

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Г. В. Иванов, О. Н. Иванова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

Рассматриваются задачи о трехмерных формах равновесия тонких упругих стержней, один конец которых зашпемлен, а другой нагружен системой заданных консервативных сил. Излагается метод построения последовательности приближенных решений с монотонно уменьшающимися величинами функционала энергии. От предложенного в [1] метода построения таких последовательностей излагаемый метод отличается тем, что варьируются одновременно все углы, определяющие ориентацию главных осей инерции поперечных сечений стержня.

1. Вариационная формулировка задачи. Устойчивой форме равновесия тонкого упругого стержня, один конец которого зашпемлен, а другой нагружен системой заданных консервативных сил \mathbf{P}_m ($m = 1, 2, \dots, M$), соответствует минимум функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=1}^3 \{D_k(\omega_k - \omega_k^0)^2\} ds - \sum_{m=1}^M \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{r}_m, \quad (1.1)$$

где l — длина стержня; D_k ($k = 1, 2$ и 3) — изгибные и крутильная жесткости; ω_k, ω_k^0 ($k = 1, 2$ и 3) — кривизны и кручение оси стержня в деформированном и недеформированном состоянии:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{d\psi}{ds} \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \frac{d\vartheta}{ds} \cos \varphi, & \omega_2 &= \frac{d\psi}{ds} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi - \frac{d\vartheta}{ds} \sin \varphi, \\ \omega_3 &= \frac{d\psi}{ds} \cos \vartheta + \frac{d\varphi}{ds}, & \omega_k^0 &= \omega_k \Big|_{\psi=\psi_0, \vartheta=\vartheta_0, \varphi=\varphi_0}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

ψ, ϑ, φ — углы Эйлера, определяющие ориентацию базисных векторов \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$), направленных вдоль главных осей инерции поперечного сечения и по оси стержня (рис. 1); $\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0$ — углы Эйлера в недеформированном состоянии; \mathbf{r}_m ($m = 1, 2, \dots, M$) — радиусы-векторы точек приложения сил \mathbf{P}_m ($m = 1, 2, \dots, M$) в состоянии равновесия.

Принимается, что величины и направления сил \mathbf{P}_m ($m = 1, 2, \dots, M$) не зависят от деформации стержня, и, следовательно, компоненты P_m^i этих сил ($P_m^i = \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{e}^i$) в декартовой системе координат x_i с базисными векторами $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ постоянны.

Обозначим через \mathbf{r} радиус-вектор конца $s = l$ оси стержня. Используя

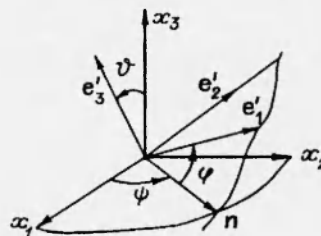


Рис. 1

очевидное равенство

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e}'_3$$

и полагая

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r} + \mathbf{r}'_m, \quad \mathbf{r}'_m = (x'_k)_m \mathbf{e}'_k,$$

можно записать потенциальную энергию сил \mathbf{P}_m в виде

$$-\sum_{m=1}^M \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{r}_m = -\left[\int_0^l \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}'_3 ds + \mathbf{N}_k \cdot \mathbf{e}'_k \right], \quad (1.3)$$

где

$$\mathbf{F} = \sum_{m=1}^M \mathbf{P}_m; \quad \mathbf{N}_k = \sum_{m=1}^M P_m^i (x'_k)_m \mathbf{e}_i;$$

$$\mathbf{e}'_1 = \cos \varphi \cdot \mathbf{n} + \sin \varphi \cdot \mathbf{n}'; \quad \mathbf{e}'_2 = -\sin \varphi \cdot \mathbf{n} + \cos \varphi \cdot \mathbf{n}';$$

$$\mathbf{e}'_3 = -\sin \vartheta \cdot \mathbf{n}'' + \cos \vartheta \cdot \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{n} = \cos \psi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin \psi \cdot \mathbf{e}_2;$$

$$\mathbf{n}' = \cos \vartheta \cdot \mathbf{n}'' + \sin \vartheta \cdot \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{n}'' = -\sin \psi \cdot \mathbf{e}_1 + \cos \psi \cdot \mathbf{e}_2.$$

