15. Боришанский В. М. О критериальной формуле для обобщения опытных данных по прекращению пузырькового кипения в большом объеме жидкости. Ж. техн. физ., 1956, т. 26, вып. 2.
16. Zuber N. Hydrodynamic aspects of boiling heat transfer (thesis). A. E. C. V, 1959, 4439.
17. Bragg S. L. and Smith I. E. Dimensional analysis of burnout heat transfer. Int. J. Heat and Mass Transfer, 1961, vol. 3, No 3.
18. Cole R. A photographic study of pool boiling in the region of the critical heat flux. A. I. Ch. E. J., 1960, No 4.
19. Чанг Ян-по. О некоторых возможных условиях возникновения кризиса при пузырьковом кипении. Теплопередача, 1963, т. 86, № 2 (Труды Американского общества инженеров-механиков, сер. С, русск. пер.).
20. Мамонтова Н. Н. Изучение механизма кипения при больших тепловых потоках посредством киносъемки. ПМТФ, 1963, № 3.
21. Кутателадзе С. С., Сорокин Ю. Л. О гидродинамической устойчивости некоторых газожидкостных смесей. Вопросы теплоотдачи и гидравлики двухфазных сред (сб. статей), Госэнергоиздат, 1961.

ВЛИЯНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ СКОРОСТИ НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Ю. Л. Розенштон (*Ленинград*)

Рассмотрен вопрос о влиянии скоростной нестационарности неизотермического турбулентного потока, обусловливающей изменение теплоотдачи со временем, на точность измерения температуры потока контактным способом. Показано, что при наличии корреляции между пульсациями температуры и скорости в потоке, имеющей место при переносе тепла, в частности для локальной изотропии в условиях сжимаемости, средняя температура термометра оказывается смещенной. Оценивается величина систематической погрешности показаний термометра при экспоненциальной и степенной аппроксимации кросс-корреляционной функции для пульсации температуры и скорости в потоке.

При измерении температуры неизотермического потока в условиях его скоростной нестационарности необходимо учитывать влияние изменений скорости на теплообмен обтекаемого тела с набегающим потоком жидкости или газа. Как показано в ряде работ [1-3], изменение теплоотдачи помещенного в поток тела во времени, вызванное скоростной нестационарностью потока, может вносить определенные искажения в процесс измерения температуры этого тела. Так, синхронные периодические изменения скорости и температуры потока приводят к разворачиванию монохроматического колебания температуры на входе термометра в полный спектр [2]. Однако, ввиду того что в практических случаях эффекты чисто периодического воздействия реализуются довольно редко, необходим более общий подход, заключающийся в рассмотрении поставленной задачи для условий развитого турбулентного движения, характеризуемого наличием интенсивных турбулентных пульсаций скорости и температуры.

Температурное поле тела, помещенного в однородный поток, описывается уравнением теплопроводности с граничным условием на его поверхности

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = a\nabla^2 T^*, \qquad -\nabla T^*|_s + H(t)\,[\Theta(t) - T^*|_s] = 0 \qquad \left(H = \frac{\alpha}{\lambda}\right) \tag{1}$$

Здесь a и λ — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности соответственно, α — коэффициент теплоотдачи, Θ — температура окружающей среды. Для решения поставленной задачи используем метод возмущений; положим

$$\Theta(t) = \Theta_0 + \Theta'(t) = \Theta_0 + \varepsilon\Theta_1(t), \quad H(t) = H_0 + H'(t) = H_0 + \varepsilon H_1(t) \tag{2}$$

Здесь Θ_0 и H_0 — постоянные составляющие, Θ' и H' — пульсационные части, ε — малый параметр; будем искать решение для температуры $T^*(x, y, z, t)$ в виде

$$T^* = T_0^* + \varepsilon T_1^* + \ldots + \varepsilon^m T_m^* \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и группируя члены при одинаковых степенях ε, получим для нулевого приближения

$$\frac{\partial T_0^*}{\partial t} = a\nabla^2 T_0^*, \qquad -\nabla T_0^*|_s + H_0(\Theta_0 - T_0^*|_s) = 0 \tag{4}$$

