' = 0, \quad f = \omega \quad \text{при} \quad \varphi = \theta \tag{3.12}$$

Общее антисимметричное решение $f(\varphi)$ первого уравнения из (3.8) будет зависеть от одной произвольной постоянной интегрирования и неизвестной константы p_0, которые определяются из двух граничных условий (3.11) или (3.12). Очевидно, что

$$f = f'' = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0 \tag{3.13}$$

Это означает, что биссектрису угла можно считать неподвижной границей, на которой отсутствует прилипание. Таким образом, решение задачи с граничными условиями (3.11) одновременно является решением задачи о течении среды в двугранном угле раствором θ, когда на подвижной грани отсутствует сдвиг. Если совместно рассмотреть (3.12) и (3.13), то найдем, что решение задачи с граничными условиями (3.12) одновременно является решением аналогичной задачи о течении среды в двугранном угле раствором θ, у которого одна грань подвижная, а другая — неподвижная. По аналогии с (3.13) на биссектрисе угла θ должно выполняться условие $f'' = 0$ при $\varphi = {}^1\!/_2\theta$. Деление угла можно продолжить и каждый раз на биссектрисе каждого сектора будем иметь $f'' = 0$. Это приводит к выводу, что решение задачи с граничными условиями (3.12) должно удовлетворять уравнению

$$f'' = 0, \qquad f = (\omega\,/\,\theta)\,\varphi \tag{3.14}$$

Подставляя (3.14) в (3.8), найдем

$$p_0 = -2k\,\operatorname{sign}\omega - 4\,(\omega\,/\,\theta)\,\eta\,(\sqrt{2}|\omega/\theta) \tag{3.15}$$

$$p_1(\varphi) = \text{const}, \qquad \sigma_{kk} = 3\,(p_0 \ln r + \text{const})$$

Величина const определяется из задания давления в какой-нибудь точке области течения. Как видно из (3.14), поле скоростей не зависит от вязких и пластических свойств среды. Эти свойства вносят вклад только в распределение поля напряжений

$$\sigma_{11} - p = p - \sigma_{22} = k \operatorname{sign} \omega + 2\eta\,(\sqrt{2}|\omega/\theta|), \quad \sigma_{12} = 0 \tag{3.16}$$

Докажем, что в течении среды с полем скоростей (3.3), удовлетворяющем уравнению (3.8), жесткое ядро не существует. Если это ядро существует, то на границе ядра должны выполняться одновременно следующие равенства:

$$v_x = r\,(f' \cos\varphi + 2f \sin\varphi) = u_0 \tag{3.17}$$

$$v_y = r\,(f' \sin\varphi - 2f \cos\varphi) = 0, \qquad \varepsilon_{ij} = 0$$

где u_0 — скорость движения жесткого ядра параллельно оси симметрии x. Так как u_0 не зависит от r и φ, то из (3.17) находим условия на предполагаемой границе жесткого ядра

$$f = f' = f'' = 0 \tag{3.18}$$

Покажем, что равенства (3.18) влекут за собой обращение в нуль всех последующих производных от функции f. При приближении к границе жесткого ядра со стороны области течения в пределе найдем отношение

$$\lim \left(\frac{I_2}{f''}\right)^2 = \frac{1}{2} + 2\lim\left(\frac{f'}{f''}\right)^2 = \frac{1}{2} + 2\lim\left(\frac{f''}{f'''}\right)^2 \tag{3.19}$$

Если на границе жесткого ядра $f''' \neq 0$, то предел отношения в (3.19) равен $^1/_2$. Тогда выражение в квадратных скобках из второго уравнения (3.8) будет отлично от нуля, следовательно $f''' = 0$. Дифференцируя (3.8) последовательно несколько раз, найдем, что все производные от функции f обращаются в нуль. Следовательно, решение должно быть тривиальным, но оно не удовлетворяет граничным условиям (3.11) и (3.12). Это противоречие доказывает отсутствие жесткого ядра.

Общее решение уравнения (3.8) с граничными условиями (3.11) получить не удается. Для частных случаев, когда $\theta = \theta_1 = {}^1/_4\pi$ или $\theta_2 = {}^3/_4\pi$, предполагая, что $I_2 = \text{const}$, решение задачи (3.8), (3.11) имеет вид

$$f = a \sin 2\varphi, \quad a = (-1)^{i+1} \qquad (i = 1{,}2)$$

$$I_2 = 2\sqrt{2}|a|, \quad \beta = k/4|a| + \eta\,(I_2), \quad p_0 = 0, \quad p_1 = \text{const} \tag{3.20}$$

$$\sigma_{11} - p_1 = p_1 - \sigma_{22} = 4\beta a \cos 2\varphi, \qquad \sigma_{12} = -4\beta a \sin 2\varphi$$

Для вязкой жидкости, когда $k = 0$ и $\eta = \eta_0 = \text{const}$, решение уравнения (3.8) с граничными условиями (3.11) имеет вид

$$f = \frac{\omega\,(2\varphi \cos 2\theta - \sin 2\varphi)}{2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta}, \quad p = \frac{8\eta_0\omega \cos 2\theta}{\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\theta} \ln r + \text{const} \tag{3.21}$$

В рассматриваемом течении вязкой несжимаемой жидкости поле скоростей не зависит от коэффициента вязкости. При $\theta \to 0$ напряжения и скорость неограниченно возрастают. Существует критическое значение угла θ^*, которое является наименьшим положительным корнем трансцендентного уравнения $2\theta = \operatorname{tg} 2\theta$. Когда $\theta \to \theta^* - 0$, то необходимо $\omega > 0$, чтобы было $p > 0$ в окрестности начала координат. Когда $\theta \to \theta^* + 0$, то, чтобы $p > 0$, необходимо $\omega < 0$. Если эти условия не выполнены, то из (3.21) получим, что при любом выборе const найдется такое r_0, что для $r < r_0$ давление становится отрицательным. В областях, где давление становится отрицательным, появляются кавитационные полости, которые не учитываются в постановке задачи. В связи с этим решение (3.21) может быть использовано только в окрестности начала координат, определяемой неравенством $r \lll r_0$.

При смыкании граней двугранного угла ($\theta \to 0$), напряжения становятся бесконечными. Однако можно подобрать такую зависимость ω (θ), при которой напряжения будут конечными, когда $\theta \to 0$. Из (3.21) для p при малых θ находим зависимость

$$p = 3\eta_0\theta^{-3}\omega(\theta) \ln r + \text{const} \tag{3.22}$$

Из (3.22) получим что для конечности p, необходимо чтобы

$$d\theta / dt = \omega(\theta) = -\alpha\theta^3 \tag{3.23}$$

где α — коэффициент пропорциональности. Интегрируя уравнение (3.23), получаем

$$\theta = (\theta_0^{-2} + 2\alpha t)^{-1/2} \tag{3.24}$$

Из (3.24) следует, что при условии конечности напряжений смыкание граней двугранного угла будет протекать бесконечно долго.

Задача о течении вязко-пластической среды в двугранном угле параллельно его ребру рассматривалась в работе [2].

Поступила 18 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности, М., «Наука», 1966.
2. Чернышов А. Д. О течениях в клине вязко-пластической среды с нелинейной вязкостью. ПМТФ, 1966, № 4.