Функционал (1.1) определен на функциях ψ , ϑ , φ , удовлетворяющих условиям

$$\vartheta \Big|_{s=0} = 0, \quad (\psi + \varphi) \Big|_{s=0} = 0. \quad (1.4)$$

Координаты x_k оси стержня связаны с ψ , ϑ , φ формулой

$$x_k = \int_0^s \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_k ds.$$

2. Аппроксимация функционала энергии квадратичным функционалом. Пусть $\tilde{\psi}$, $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{\varphi}$ — какие-либо функции, удовлетворяющие условиям (1.4). В излагаемом алгоритме строятся удовлетворяющие (1.4) функции $\psi(s)$, $\vartheta(s)$, $\varphi(s)$, при которых

$$\Phi(\tilde{\psi} + \psi, \tilde{\vartheta} + \vartheta, \tilde{\varphi} + \varphi) \leq \Phi(\tilde{\psi}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}), \quad (2.1)$$

причем равенство в (2.1) возможно только при $\tilde{\psi}$, $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{\varphi}$, соответствующих экстремуму функционала Φ (в этом случае $\dot{\psi} = \dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$).

Обозначим через Φ' функционал, получающийся при разложении $\Phi(\tilde{\psi} + \psi, \tilde{\vartheta} + \vartheta, \tilde{\varphi} + \varphi)$ в ряд с сохранением линейных и квадратичных относительно ψ , ϑ , φ слагаемых:

$$\Phi' = \Phi_1 + \Phi_2,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \{ D_k (\tilde{\omega}_k - \omega_k^0 + \omega_k)^2 \} - 2\mathbf{F} \cdot (\tilde{\mathbf{e}}'_3 + \mathbf{e}'_3) \right] ds - \mathbf{N}_k \cdot (\tilde{\mathbf{e}}'_k + \mathbf{e}'_k), \quad (2.2)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \{ D_k (\tilde{\omega}_k - \omega_k^0) \tilde{\omega}_k \} - \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{e}}'_3 \right] ds - \frac{1}{2} \mathbf{N}_k \cdot \tilde{\mathbf{e}}'_k.$$

Здесь

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{d\psi}{ds} \sin \tilde{\nu} \cdot \sin \tilde{\varphi} + \frac{d\vartheta}{ds} \cos \tilde{\varphi} + \tilde{\omega}_2 \dot{\varphi} + \dot{\nu} \frac{d\tilde{\psi}}{ds} \cos \tilde{\nu} \cdot \sin \tilde{\varphi}; \\ \omega_2 &= \frac{d\psi}{ds} \sin \tilde{\nu} \cdot \cos \tilde{\varphi} - \frac{d\vartheta}{ds} \sin \tilde{\varphi} - \tilde{\omega}_1 \dot{\varphi} + \dot{\nu} \frac{d\tilde{\psi}}{ds} \cos \tilde{\nu} \cdot \cos \tilde{\varphi}; \\ \omega_3 &= \frac{d\psi}{ds} \cos \tilde{\nu} - \dot{\nu} \frac{d\tilde{\psi}}{ds} \sin \tilde{\nu} + \frac{d\dot{\varphi}}{ds}; \\ \dot{\mathbf{e}}'_k &= \dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{e}'_k; \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\gamma}_k \mathbf{e}'_k; \\ \dot{\gamma}_1 &= \dot{\psi} \sin \tilde{\nu} \cdot \sin \tilde{\varphi} + \dot{\nu} \cos \tilde{\varphi}; \quad \dot{\gamma}_2 = \dot{\psi} \sin \tilde{\nu} \cdot \cos \tilde{\varphi} - \dot{\nu} \sin \tilde{\varphi}; \\ \dot{\gamma}_3 &= \dot{\psi} \cos \tilde{\nu} + \dot{\varphi}; \\ \tilde{\omega}_k &= \left(\frac{d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{ds} + \frac{d\dot{\boldsymbol{\gamma}}}{ds} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}} \right) \cdot \mathbf{e}'_k; \quad \mathbf{e}'_k = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{e}_k + \dot{\boldsymbol{\gamma}} \times (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{e}'_k); \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} &= \tilde{\gamma}_k \mathbf{e}'_k; \quad \frac{d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{ds} = \frac{d\tilde{\gamma}_k}{ds} \mathbf{e}'_k + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\gamma}}; \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\omega}_k \mathbf{e}'_k; \quad \frac{d\dot{\boldsymbol{\gamma}}}{ds} = \dot{\omega}_k \mathbf{e}'_k; \\ \tilde{\gamma}_1 &= \dot{\psi} \dot{\nu} \cos \tilde{\nu} \cdot \sin \tilde{\varphi} - \dot{\nu} \dot{\varphi} \sin \tilde{\varphi} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \tilde{\nu} \cdot \cos \tilde{\varphi}; \\ \tilde{\gamma}_2 &= \dot{\psi} \dot{\nu} \cos \tilde{\nu} \cdot \cos \tilde{\varphi} - \dot{\nu} \dot{\varphi} \cos \tilde{\varphi} - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \tilde{\nu} \cdot \sin \tilde{\varphi}; \\ \tilde{\gamma}_3 &= -\dot{\psi} \dot{\nu} \sin \tilde{\nu}.\end{aligned}$$