Общий интеграл уравнения Фурье (4) с граничным условием смешанного типа имеет вид

$$T_0^* = \Theta_0 g(x, y, z, t) \tag{5}$$

Здесь $g(x, y, z, t)$ — переходная функция, представляющая собой реакцию на единичный скачок. При этом по теореме Буссинеска [4]

$$g(x, y, z, t) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} A_j Q_j(x, y, z) e^{-\gamma_j t} \qquad (\gamma_j = a m_j) \tag{6}$$

Здесь A_j — постоянные (начальные тепловые амплитуды), Q_j — собственные функции, m_j — собственные числа. Если пренебречь процессами установления температурного поля и рассматривать установившийся режим, то в результате можно получить

$$T_0^* = \Theta_0 \tag{7}$$

Для первого приближения

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial t} = a\nabla^2 T_1^*, \qquad -\nabla T_1^* |_s + H_0 [\Theta_1(t) - T_1^* |_s] = 0 \tag{8}$$

Решение (8) может быть получено при помощи интеграла Дюамеля

$$T_1^* = \int_0^{\infty} G(x, y, z, \xi)\, \Theta_1(t - \xi)\, d\xi \tag{9}$$

где $G(x, y, z, t)$ — локальная импульсная переходная функция стационарной системы измерения температуры

$$G(x, y, z, t) = \frac{\partial g(x, y, z, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \gamma_j Q_j e^{-\gamma_j t} \tag{10}$$

Второе приближение дает

$$\frac{\partial T_2^*}{\partial t} = a\nabla^2 T_2^*, \qquad -\nabla T_2^* |_s + H_0 [\psi(t) - T_2^* |_s] = 0 \tag{11}$$

где

$$\psi(t) = \frac{H_1(t)}{H_0} [\Theta_1(t) - T_1^* |_s] \tag{12}$$

Применив к (11) теорему Дюамеля аналогично предыдущему случаю, получим для квазистационарного режима

$$T_2^* = \int_0^{\infty} G(x, y, z, \xi)\, \psi(t - \xi)\, d\xi = \frac{1}{H_0} \int_0^{\infty} G(x, y, z, \xi)\, H_1(t - \xi)\, \Theta_1(t - \xi)\, d\xi -$$

$$- \frac{1}{H_0} \int_0^{\infty} G(x, y, z, \xi)\, H_1(t - \xi)\, T_1^*(x_s, y_s, z_s, t - \xi)\, d\xi \tag{13}$$

Здесь x_s, y_s, z_s — значения текущих координат на поверхности тела.

В результате, для среднеобъемной температуры термометра

$$T = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} T^* d\Omega \qquad (d\Omega = dx dy dz)$$

с учетом (2), (3), (7) и (9) найдем

$$T(t) = \Theta_0 + \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} G(x, y, z, \xi)\, \Theta'(t - \xi)\, d\xi d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{\Omega H_0} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} G(x, y, z, \xi)\, H'(t - \xi)\, \Theta'(t - \xi)\, d\xi d\Omega -$$

$$- \frac{1}{\Omega H_0} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G(x, y, z, \xi_1)\, G(x_s, y_s, z_s, \xi_2)\, H'(t - \xi_1)\, \Theta'(t - \xi_1 - \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 d\Omega \tag{14}$$

Выразим теперь относительные пульсации теплоотдачи через относительные пульсации скорости. Раскладывая в ряд степенное уравнение Нуссельта вида $N = CR^n$, связывающее критерии Нуссельта N и Рейнольдса R, и ограничиваясь в разложении первыми двумя членами, получим

$$\frac{H'}{H_0} = \frac{N'}{N_0} \approx n \frac{R'}{R_0} = n \frac{u'}{u_0} \tag{15}$$

Здесь u — составляющая скорости по направлению движения. Как и прежде, штрихи соответствуют пульсационным составляющим, а индексы 0 — средним установившимся значениям величин в потоке. Для больших чисел R, характерных для режима развитой турбулентности, $n \approx 0.8$ [5]. Таким образом, относительная погрешность, вызванная отбрасыванием третьего члена в разложении $N = CR^n$, не превышает по абсолютной величине $(1 - n)\, u' / 2u_0$, что составляет довольно малую ошибку в широком диапазоне изменения величины u' / u_0.

С учетом (15) выражение (14) после усреднения по времени перепишется в виде

$$\langle T(t)\rangle = \Theta_0 + \frac{n}{\Omega u_0} \int_\Omega \int_0^\infty G(x, y, z, \xi) \langle u'(t - \xi)\, \Theta'(t - \xi)\rangle\, d\xi\, d\Omega -$$

$$- \frac{n}{\Omega u_0} \int_\Omega \int_0^\infty \int_0^\infty G(x, y, z, \xi_1)\, G(x_s, y_s, z_s, \xi_2) \langle u'(t - \xi_1)\, \Theta'(t - \xi_1 - \xi_2)\rangle\, d\xi_1 d\xi_2 d\Omega \tag{16}$$

Полагая $u'(t)$ и $\Theta'(t)$ стационарными случайными функциями времени и вводя кросс-корреляционную функцию $\varphi_{u\theta}(\xi)$, характеризующую перенос тепла в направлении средней скорости и определяемую выражением

$$\varphi_{u\theta}(\xi) = \langle u'(t)\, \Theta'(t + \xi)\rangle \tag{17}$$

преобразуем (16) к виду (18)

$$\langle T(t)\rangle = \Theta_0 + \frac{n\varphi_{u\theta}(0)}{u_0} - \frac{n}{\Omega u_0} \int_\Omega \int_0^\infty \int_0^\infty G(x, y, z, \xi_1)\, G(x_s, y_s, z_s, \xi_2)\, \varphi_{u\theta}(\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 d\Omega$$

Таким образом, при наличии корреляции между пульсациями скорости и температуры в потоке в отличие от стационарного линейного термометра, не обладающего систематической ошибкой измерения температуры турбулентного потока [6, 7], термометр в рассматриваемом случае представляет собой нестационарную линейную систему измерения температуры, параметрические искажения в которой, обусловленные пульсациями теплоотдачи, приводят к сдвигу постоянной составляющей измеряемой температуры

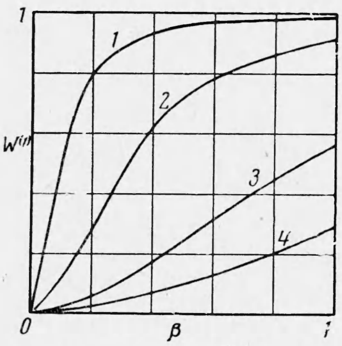
$$\Delta T = \langle T(t)\rangle - \Theta_0 = \frac{n\varphi_{u\theta}(0)}{u_0} \left\{1 - \int_0^\infty G(x_s, y_s, z_s, \xi_2)\, r_{u\theta}(\xi_2) d\xi_2\right\} \tag{19}$$

где $r_{u\theta}(\xi)$ — нормированная кросс-корреляционная функция.

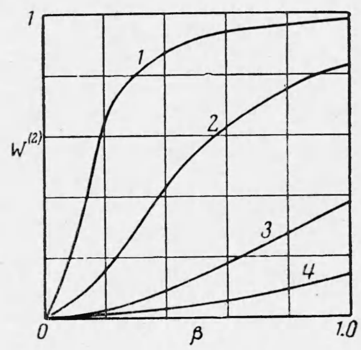
В предположении однородности, изотропности и несжимаемости турбулентного потока кросс-корреляционная функция $\varphi_{u\theta}(\xi)$ равна нулю, в связи с чем систематическая погрешность измерения температуры отсутствует. Однако при наличии температурных неоднородностей вдоль направления турбулентного движения, вызванных, например, диффузией тепла от источников, находящихся в жидкости, величина $\varphi_{u\theta}(\xi)$ в общем случае отлична от нуля. Для локальной изотропии в условиях сжимаемости тесная корреляционная связь между u' и θ', в частности, для нагретой дозвуковой турбулентной струи установлена в значительном числе экспериментальных работ [8–11]. При этом показано, что в турбулентном потоке с поперечным сдвигом величина $r_{u\theta}(\xi)$ существенно положительна, что в свою очередь приводит к тому, что сдвиг постоянной составляющей ΔT в соответствии с (19) также оказывается бо́льшим нуля, т. е. средняя температура термометра завышается. В общем случае знак ΔT совпадает со знаком $\varphi_{u\theta}(0)$, так как величина в фигурных скобках в формуле (19) всегда положительна. Значение ΔT можно рассчитать, задав конкретную форму аналитической зависимости $\varphi_{u\theta}(\xi)$. Необходимо отметить, однако, что в настоящее время в литературе по этому поводу имеются лишь весьма отрывочные сведения, не дающие возможности делать обоснованные заключения. В этих условиях наиболее целесообразной и естественной будет экспоненциальная аппроксимация нормированной кросс-корреляционной функции вида