Алгоритм основан на использовании очевидного свойства: неравенство (2.1) следует из неравенств

$$\Phi' \leq \Phi(\tilde{\psi}, \tilde{\nu}, \tilde{\varphi}), \quad \max_s (|\dot{\psi}(s)|, |\dot{\nu}(s)|, |\dot{\varphi}(s)|) \leq a \quad (2.3)$$

при достаточно малом значении a .

3. Разностная аппроксимация. Узлами $s_i = (i-1)/h$ ($i = 1, 2, \dots, N+1$, $h = l/N$) ось стержня разбивается на N элементов. Элементы нумеруются числами $i+1/2$ ($i = 1, 2, \dots, N$), а величины, соответствующие элементу $i+1/2$, снабжаются индексом $i+1/2$. Полагаем

$$\psi_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\psi_i + \psi_{i+1}), \quad \left(\frac{d\psi}{ds} \right)_{i+1/2} = \frac{1}{h}(\psi_{i+1} - \psi_i)$$

(ψ_i — значения ψ в узлах). Аналогично через ϑ_i , φ_i в узлах определяются величины

$$\vartheta_{i+1/2}, \quad \varphi_{i+1/2}, \quad \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)_{i+1/2}, \quad \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_{i+1/2}.$$

Синусы и косинусы в элементе $i+1/2$ вычисляются по формулам вида

$$(\sin \psi)_{i+1/2} = \sin \psi_{i+1/2}, \quad (\cos \psi)_{i+1/2} = \cos \psi_{i+1/2}.$$

В дальнейшем под Φ , Φ' , Φ_1 , Φ_2 понимаются функционалы, получаемые при разностной аппроксимации в (1.1)–(1.3), (2.2), (2.3) функций $\tilde{\psi}(s)$, $\tilde{\nu}(s)$, $\tilde{\varphi}(s)$, $\dot{\psi}(s)$, $\dot{\nu}(s)$, $\dot{\varphi}(s)$ и их производных. Ниже условия (1.4)

$$\dot{\nu}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_1 + \dot{\varphi}_1 = 0 \quad (3.1)$$

дополняются условиями

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2. \quad (3.2)$$

Предполагается, что $\tilde{\psi}_1, \tilde{\vartheta}_1, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\psi}_2$ удовлетворяют условиям

$$\tilde{\vartheta}_1 = 0, \quad \tilde{\psi}_1 + \tilde{\varphi}_1 = 0, \quad \tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2. \quad (3.3)$$

4. Минимизация квадратичного функционала. В излагаемом алгоритме при построении функций $\psi_i, \vartheta_i, \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N+1$), удовлетворяющих условиям (2.3), (3.1), (3.2), используется минимизация функционала Φ'' :

$$\Phi'' = \Phi' + \Psi, \quad \Psi = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N+1} [\varepsilon_i^{(1)} \psi_i^2 + \varepsilon_i^{(2)} \vartheta_i^2 + \varepsilon_i^{(3)} \varphi_i^2]$$

($\varepsilon_i^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3$) — неотрицательные числа). Очевидно, при тех $\psi_i, \vartheta_i, \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N+1$), которым соответствует минимум Φ'' , будет выполнено первое из неравенств (2.3). Введение функционала Ψ с числами $\varepsilon_i^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3$) — одно из средств, используемых ниже для выполнения второго неравенства в (2.3).