$$r_{u\theta}(\xi) = e^{-b|\xi|} \tag{20}$$

где b — некоторый параметр. Дополнительным обоснованием экспоненциальной аппроксимации $r_{u\theta}(\xi)$ служит то обстоятельство, что на практике оказывается удобным аппроксимировать соответствующую корреляционную функцию системой функций, преобразование Фурье которых представляет собой дробно-рациональные функции.



Фиг. 1



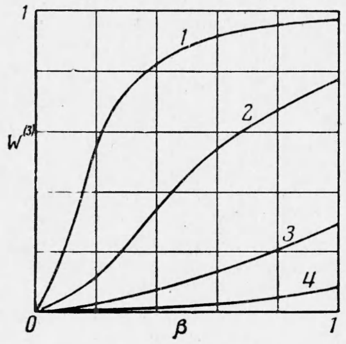
Фиг. 2

Такими свойствами обладают, в частности, экспоненциальная функция, либо ряд по экспонентам.

При учете (20), (10) и (6) выражение (19) после интегрирования по ξ_2 перепишется в виде

$$\Delta T = \frac{n\varphi_{u\theta}(0)}{u_0}\left\{1 - \sum_{j=1}^{\infty} A_j \frac{\gamma_j}{\gamma_j + b} Q_j(x_s, y_s, z_s)\right\} \tag{21}$$

Применим полученное выражение (21) к определению сдвига постоянной составляющей ΔT для термометрических тел, имеющих плоскую, цилиндрическую и сферическую формы. Воспользовавшись результатами аналитической теории теплопроводности [12] для всех трех случаев, после преобразований получим (22)



Фиг. 3

$$\Delta T^{(\nu)} = \frac{n\varphi_{u\theta}(0)}{u_0} W^{(\nu)}(B_0, \beta) \qquad \left(\beta = \rho\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}\right)$$

Здесь $\nu = 1, 2, 3$ для пластины, цилиндра и шара соответственно

$$W^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{\infty} F_j^{(\nu)}(B_0)\left[\left(\frac{\mu_j^{(\nu)}}{\beta}\right)^2 + 1\right]^{-1} \tag{23}$$

$$F_j^{(1)} = A_j^{(1)} Q_j^{(1)} = \frac{2B_0}{(B_0^2 + B_0 + \mu_j^{(1)2})}$$

$$F_j^{(2)} = A_j^{(2)} Q_j^{(2)} = \frac{2B_0}{(B_0^2 + \mu_j^{(2)2})}$$

$$F_j^{(3)} = A_j^{(3)} Q_j^{(3)} = \frac{2B_0}{(B_0^2 - B_0 + \mu_j^{(3)2})}$$

Величины $\mu_j^{(1)}$, $\mu_j^{(2)}$, $\mu_j^{(3)}$ представляют собой корни характеристических уравнений

$$\operatorname{ctg}\mu^{(1)} = \frac{\mu^{(1)}}{B_0}, \qquad \frac{J_0(\mu^{(2)})}{J_1(\mu^{(2)})} = \frac{\mu^{(2)}}{B_0}, \qquad \operatorname{tg}\mu^{(3)} = \frac{\mu^{(3)}}{1 - B_0} \qquad \left(B_0 = H_0\rho = \frac{\alpha_0\rho}{\lambda}\right)$$

Здесь B_0 — критерий Био, ρ — характерный размер, J_0, J_1 — функции Бесселя первого рода. Графики функций $W^{(\nu)}$ для $\nu = 1, 2, 3$ приведены на фиг. 1—3, где кривые *1*, *2*, *3* и *4* соответствуют значениям $B_0 = 0.01$, 0.1, 1 и 10, параметр β, отложенный по оси абсцисс, характеризует собой интенсивность изменения кросс-корреляционной функции

$$\beta^2 = \left(\left|\frac{dr_{u\theta}}{dF^*}\right|\right)_{\max} \qquad \left(F^* = \frac{a\,|\,\xi\,|}{\rho^2}\right)$$