Минимизация Φ'' состоит из двух этапов. На первом этапе минимизируется функционал

$$\Phi^* = \Phi_1 + \Psi$$

в классе функций $\psi_i, \vartheta_i, \varphi_i$, удовлетворяющих условиям (3.1), (3.2). Минимуму Φ^* соответствует решение системы

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= R_1 \mathbf{u}_2, \\ A_i \mathbf{u}_{i-1} + (B_i + E_i) \mathbf{u}_i + C_i \mathbf{u}_{i+1} &= \mathbf{f}_i \quad (i = 2, 3, \dots, N), \\ A_{N+1} \mathbf{u}_N + (B_{N+1} + E_{N+1}) \mathbf{u}_{N+1} &= \mathbf{f}_{N+1}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где \mathbf{u}_i — векторы с компонентами $\psi_i, \vartheta_i, \varphi_i$. Матрицы A_i, B_i, C_i зависят от $\tilde{\psi}_k, \tilde{\vartheta}_k, \tilde{\varphi}_k$ ($k = i-1, i, i+1$); E_i — диагональная матрица с элементами $\varepsilon_i^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3$); векторы \mathbf{f}_i ($i = 2, \dots, N+1$) — невязки условий экстремума функционала Φ .

Квадратичная относительно \mathbf{u} , часть функционала Φ_1 неотрицательна и равна нулю при

$$(\dot{\omega}_s)_{i+1/2} = 0, \quad s = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\tilde{\psi}}{ds} - \sin \tilde{\vartheta} \frac{d\tilde{\vartheta}}{ds} \tilde{\varphi} + \cos \tilde{\vartheta} \frac{d\tilde{\varphi}}{ds} \right]_{i+1/2} &= 0, \\ \left[\frac{d\tilde{\psi}}{ds} \tilde{\vartheta} - \cos \tilde{\vartheta} \frac{d\tilde{\vartheta}}{ds} \tilde{\varphi} - \sin \tilde{\vartheta} \frac{d\tilde{\varphi}}{ds} \right]_{i+1/2} &= 0, \\ \left[\frac{d\tilde{\vartheta}}{ds} + \frac{d\tilde{\psi}}{ds} \sin \tilde{\vartheta} \tilde{\varphi} \right]_{i+1/2} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя (3.1)–(3.3), находим, что при

$$\tilde{\vartheta}_2 \neq 0, \quad \left\{ \left[1 + \left(\frac{h}{2} \frac{d\tilde{\psi}}{ds} \right)^2 \right] \sin \tilde{\vartheta} + \frac{h}{2} \frac{d\tilde{\vartheta}}{ds} \cos \tilde{\vartheta} \right\}_{i+1/2} \neq 0, \quad i = 2, \dots, N \quad (4.4)$$

равенства (4.3) возможны лишь в случае

$$\dot{\psi}_i = \dot{\eta}_i = \dot{\varphi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N + 1.$$

В дальнейшем предполагается, что условия (4.4) выполнены. При этих условиях решение системы (4.1) существует при любых неотрицательных числах $\varepsilon_i^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \dots, N + 1$) и будет нулевым лишь в случае, когда выполнены условия экстремума функционала Φ :

$$\mathbf{f}_i = 0, \quad i = 2, \dots, N + 1.$$

Решение системы (4.1) прогонкой [2] можно интерпретировать как элемент $\mathbf{u}_i^{(N)}$ последовательности

$$\mathbf{u}_i^{(k)} = \mathbf{u}_i^{(k-1)} + \dot{\mathbf{u}}_i^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, N + 1,$$

где $\mathbf{u}_i^{(0)} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$); $\dot{\mathbf{u}}_i^{(k)}$ определяются последовательно при $k = 1, 2, \dots, N$ уравнениями

$$\dot{\mathbf{u}}_1^{(k)} = \bar{\mathbf{n}}_1 \dot{\mathbf{u}}_2^{(k)}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{in}^{(k)}} \left(\Phi^* \Big|_{\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_s^{(k)}} \right) = 0, \\ i = 2, \dots, k + 1, \quad n = 1, 2, 3, \quad (4.5)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i^{(k)} = 0, \quad i = k + 2, \dots, N + 1.$$

Через $\dot{u}_{in}^{(k)}$ обозначены компоненты вектора $\dot{\mathbf{u}}_i^{(k)}$. Соответствующие решению уравнений (4.5) $\dot{\mathbf{u}}_i^{(k)}$ связаны с $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{(k)}$ равенством

$$\dot{\mathbf{u}}_i^{(k)} = R_i \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

в котором матрицы R_i не зависят от k . Используя это свойство, процедуру решения можно свести к вычислению векторов $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{(i)}$, матриц R_i :

$$\dot{\mathbf{u}}_2^{(1)} = G_2^{-1} \mathbf{f}_2, \quad G_2 = A_2 R_1 + B_2 + E_2, \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1}^{(i)} = G_{i+1}^{-1} (\mathbf{f}_{i+1} - A_{i+1} \dot{\mathbf{u}}_i^{(i-1)}), \quad G_{i+1} = A_{i+1} R_i + B_{i+1} + E_{i+1}, \quad (4.6) \\ R_i = -G_i^{-1} C_i, \quad i = 2, 3, \dots, N,$$

а также вычислению \mathbf{u}_i ($i = N + 1, \dots, 1$) по формулам

$$\mathbf{u}_{N+1} = \dot{\mathbf{u}}_{N+1}^{(N-1)}, \quad \mathbf{u}_i = \dot{\mathbf{u}}_i^{(i-1)} + R_i \mathbf{u}_{i+1}, \\ i = N, N - 1, \dots, 2, \quad \mathbf{u}_1 = R_1 \mathbf{u}_2. \quad (4.7)$$

Обозначим

$$\dot{u}_{in}(0) = \dot{u}_{in}^{(i-1)} \Big|_{\varepsilon_i^{(s)} = 0}, \quad \dot{u}_{in}(\varepsilon) = \dot{u}_{in}^{(i-1)} \Big|_{\varepsilon_i^{(s)} = \delta^{sn} \varepsilon_i^{(n)}}$$

(δ^{sn} — символ Кронекера). Из (4.6) следует

$$\dot{u}_{in}(\varepsilon) = \frac{\dot{u}_{in}(0)}{1 + \varepsilon_i^{(n)} g_i^{nn}}, \quad \dot{u}_{in}(0) = g_i^{nk} v_{ik},$$

где g_i^{nk} — элементы матрицы $(A_i \bar{R}_{i-1} + B_i)^{-1}$; v_{ik} — компоненты вектора $\mathbf{f}_{i-1} - A_i \dot{\mathbf{u}}_{i-1}^{(i-2)}$.

Ниже для определения чисел $\varepsilon_i^{(s)}$ использовалось условие

$$|\dot{u}_{is}(\varepsilon)| < \Delta, \quad s = 1, 2, 3$$

(Δ — заданное число). Согласно этому условию, $\varepsilon_i^{(s)}$ вычисляются по формуле

$$\varepsilon_i^{(s)} = \begin{cases} 0 & \text{при } |\dot{u}_{is}(0)| \leq \Delta, \\ \frac{\dot{u}_{is}(0)}{\Delta |g_i^{ss}|} - \frac{1}{g_i^{ss}} & \text{при } |\dot{u}_{is}(0)| > \Delta. \end{cases} \quad (4.8)$$

Введение Δ — один из способов регулировать значения $\psi_i, \vartheta_i, \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$), при которых функционал Φ^* имеет минимум. Из (4.6)–(4.8) следует, что эти значения стремятся к нулю при $\Delta \rightarrow 0$. В расчетах авторов обычно принималось, что $\Delta = 0,1$.

Второй этап минимизации функционала Φ'' состоит в коррекции u_i ($i = 1, 2, \dots, N + 1$), соответствующих минимуму Φ^* . Если при этих значениях функционал Φ_2 меньше или равен нулю, то первое из неравенств (2.3) выполнено и коррекция не производится. Если Φ_2 больше нуля, то u_i ($i = 1, 2, \dots, N + 1$), отвечающие минимуму Φ^* , умножаются на корректирующий множитель α , величина которого определяется условием минимума Φ'' .