(F^* — модифицированный критерий Фурье)

При малых значениях критерия Био ($B_0 < 0.1$) величина

$$\mu^{(\nu)} \approx \sqrt{\nu B_0}, \qquad F_j^{(\nu)} = \delta_{1j} \qquad (\delta_{nk} \text{ — символ Кронекера})$$

и выражение для W^ν переходит в следующее

$$W^{(\nu)} = \frac{b^2\tau^{(\nu)2}}{1 + b^2\tau^{(\nu)2}} \qquad \left(\tau^{(\nu)} = \frac{\nu\rho^2}{B_0 a}\right) \tag{24}$$

где $\tau^{(\nu)}$ — постоянная инерции термометра соответствующей формы.

Помимо экспоненциального приближения кросс-корреляционной функции $\varphi_{u\theta}$, в ряде случаев можно применить также степенную аппроксимацию вида закона «двух третей» Колмогорова — Обухова

$$\varphi_{u\theta}(\xi) = \varphi_{u\theta}(0) - M\xi^{2/3} \tag{25}$$

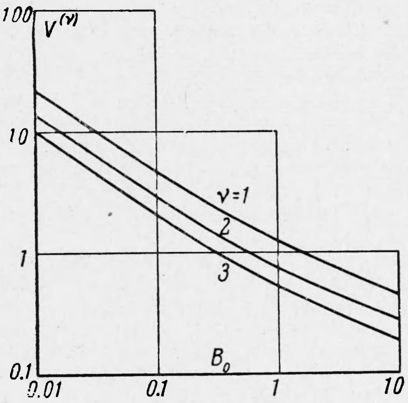
где M — величина, не зависящая от ξ.

В этом случае величина $\Delta T^{(\nu)}$ определится формулой

$$\Delta T^{(\nu)} = \frac{nM}{u_0}\,\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{\rho^2}{a}\right)^{2/3} V^{(\nu)}(B_0) \tag{26}$$

где

$$V^{(\nu)}(B_0) = \sum_{j=1}^{\infty} F_j^{(\nu)} (\mu_j^{(\nu)})^{-4/3}$$



Фиг. 4

График функций $V^{(\nu)}$ для $\nu = 1, 2, 3$ приведен на фиг. 4. Для малых значений критерия Био формула (26) может быть приближенно записана в виде

$$\Delta T^{(\nu)} \approx \frac{nM\Gamma(5/3)}{u_0} (\tau^{(\nu)})^{2/3} \tag{27}$$

Из (22) и косвенной оценки (26) следует, что сдвиг постоянной составляющей измеряемой температуры для термометра не слишком малой инерции может быть существен, если относительные пульсации скорости и температуры в потоке велики.

Поступила 21 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордов А. Н. Температура неограниченного цилиндра в потоке с пульсирующей скоростью и температурой. ПММ, 1955, т. 19, вып. 2.
2. Каганов М. А., Розеншток Ю. Л. О температуре тел в условиях пульсирующей теплоотдачи и температуры. ПМТФ, 1962, № 3.
3. Розеншток Ю. Л. Решение задач теплопроводности при коэффициенте теплоотдачи, зависящем от времени. ПМТФ, 1963, № 1.
4. Boussinesq T. Theorie analitique de la chaleur. Paris, 1901.
5. Якоб М. Вопросы теплопередачи. ИЛ, 1960.
6. Яглом А. М. Об учете инерции метеорологических приборов при измерениях в турбулентной атмосфере. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, 1954, № 24,
7. Розеншток Ю. Л. Дисперсия и случайная ошибка измерения температуры локально-изотропного турбулентного потока, ПМТФ, 1963, № 5.
8. Corrsin S. Investigation of flow in an axially symmetrical heated jet of air. NACA rep. W-94, 1943.
9. Corrsin S., Uberoi M. S. Further experiments on the flow and heat transfer in a heated turbulent jet. NACA TN, No 1865, 1949.
10. Corrsin S., Uberoi M. S. Spectrum and diffusion in a round turbulent jet. NACA TN No 2124, 1950.
11. Бай Ши-и. Турбулентное течение жидкостей и газов. ИЛ, 1962.
12. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Гостехтеоретиздат, 1952.