Функционал Φ^* — сумма трех слагаемых:

$$\Phi^* = \bar{\Phi} + L + Q.$$

Здесь $\bar{\Phi} = \Phi(\bar{\psi}, \bar{\vartheta}, \bar{\varphi})$; L, Q — однородные относительно u_i функции первой и второй степени соответственно. Минимуму Φ^* отвечает равенство

$$L + 2Q = 0 \quad (4.9)$$

(его можно получить, например, из равенства нулю вариации функционала Φ^* после замены в нем вариаций δu_i на u_i). При помощи (4.9) условие минимума Φ'' по α представляется в виде

$$\alpha = Q / (Q + \Phi_2). \quad (4.10)$$

Значения функционалов Φ'', Q, Φ_2 , соответствующие полученным в результате коррекции $\bar{\psi}_i, \bar{\vartheta}_i, \bar{\varphi}_i$, связаны равенством

$$\Phi'' = \bar{\Phi} - (Q + \Phi_2).$$

Таким образом, используя формулы (4.6), (4.7) с $\varepsilon_i^{(s)}$ согласно (4.8) и вводя, если это необходимо, корректирующий множитель α согласно (4.10), можно получить значения $\psi_i, \vartheta_i, \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$), при которых

$$\Phi' \leq \Phi'' = \bar{\Phi} - (Q + |\Phi_2|). \quad (4.11)$$

Значения $\psi_i, \vartheta_i, \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) могут регулироваться числом Δ в (4.8).

5. Минимизация функционала энергии. Если при полученных в результате минимизации функционала Φ'' значениях $\bar{\psi}_i, \bar{\vartheta}_i, \bar{\varphi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) неравенство (2.1) выполнено, функции $\bar{\psi}_i, \bar{\vartheta}_i, \bar{\varphi}_i$ заменяются на $\bar{\psi}_i + \psi_i, \bar{\vartheta}_i + \vartheta_i, \bar{\varphi}_i + \varphi_i$ и производится вычисление следующего приближения.

Если неравенство (2.1) не выполнено, вводится последовательность корректирующих множителей γ^m ($m = 1, 2, 3, \dots$), $0 < \gamma < 1$. В расчетах авторов обычно принималось, что $\gamma = 1/2$. При замене $\psi_i, \vartheta_i, \varphi_i$ на $\gamma^m \psi_i, \gamma^m \vartheta_i, \gamma^m \varphi_i$ значение функционала Φ'' увеличивается, но остается меньшим $\bar{\Phi}$:

$$\begin{aligned} \Phi'' &= \bar{\Phi} - \gamma^m(2 - \gamma^m)Q + \gamma^{2m}\Phi_2 & \text{при } \Phi_2 \leq 0, \\ \Phi'' &= \bar{\Phi} - \gamma^m(2 - \gamma^m)(Q + \Phi_2) & \text{при } \Phi_2 > 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

(значения Q и Φ_2 в (5.1) те же, что и в (4.11)). Так как Φ'' остается меньшим $\bar{\Phi}$ при всех m , то существует такое m , при котором неравенство (2.1) будет выполнено.

Таким образом, если $\tilde{\psi}_i, \tilde{\vartheta}_i, \tilde{\varphi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) не удовлетворяют условиям экстремума функционала Φ , можно построить изложенным выше методом новое приближение с меньшим значением функционала энергии.

6. Изгиб и кручение стержня с криволинейной осью в виде четверти кольца. На рис. 2 изображены формы равновесия стержня квадратного поперечного сечения с криволинейной осью в виде четверти кольца ($\psi_0 = \varphi_0 = 0, \vartheta_0 = -(\pi/2)s$) при изгибе силой $P = -Pe_1$, приложенной на конце $s = 1$ оси стержня. Здесь и далее P — безразмерная величина, равная силе, умноженной на l^2/D_2 ; s, x'_i, x_i — отношения длины дуги и координат к длине стержня l .

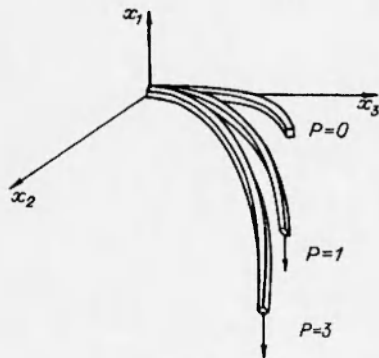


Рис. 2

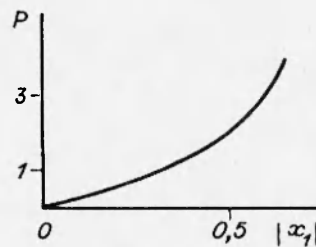


Рис. 3

В качестве первого приближения принималось $\psi = \psi_0, \vartheta = \vartheta_0, \varphi = \varphi_0$. Для получения решения при $P = 1$ и 3 потребовалось 10 и 20 итераций соответственно. Здесь и далее в качестве критерия остановки процесса принималось условие

$$\max_i |f_i| < 10^{-3}.$$

На рис. 3 представлена зависимость между силой P и координатой x_1 конца $s = 1$ оси стержня.

7. Изгиб и кручение прямолинейного стержня поперечной силой, приложенной на его конце. Вычислялись равновесные состояния при изгибе и кручении стержня силой $P = Pe_2$, приложенной на конце стержня в точке $x'_1 = -d, x'_2 = 0$ (рис. 4). Рассматривался случай

$$D_1/D_2 = 1/4, \quad D_3/D_2 = 0,05. \quad (7.1)$$

На рис. 4 сплошной и штриховой кривыми представлены зависимости координаты x_2 конца $s = 1$ оси стержня от P при $d = 0$ и $0,1$ соответственно.

Из вычислений равновесных форм с другими, чем в (7.1), жесткостями на кручение следует, что с увеличением \bar{D}_3 различие между формами оси стержня, отвечающими $d = 0$ и $0,1$, уменьшается и практически исчезает при $D_3/D_1 = 1$. Выполненные вычисления позволяют сделать вывод, что в приведенном примере изгиб является основным фактором, определяющим форму оси стержня, кручение на форму оси стержня влияет мало.

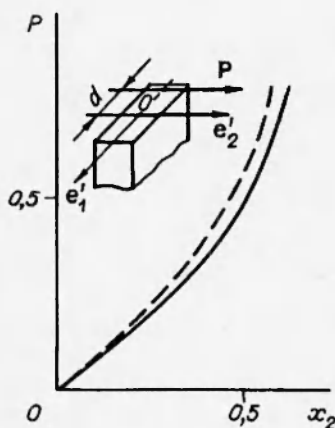


Рис. 4

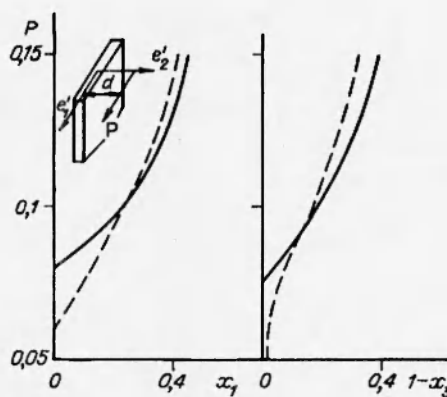


Рис. 5

Рассматривались также равновесные состояния полосы прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон $1 : 8$ при изгибе и кручении поперечной силой $P = Pe_1$, приложенной в точке $x_1' = 0$, $x_2' = d$ торца полосы (рис. 5). В этом случае различие между формами оси стержня, соответствующими $d = 0$ и $0,1$, становится существенным и продемонстрировано на рис. 5, где представлены сплошной и штриховой кривыми зависимости координат x_1 , x_3 конца $s = 1$ оси стержня от P при $d = 0$ и $0,1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Г. В., Иванова О. Н. Вычисление пространственных равновесных форм тонких упругих стержней методом самоуравновешенных невязок // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 130–136.
2. Годунов С. К., Рябенкий В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 21/VII 1994 г.,
в окончательном варианте — 29/IX 1994 г.